113.

SOPRA UNA TRASFORMAZIONE BIRAZIONALE, DEL SESTO GRADO, DELLO SPAZIO A TRE DIMENSIONI, LA CUI INVERSA È DEL QUINTO GRADO.

Proceedings of the London Mathematical Society, vol. XV (1884), pp. 242-246.

1. La breve comunicazione che ho l'onore di fare alla London Mathematical Society è sostanzialmente una illustrazione de' metodi di trasformazione geometrica dello spazio a tre dimensioni, che io cominciai a pubblicare già da molti anni, nel *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, nei *Rendiconti dell'Istituto Lombardo*, nelle *Nachrichten della R. Società di Göttingen*, nelle *Memorie dell'Accademia di Bologna*, negli *Annali di Matematica, etc.:* i quali metodi sono fondati sulla teoria delle trasformazioni delle figure piane, da me data nel 1865 (*Memorie dell'Accademia di Bologna*) [Queste Opere, n. 62 (t. 2.°)].

2. Se Ψ è una superficie di 3.° ordine, dotata di un punto doppio (conico) O, e se per cinque delle sei rette di Ψ uscenti da O si fa passare un cono generale di 4.° ordine, la rimanente intersezione sarà una curva di 7.° ordine Γ_7, per la quale O è un punto triplo. Si sa che questa curva Γ_7 (per la quale passa una *rete*, ossia un sistema lineare ∞^2 di superficie analoghe a Ψ) può essere presa come curva doppia di infinite superficie di 6.° ordine, aventi anch'esse in O un punto triplo. È anche noto *) che una siffatta superficie può essere rappresentata in un piano φ per modo che le imagini delle sue sezioni piane siano curve di 4.° ordine aventi in comune dieci punti (fondamentali) semplici $m_1, m_2, \ldots m_{10}$. Indicherò tali curve col simbolo $c_4 \equiv m_1 m_2 \ldots m_{10} \equiv m$. L'imagine di Γ_7 è una curva $c_{11} \equiv m^3$, ossia d'ordine 11 e passante tre volte per ciascun punto m. Un'al-

*) Caporali nei *Collectanea Mathematica in memoriam D. Chelini*, p. 169. Cfr. una mia comunicazione alla R. Irish Academy, 28 aprile 1884 [Queste Opere, n. 112].

tra superficie dello stesso ordine e dotata della stessa singolarità sega ulteriormente la prima in una curva di 8.° ordine, la cui imagine è una conica descritta arbitrariamente nel piano φ. Supponendo che la conica sia fatta passare pei tre punti m_8, m_9, m_{10}, la curva d'intersezione si spezza in tre rette R R′ R″ trisecanti di Γ_7 ed in una quintica (razionale) C_5, che incontra le rette R ciascuna una volta e la Γ_7 tredici volte. Chiamerò Φ_6 o Φ la superficie rappresentata in φ e Φ', Φ'',... le altre superficie analoghe, seganti Φ nelle stesse tre rette R (oltre la curva doppia Γ_7); tutte le Φ formano un sistema *omaloidale* (ossia tale che tre punti arbitrari dello spazio individuano una Φ, e tre Φ si segano in un solo punto, all'infuori delle linee *fondamentali* Γ_7, R, R′, R″). Tutte le quintiche analoghe C_5 sono in numero $(4 . 5 - 3 - 13 =)$ 4 volte infinito, e due di esse, se poste in una stessa superficie Φ, si segano in un solo punto. Tutto ciò appare manifesto dalla rappresentazione φ.

3. Per lo scopo della presente memoria, conviene di trasformare il piano φ mediante una trasformazione quadratica i cui punti fondamentali siano m_8, m_9, m_{10}. Allora le imagini delle sezioni piane di Φ saranno curve di 5.° ordine aventi in comune tre punti doppi a_1, a_2, a_3 e sette punti semplici $b_1, b_2, \ldots b_7$; le rette a_2a_3, a_3a_1, a_1a_2 rappresenteranno le rette R, R′, R″; e la curva Γ_7 sarà rappresentata da una curva di 13.° ordine, $c_{13} \equiv a^5b^3$, passante cinque volte per ciascun punto a e tre volte per ciascun punto b. Le imagini delle curve C_5 saranno ora le rette del piano φ.

4. Ora io posso far corrispondere univocamente i punti del dato spazio S a quelli di un altro spazio s, in modo che le superficie Φ e le curve C_5 corrispondano ai piani φ ed alle rette di s. Si tratta di trovare quali superficie e quali curve di s corrisponderanno ai piani e alle rette di S. Di queste superficie e curve sappiamo soltanto finora che le prime sono di 5.° ordine e le seconde del 6.°: come risulta dal segare in S un piano con una C_5 e una retta con una Φ.

5. La Jacobiana delle Φ è una superficie d'ordine $4(6-1) = 20$, e per essa Γ_7 è una curva $(4 . 2 - 1 =)$ 7^{pla} e le R sono rette $(4 . 1 - 1 =)$ 3^{ple}. Inoltre, la Jacobiana sega una qualunque delle Φ in un luogo d'ordine $6 . 20 - 2 . 7 . 7 - 1 . 3 . 3 = 13$, la cui imagine in φ è costituita dai punti fondamentali a b. I sette punti b rappresentano altrettante rette trisecanti di Γ_7; e i punti a rappresentano coniche seganti Γ_7 in cinque punti e appoggiate a due rette R. Perciò la Jacobiana delle Φ è composta: 1.° della superficie J_{11} d'ordine 11, luogo delle trisecanti di Γ_7; per essa, Γ_7 è curva quadrupla e le R sono tre generatrici semplici; 2.° di tre superficie di 3.° ordine Ψ_3, Ψ'_3, Ψ''_3 (della rete considerata al principio di questa memoria), passanti per Γ_7 e rispettivamente per R′ R″, R″ R, R R′. Queste superficie Ψ_3 sono appunto i luoghi delle coniche appoggiate in 5 punti a Γ_7 e incontranti due rette R: come si può facilmente verificare *a posteriori*

ricorrendo ad una rappresentazione piana di una Ψ, p. e. ad una projezione dal punto doppio O *).

6. Le superficie costituenti la Jacobiana delle Φ corrispondono alle curve fondamentali dello spazio s: perciò, in questo spazio, avremo una curva c_7 i cui punti corrisponderanno alle generatrici di J_{11}, e il cui ordine sarà 7, perchè ciascuna Φ contiene *sette* generatrici di J_{11}; ed avremo inoltre tre rette r, r', r'', i cui punti corrisponderanno alle coniche di $\Psi_3, \Psi'_3, \Psi''_3$. Ciascuna r è una retta (linea d'ordine 1) perchè la corrispondente Ψ_3 ha *una* sola conica in una Φ qualunque. E il sistema omaloidale in s (ossia il sistema delle superficie corrispondenti ai piani di S) sarà per conseguenza costituito dalle superficie f_5 di 5.° ordine, aventi in comune c_7 come curva *semplice* (giacchè i suoi punti corrispondono a rette) e le r come rette *doppie* (giacchè i loro punti corrispondono a coniche). Due f_5 si segheranno ulteriormente in una curva k_6 (razionale) d'ordine $5 \,.\, 5 - 7 - 3 \,.\, 4 = 6$; tutte le curve analoghe corrispondono alle rette di S. Una k_6 incontra la c_7 in undici punti e ciascuna r in tre punti, perchè le Jacobiane parziali, corrispondenti a c_7, r, sono rispettivamente dell'ordine 11, 3.

7. La superficie Ψ_3 che contiene Γ_7 ed $R' R''$, insieme con una superficie Ψ, passante per Γ_7 ed R (vi è un fascio di tali superficie Ψ), forma una superficie Φ, cui corrisponderà un piano passante per r; ossia i piani per r corrispondono alle Ψ per Γ_7 ed R; analogamente i piani per r' alle Ψ per Γ_7 ed R'; ed i piani per r'' alle Ψ per Γ_7 ed R''. Questi tre fasci di Ψ, presi due a due, hanno una superficie comune (la Ψ_3 che passa per Γ_7 e per $R' R''$ o per $R'' R$ o per $R R'$); dunque anche i fasci di piani per r, r', r'', presi due a due, hanno un piano comune: ossia le tre rette r, r', r'' giacciono due a due in un medesimo piano. E siccome tutte e tre non possono trovarsi in uno stesso piano (essendo rette doppie per superficie di 5.° ordine), così esse concorrono in un punto o.

8. Un cono di 2.° ordine per $r r' r''$, corrisponderà ad una superficie di 12.° ordine $\equiv \Gamma_7^4 R^2 R'^2 R''^2$, dalla quale devono staccarsi le tre superficie $\Psi_3 \equiv \Gamma_7 R' R''$, $\Psi'_3 \equiv \Gamma_7 R'' R$, $\Psi''_3 = \Gamma_7 R R'$; rimane dunque una superficie di 3.° ordine per Γ_7. Alla rete delle superficie Ψ per Γ_7 corrisponde adunque la rete dei coni quadrici per $r r' r''$. Ne segue che alle rette per o corrispondono le coniche per O, appoggiate a Γ_7 in quattro punti. Una di queste coniche incontra un piano arbitrario in due punti; dunque o è un punto triplo per le superficie f_5.

9. Ciascuna delle tre rette r incontra c_7 in tre punti. Infatti la J_{11} e una delle Ψ_3,

*) La rappresentazione ha sei punti fondamentali 1, 2, 3, 4, 5, 6 situati in una conica che è l'imagine del punto doppio. Le imagini delle due rette R e della curva Γ_7 sono p. e. le rette 16, 26 e una curva generale di 4.° ordine 12345. La superficie è allora il luogo delle coniche aventi per imagini le coniche 3456.

avendo in comune Γ_7 e due R, si segheranno inoltre in un luogo di 3.° ordine: se M è un punto di esso, per M passerà una generatrice di J_{11}, ossia una trisecante di Γ_7. Questa trisecante, avendo così 4 punti comuni con Ψ_3, che è di 3.° ordine, giace per intero in questa superficie; dunque quel luogo di 3.° ordine, ulteriore intersezione di J_{11} e Ψ_3, è composto di tre rette, trisecanti di Γ_7. *) Da ciò segue che c_7 ha tre punti comuni con ciascuna r. Ai cinque punti in cui c_7 incontra ulteriormente un cono quadrico passante per le r corrispondono le cinque rette in cui J_{11} sega una Ψ.

10. Considerando la rappresentazione di una f_5 sul piano corrispondente F in S, le imagini delle sezioni piane di f_5 saranno le sezioni fatte in F dalle Φ, ossia curve di 6.° ordine con sette punti doppi $A_1 A_2 \ldots A_7$ (tracce di Γ_7) e tre punti semplici B (tracce delle rette R) **). L'imagine della curva fondamentale c_7 sarà una curva $C_{11} \equiv A^4B$, traccia della superficie J_{11}; e le rette r saranno rappresentate da tre cubiche $AB'B''$, $AB''B$, ABB' (tracce delle superficie Ψ_3), passanti pei sette punti A e per due punti B. Ciascuna di queste cubiche è punteggiata in coppie di punti conjugati (mediante le coniche il cui luogo è la relativa Ψ_3), in modo che le curve sestiche A^2B la incontrano soltanto in coppie di punti conjugati.

Le tre cubiche medesime si segano ulteriormente, due a due, in tre punti C, C', C'', uno per ciascun pajo. Ne segue che i punti C, C', C'' costituiscono insieme l'imagine del punto o nel piano F; così che essi giaceranno in ∞^2 sestiche del sistema A^2B. È pure manifesto che $C'C''$, $C''C$, CC' sono coppie di punti conjugati, rispettivamente per le cubiche $AB'B''$, $AB''B$, ABB'.

11. I punti C sono le intersezioni di F con tre rette, passanti per O e appoggiate a Γ_7, le quali costituiscono l'imagine di o nello spazio S. Tali rette sono quelle nelle quali s'intersecano, due a due, le tre superficie cubiche $\Gamma_7R'R''$, $\Gamma_7R''R$, Γ_7RR'. Esse corrispondono alle rette R, R', R'' nella corrispondenza univoca che esiste fra le generatrici di J_{11} e le generatrici del cono che da O projetta Γ_7. Ecco come si riconosce tale corrispondenza. Due superficie di 3.° ordine passanti per Γ_7 si segano inoltre secondo una conica che passa per O e incontra Γ_7 quattro volte. Ma, se le due superficie passano insieme per una trisecante di Γ_7, esse individuano un fascio, tutte le superficie del quale hanno inoltre in comune una generatrice del cono $O\Gamma_7$: e viceversa, se le due superficie passano per questa generatrice, esse contengono eziandio quella trisecante.

12. I punti fondamentali A, B della rappresentazione di f_5 in F, sono le imagini di sette coniche e di tre rette: queste costituiscono adunque la parte variabile dell'in-

*) Ciò può anche dedursi dal fatto che J_{11} è segata da ogni Φ secondo 7 rette, e che p. e. la $\Psi \equiv \Gamma_7R'R''$ con una $\Psi \equiv \Gamma_7R$ costituiscono una Φ.

**) Cfr. Caporali, l. c.

tersezione di una f_5 colla Jacobiana delle f, la quale dev'essere dell'ordine $4(5-1)=16$ e contenere tre volte la c_7 e sette volte ciascuna delle r. La Jacobiana è dunque composta: 1.° della superficie j_{13} d'ordine 13 (perchè le curve C_5 in S incontrano Γ_7 tredici volte), luogo delle coniche appoggiate alle r e seganti c_7 in quattro punti; 2.° di tre piani i, i', i'' determinati dalle r prese due a due. Siccome in S la Γ_7 è incontrata rispettivamente in 3, 5 punti dalle rette e dalle coniche corrispondenti ai punti di c_7, r, così in s per la superficie j_{13} la c_7 è tripla e ciascuna r è quintupla.

Il piano $r'r''$ fa parte della Jacobiana delle f in quanto è il luogo delle rette (formanti un fascio) che segano r', r'' e incontrano c_7 nel punto che questa curva ha nel piano all'infuori delle r', r''. Il detto piano sega j_{13} secondo tre rette uscenti dal punto ora nominato di c_7, le quali corrispondono ai punti in cui R è appoggiata a Γ_7.

13. Ai piani per una retta R dello spazio S corrispondono in s superficie di 4.° ordine per le quali r è una retta doppia e c_7, r', r'' sono linee semplici. Perciò la curva c_7 giace in tre fasci di superficie di 4.° ordine dotate di una retta doppia (una delle r). Un fascio ha per base la retta doppia, la c_7, le altre due rette r e altre tre rette corrispondenti ai punti in cui R è appoggiata a Γ_7.

14. Abbiamo veduto che ad una retta qualunque K in S corrisponde in s una sestica (razionale) k_6 che sega ciascuna r tre volte e la c_7 undici volte. Ma, poichè ai punti di Γ_7 e delle R corrispondono coniche e rette che hanno un determinato numero d'incontri colle linee fondamentali di s, così se K incontra Γ_7 o le R, la corrispondente curva in s si abbassa ad un ordine inferiore. Per es. alle corde di Γ_7 corrispondono le coniche appoggiate in un punto a ciascuna r e in tre punti alla c_7; alle rette seganti le tre R corrispondono le cubiche gobbe che incontrano ciascuna r una volta e la c_7 otto volte; alle rette che incontrano Γ_7 e le tre R corrispondono le rette che segano quattro volte c_7; etc.

Da quest'ultima osservazione si conclude che c_7 ha cinque rette che la segano in quattro punti; giacchè l'iperboloide formato dalle trasversali delle R incontra Γ_7 in $2.7-3.3=5$ punti situati fuori delle R medesime.

15. Analoghi risultati si ottengono considerando le rette c nello spazio s e le corrispondenti curve C_5 in S. Alle rette trisecanti di c_7 corrispondono le coniche appoggiate in un punto a ciascuna R e in quattro punti a Γ_7; alle corde di c_7 segate da una r corrispondono le corde di Γ_7 segate da una R; etc.

16. Se ora si suppone data, in uno degli spazi S o s, una superficie passante una o più volte per alcuna delle linee fondamentali, sarà ovvio di ottenere le proprietà della corrispondente superficie nell'altro spazio.