108.

SOPRA UNA CERTA SUPERFICIE DI QUART' ORDINE.

In Memoriam DOMINICI CHELINI, *Collectanea mathematica*, Milano, U. HOEPLI, MDCCCLXXXI, pp. 413-424.

1. Due fasci projettivi di superficie di 2.° grado

$$(1)\qquad \begin{aligned} S_1 + \lambda S_2 = 0 \\ S_3 + \lambda S_4 = 0 \end{aligned}$$

generano, com'è noto, la superficie di 4.° ordine

$$(2)\qquad S_1 S_4 - S_2 S_3 = 0$$

la quale può anche essere generata mediante i due fasci projettivi

$$(3)\qquad \begin{aligned} S_1 + \mu S_3 = 0 \\ S_2 + \mu S_4 = 0. \end{aligned}$$

Ne segue che sulla superficie (2) sono tracciate due serie (semplicemente infinite) di curve generatrici, le quali, in generale, sono di 4.° ordine e 1.ª specie. Una generatrice qualunque della prima serie è rappresentata dalle equazioni (1), una qualunque della seconda dalle (3).

2. Suppongasi ora che tutte le superficie di 2.° grado S abbiano un punto comune O ed in esso siano toccate da uno stesso piano $x = 0$. Ossia, indicate con x, y, z, w le coordinate omogenee di un punto nello spazio, e supposto che le prime tre siano nulle per O, si ponga

$$S_r = k_r\, w\, x + K_r$$

dove k è una costante e K è un polinomio omogeneo di 2.° grado in x, y, z.

Allora la (2) diviene

$$\begin{aligned}(k_1 k_4 - k_2 k_3)\, w^2 x^2 + (k_1 K_4 + k_4 K_1 - k_2 K_3 - k_3 K_2)\, w\, x \\ + K_1 K_4 - K_2 K_3 = 0\end{aligned}$$

equazione che scriveremo brevemente così:

$$(4) \qquad F = 0$$

e che rappresenta una superficie di 4.° ordine, avente O per punto doppio uniplanare e tale che ivi la superficie tocca sè medesima: ossia, ogni piano condotto per O sega la superficie secondo una curva che in O ha due punti doppi infinitamente vicini. Il piano tangente singolare $x = 0$ taglia la superficie secondo quattro rette incrociate in O: onde O assorbe quattro intersezioni della superficie con qualunque linea passante semplicemente per O ed ivi toccante il suddetto piano $x = 0$.

3. In generale una superficie di 4.° ordine dotata di questa singolarità in O ha per equazione

$$(5) \qquad h\,w^2\,x^2 + u\,w\,x + v = 0$$

dove h è una costante ed u, v sono polinomi omogenei in x, y, z, risp. del grado 2, 4.

L'equazione (5) può essere ridotta, e in infinite maniere, alla forma (4). Infatti: si considerino le equazioni

$$u = 0, \quad v = 0$$

come rappresentanti una conica ed una curva di 4.° ordine, poste in uno stesso piano. Presi ad arbitrio in $v = 0$ i punti **1 2 3 4 5 6 7**, descrivansi le coniche

$$K_1 = 0 \text{ per } \mathbf{1\,2\,3\,4\,5}$$

$$K_2 = 0 \text{ per } \mathbf{1\,2\,3\,4\,6}$$

le quali seghino inoltre $v = 0$ risp. in $\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{q}_1\,\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{q}_2\,\mathfrak{r}_2$. Poi descrivansi le coniche

$$K_3 = 0 \text{ per } \mathbf{5}\ \mathfrak{p}_1\,\mathfrak{q}_1\,\mathfrak{r}_1\ \mathbf{7}$$

$$K_4 = 0 \text{ per } \mathbf{6}\ \mathfrak{p}_2\,\mathfrak{q}_2\,\mathfrak{r}_2\ \mathbf{7}$$

le quali, com'è notissimo, si segheranno in altri tre punti $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}$ della curva $v = 0$. Epperò questa curva sarà generabile mediante i fasci projettivi di coniche

$$K_1 + \lambda\,K_2 = 0, \quad K_3 + \lambda\,K_4 = 0,$$

ossia, v è riducibile alla forma $K_1\,K_4 - K_2\,K_3$, e ciò in 7^∞ maniere diverse.

Ora, le quattro coniche K determinano un sistema triplamente infinito di coniche, rappresentate, in generale, dall'equazione

$$k_4\,K_1 - k_3\,K_2 - k_2\,K_3 + k_1\,K_4 = 0$$

ove le k sono parametri arbitrari. Dunque, in $(7 + 3 - 5)^\infty = 5^\infty$ maniere diverse si possono ridurre simultaneamente una data quartica $v = 0$ ed una data conica $u = 0$ alle forme

$$K_1 K_4 - K_2 K_3 = 0$$

$$k_4 K_1 - k_3 K_2 - k_2 K_3 + k_1 K_4 = 0,$$

donde consegue ciò che si è asserito per l'equazione (5).

4. Indicando ora con F la superficie (5) di 4.° ordine, dotata del punto singolare O (e del resto priva d'altri punti multipli e di linee multiple), essa può essere generata mediante due fasci projettivi di superficie di 2.° grado, tutte toccantisi fra loro nel punto comune O. Da queste superficie nascono, per F, due serie di generatrici, che sono curve gobbe di 4.° ordine, tutte aventi un punto doppio in O (e le tangenti nel piano $x = 0$). Due generatrici di serie diverse giacciono in una stessa superficie di 2.° grado e s'incontrano in quattro punti (diversi da O). Invece due generatrici della stessa serie non hanno punti comuni, oltre ad O.

Poichè la superficie F possiede una serie (semplicemente infinita) di curve razionali situate ad una ad una sulle superficie di un fascio, ne segue a dirittura, per un teorema di NOETHER, che F è rappresentabile, punto per punto, su di un piano.

5. Dati due fasci projettivi di superficie di 2.° grado

$$(k_1 + \lambda\, k_2)\, w\, x + K_1 + \lambda\, K_2 = 0$$

$$(k_3 + \lambda\, k_4)\, w\, x + K_3 + \lambda\, K_4 = 0$$

che tutte si toccano in un punto comune $x = y = z = 0$, i coni (di 2.° grado) che da questo punto projettano le curve d'intersezione delle coppie di superficie corrispondenti formano una serie rappresentata dall'equazione

$$(k_1 + \lambda\, k_2)\,(K_3 + \lambda\, K_4) - (k_3 + \lambda\, k_4)\,(K_1 + \lambda\, K_2) = 0;$$

la quale mostra come la serie contenga, in generale, sei coni spezzantisi in due piani; ossia, ciascuna serie di curve razionali di 4.° ordine, col punto doppio O, esistenti sulla superficie F, comprende sei curve composte di due coniche situate in piani distinti. Queste due coniche, appartenendo ad una stessa superficie di 2.° grado, s'incontrano in O ed in un altro punto: punto di ulteriore contatto fra due superficie corrispondenti de' due fasci projettivi. Siccome poi due curve della serie non hanno (oltre ad O) alcun punto comune, così due coniche appartenenti a coppie diverse non s'incontrano (fuori di O).

Si hanno così dodici coniche di F, situate in piani differenti: i quali piani segheranno adunque la superficie secondo altre dodici coniche, formanti analogamente sei coppie situate in sei superficie di 2.° grado di un fascio. Infatti, se le superficie

$$S_1 + \lambda_r S_2 = 0$$
$$S_3 + \lambda_r S_4 = 0$$

si segano secondo due coniche, per $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, indicate con

$$P_r = 0, \; Q_r = 0$$

le equazioni dei piani delle due coniche, si avrà l'identità

$$S_1 + \lambda_r S_2 + \mu_r (S_3 + \lambda_r S_4) = P_r Q_r.$$

E, scritta l'equazione (2) della superficie F così:

$$(S_1 + \lambda_r S_2) S_4 - (S_3 + \lambda_r S_4) S_2 = 0,$$

questa, in virtù di quell'identità, si muterà nella seguente:

$$(S_1 + \lambda_r S_2)(S_2 + \mu_r S_4) - S_2 P_r Q_r = 0,$$

la quale dice che i piani $P_r = 0$, $Q_r = 0$, oltre a dare le due coniche poste nelle superficie di 2.° grado $S_1 + \lambda_r S_2 = 0$, $S_3 + \lambda_r S_4 = 0$, segano F secondo altre due coniche situate nelle due superficie di 2.° grado

$$S_2 + \mu_r S_4 = 0, \; S_1 + \mu_r S_3 = 0,$$

ciascuna delle quali, variando r, dà sei superficie d'uno stesso fascio.

In altre parole, anche le dodici nuove coniche formano sei curve di 4.° ordine (con punto doppio in O) appartenenti ad una stessa serie. E siccome due curve di 4.° ordine, appartenenti a serie diverse, s'incontrano sempre in quattro punti (oltre ad O), così ciascuna delle prime dodici coniche incontra ciascuna delle altre dodici.

6. Dall'esistenza di una conica $\mathfrak{K}$ giacente su F e passante per O si può subito dedurre un'interessante trasformazione della superficie di 4.° ordine.

Le superficie S di 2.° grado che passano per $\mathfrak{K}$ e toccano in O il piano $x = 0$ formano un sistema omaloidico, epperò somministrano una trasformazione birazionale del dato spazio Σ in un altro Σ', i cui piani e le cui rette corrispondono ordinatamente alle superficie S ed alle coniche $\mathfrak{C}$ toccate in O dal piano $x = 0$ e seganti $\mathfrak{K}$ in un secondo punto. *)
In qual superficie F' viene allora a trasformarsi la data F?

Ai punti in cui F' è incontrata da una retta arbitraria dello spazio Σ' corrispondono i punti di ulteriore intersezione di F con una conica $\mathfrak{C}$; i quali punti sono in numero di

*) Io ho già adoperata questa trasformazione in altra occasione: *Rendiconti* dell'Istituto Lombardo 9 marzo 1871 [Queste Opere, n. 88]. Veggasi anche: *Annali di Matematica* (Milano 1872), tom. V della serie seconda, pag. 142 e 143 (Questo volume, pag. 307 e 308).

$2.4 - 4 - 1 = 3$, perchè O assorbe già 4 intersezioni e vi è poi un altro punto comune a $\mathfrak{C}$ ed a $\mathfrak{K}$. Dunque F′ è una superficie di 3.° ordine.

Viceversa, se F′ e $\mathfrak{K}'$ sono una superficie di 3.° ordine ed una conica toccate in un punto comune O′ da uno stesso piano $x' = 0$, e del resto quali si vogliano; trasformando punto per punto lo spazio Σ' nello spazio Σ per modo che ai piani di questo corrispondano le superficie di 2.° grado passanti per $\mathfrak{K}'$ e toccanti in O′ il piano $x' = 0$; la superficie F′ si trasformerà in una superficie analoga ad F. Infatti la nuova superficie

1.° è del 4.° ordine, perchè qualunque conica dello spazio Σ' toccata in O′ dal piano $x' = 0$ (e incontrata in un altro punto da $\mathfrak{K}'$) avrà con F′ altri quattro punti comuni;

2.° ha in O un punto doppio, perchè ogni retta per O′ incontra F′ in altri due punti;

3.° è tagliata dal piano $x = 0$ secondo quattro rette incrociate in O, perchè la superficie F′ contiene quattro punti di $\mathfrak{K}'$ (oltre ad O′);

4.° è segata da un piano arbitrario per O secondo una curva (di 4.° ordine) di genere 1, epperò avente in O due punti doppî infinitamente vicini, perchè un piano condotto arbitrariamente per O′ sega F′ secondo una curva (di 3.° ordine) di genere 1.

7. Ciò stabilito, la nota geometria della superficie generale di 3.° ordine F′ somministra immediatamente la geometria della nostra superficie F.

Alle 27 rette di F′ corrispondono in F altrettante coniche passanti per O e seganti $\mathfrak{K}$ in un secondo punto; le quali tra loro si segano o no, secondochè ciò avviene delle rette di F′.

Il piano di una qualunque di queste 27 coniche sega F lungo una nuova conica: queste altre 27 coniche (passanti per O ma non incontranti altrove $\mathfrak{K}$) corrispondono alle coniche che si ottengono in F′ mediante i piani condotti per O′ e per le 27 rette.

Il piano di $\mathfrak{K}$ sega F secondo un'altra conica, la quale corrisponde al punto O′, mentre $\mathfrak{K}$ ha per corrispondente la curva razionale di 3.° ordine, sezione di F′ col piano tangente in O′.

Si hanno così, in F, 56 coniche tutte passanti per O e situate, due a due, in 28 piani. Esse corrispondono alle 27 rette di F′, alle 27 coniche passanti per O′, al punto O′ ed alla sezione del piano tangente in O′.

8. *In generale*, la superficie F non contiene altre coniche. Infatti, sia $\mathfrak{C}$ una conica in F (distinta da $\mathfrak{K}$). Il piano di $\mathfrak{C}$ conterrà un'altra conica di F, e se questo piano passa per O, le due coniche si toccheranno in questo punto, con una tangente posta ne piano $x = 0$. Perciò $\mathfrak{C}$ incontra altrove al più in due punti una qualunque delle superficie S. Ne segue che a $\mathfrak{C}$ corrisponderà in Σ' una conica, una retta o un punto, secondochè $\mathfrak{C}$ ha con $\mathfrak{K}$ 0, 1, 2 punti d'incontro, oltre ad O. Si hanno così le $27 + 27 + 1$ coniche già ottenute.

Se $\mathfrak{G}$ non passa per O, può avere con $\mathfrak{K}$ 2, 1, 0 punti comuni, e quindi incontrerà una S qualunque in 2, 3, 4 punti fuori di $\mathfrak{K}$. Nel primo caso a $\mathfrak{G}$ corrisponderebbe una conica di F' passante per due de' quattro punti in cui F' è incontrata da $\mathfrak{K}'$; nel secondo caso una cubica passante per O' e ancora per due punti di $\mathfrak{K}'$; nel terzo una curva di 4.° ordine, avente un punto doppio in O' e passante per due punti di $\mathfrak{K}'$. Ora, queste curve non sono possibili *in generale*, ritenuto cioè che la superficie F' e la conica $\mathfrak{K}'$ siano soggette alla sola condizione di toccarsi in O'. Infatti, in una superficie di 3.° ordine, i sistemi di coniche, i sistemi di cubiche con un punto dato, e i sistemi di curve di 4.° ordine con un dato punto doppio sono semplicemente infiniti: epperò non vi è alcuna di queste curve che passi per due punti dati ad arbitrio.

9. Analogamente, F non ha, in generale, alcuna retta oltre le quattro già notate come esistenti nel piano $x = 0$. Infatti, in causa della posizione arbitraria di O' su F' e di $\mathfrak{K}'$ rispetto ad F', questa superficie non ha rette passanti per O' od appoggiate a $\mathfrak{K}'$, nè ha coniche passanti per O' ed appoggiate a $\mathfrak{K}'$.

10. Ora, dalla nota rappresentazione piana di una superficie generale di 3.° ordine si può subito dedurre quella della superficie di 4.° ordine dotata dell'unico punto singolare O. Sia F'' il piano rappresentativo di F' e siano **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6** i sei punti fondamentali della rappresentazione, onde le imagini delle sezioni piane di F' saranno le curve di 3.° ordine passanti pei punti **1 2 3 4 5 6**. Supposto che in questa rappresentazione il punto **M**'' del piano F'' sia l'imagine del punto **M**' di F', e che nella trasformazione quadratica suesposta (§ 6) al punto **M**' di F' corrisponda il punto **M** di F, riguarderemo **M**'' come imagine di **M**, e così sarà rappresentata F punto per punto sul piano F''.

Poichè i punti **1 2 3 4 5 6** rappresentano sei rette di F' e poichè alle rette di F' corrispondono coniche di F, quei punti saranno ora imagini di altrettante coniche di F. Un'altra conica di questa superficie, e precisamente quella che è in un piano con $\mathfrak{K}$, avrà per imagine il punto O'' imagine di O'. Invece di O'' scriverò **0**. E la conica $\mathfrak{K}$ sarà rappresentata dalla cubica $\mathbf{0^2123456}$, poichè questa è l'imagine della sezione fatta in F' dal piano tangente in O'.

Le rette che uniscono due a due i sei punti **1 2 3 4 5 6** e le coniche che li uniscono cinque a cinque sono pure imagini di rette di F', epperò rappresenteranno coniche di F.

Le coniche di F' che passano per O' sono rappresentate dalle sei rette **01**, **02**, ..., dalle quindici coniche **01234**, **01235**, ..., e dalle sei cubiche $\mathbf{01^223456}$, $\mathbf{012^23456}$, ...; queste saranno adunque le imagini di altre ventisette coniche di F. Le coniche di F sono perciò rappresentate dai sette punti **0 1 2 3 4 5 6**; dalle ventuna rette che li uniscono due a due; dalle ventuna coniche che li uniscono cinque a cinque; e dalle sette cubiche che passano per tutti e sette i punti, avendo un nodo in uno di essi.

11. Al punto O corrisponde la sezione fatta in F' dal piano di $\mathfrak{K}'$, la qual sezione

contiene il punto O' e quattro punti di $\mathfrak{K}'$. L'imagine di questa sezione sarà dunque una cubica **123456** contenente il punto **0** e quattro punti, che dirò **7, 8, 9, 10**, imagini de' quattro punti di $\mathfrak{K}'$. E siccome ai punti di $\mathfrak{K}'$ corrispondono rette dello spazio Σ, così ne consegue che le quattro rette di F sono rappresentate, nel piano F'', da quattro punti **7. 8. 9. 10**, e che gli undici punti **0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10** sono tutti in una stessa cubica (di genere 1), imagine del punto singolare O.

12. Cerchiamo ora le imagini delle sezioni piane di F, alle quali corrispondono le intersezioni di F' colle superficie S' di 2.° grado toccate in O' dal piano $x' = 0$ e passanti per la conica $\mathfrak{K}'$. Queste intersezioni avranno un punto doppio in O' e passeranno per gli altri quattro punti comuni ad F' e $\mathfrak{K}'$; perciò le loro imagini in F'', vale a dire le imagini delle sezioni piane di F, sono curve di 6.° ordine

$$\mathbf{0^2.\ 1^2.\ 2^2.\ 3^2.\ 4^2.\ 5^2.\ 6^2.\ 7.\ 8.\ 9.\ 10}$$

aventi in comune sette punti doppî **0. 1. 2** ... e quattro punti semplici **7. 8. 9. 10** *).

13. Siccome ai piani per O corrispondono piani per O', così le imagini delle sezioni fatte in F con piani passanti pel punto singolare O sono le cubiche **0123456**. Ciascuna di queste cubiche è segata da tutte le altre in coppie di punti conjugati, che sono le imagini delle coppie di punti di F' allineati con O'. Se i due punti conjugati coincidono, si ha l'imagine di un punto in cui F è toccata da un piano passante per O. Il luogo de' punti analoghi è l'intersezione di F colla 1.ª polare di O, la quale si decompone nel piano $x = 0$ ed in una superficie di 2.° grado toccata in O da questo medesimo piano. A questa superficie corrisponde in Σ' una superficie, pure di 2.° grado, che tocca F' in O'; perciò l'imagine dell'intersezione è una curva di 6.° ordine $\mathbf{0^2 1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2}$, la quale, essendo il luogo de' punti doppî delle cubiche **0123456**, contiene eziandio le coppie di punti in cui le ventuna rette **01, 02, ..., 12, ..., 56** incontrano risp. le coniche **23456, 13456, ..., 03456 , ..., 01234.**

14. In generale, una qualunque delle superficie S di 2.° grado tangenti in O al piano $x = 0$, avendo per corrispondente in Σ' una superficie dello stesso grado tangente ad F' in O', interseca F secondo una curva di 8.° ordine (e al più di genere 3) dotata di un punto quadruplo in O, che ha per imagine una curva di 6.° ordine $\mathbf{0^2 1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2}$. Viceversa, tutte le curve di 6.° ordine di questo sistema (sei volte infinito) sono imagini di intersezioni di F con superficie S. È facile vedere che tra quelle curve di 8.° ordine ve ne sono infinite che si spezzano in due curve di 4.° ordine con punto doppio in O, e tra

*) Cfr. NOETHER, nelle *Nachrichten* di Gottinga, 7 giugno 1871. Il signor Noether è il primo, per quanto io sappia, che abbia fatto conoscere questa superficie F in tutta la sua generalità. Io ne aveva dato prima un caso particolare: *Nachrichten*, 3 maggio 1871 [Queste Opere, n. **93**].

queste ve ne sono, in numero finito, che constano di quattro coniche (incrociantisi in O).

Indichiamo con **a** uno qualunque de' sette punti **0 1 2 3 4 5 6**. Le rette per un punto **a** rappresentano curve di 4.° ordine con punto doppio in O; e curve affatto analoghe sono rappresentate dalle curve di 5.° ordine che passano semplicemente per quel punto **a** e doppiamente per gli altri sei. E siccome una di quelle rette ed una qualunque di queste curve di 5.° ordine costituiscono insieme una curva di 6.° ordine $\mathbf{0}^2\mathbf{1}^2\mathbf{2}^2\mathbf{3}^2\mathbf{4}^2\mathbf{5}^2\mathbf{6}^2$, così le due curve gobbe di 4.° ordine, di cui quelle sono le imagini, giacciono in una stessa superficie S di 2.° grado; e quel fascio di rette e quel fascio di curve di 5.° ordine rappresentano due serie di curve generatrici della superficie F, già da noi considerate altrove (§ 1, 4).

Ciascuno de' punti **a** dà così due serie conjugate di curve gobbe di 4.° ordine con punto doppio in O. Anche le coniche per quattro punti **a** e le curve di 4.° ordine passanti semplicemente per questi e doppiamente per gli altri tre rappresentano due analoghe serie conjugate di curve gobbe di 4.° ordine. E lo stesso deve dirsi di due fasci formati l'uno dalle cubiche passanti per cinque punti **a** ed aventi un nodo nel sesto, l'altro dalle cubiche passanti per quei medesimi cinque punti ed aventi un nodo nel settimo.

Per tal modo si ottengono:

$$7+\frac{7.6}{2}+\frac{7.6.5}{2.3}=63$$

coppie di serie conjugate di curve gobbe di 4.° ordine con punto doppio in O. E poichè (§ 4) due serie conjugate corrispondono ad una generazione della superficie mediante due fasci projettivi di superficie di 2.° grado (tutte toccantisi fra loro in O), così possiamo dire che F ammette questa generazione in 63 maniere differenti *).

15. Come già si è veduto (§ 5), una serie di curve gobbe di 4.° ordine ne contiene sei spezzantisi ciascuna in due coniche (poste in piani diversi); ciò che del resto è immediatamente confermato dalla rappresentazione piana F''. E siccome due curve gobbe appartenenti a serie conjugate sono in una stessa superficie S di 2.° grado, così vi sono superficie S di secondo grado che segano F secondo quattro coniche. E queste superficie sono pur conjugate due a due. Infatti, se quattro piani segano F secondo quattro coniche situate insieme in una superficie di 2.° grado, anche la rimanente intersezione, formata dalle altre quattro coniche poste in que' quattro piani, giacerà in una superficie di 2.° grado. Quale è il numero di coteste superficie S seganti F secondo quattro coniche?

---

*) Cfr. STEINER, *Eigenschaften der Curven vierten Grades rücksichtlich ihrer Doppeltangenten* — e HESSE, *Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung*, nel Giornale di CRELLE, tom. **49**.

Le coniche incontrate in un punto, oltre ad O, da una data conica sono (§ 7) in numero di 27: ossia una data conica fa parte di 27 diverse curve gobbe di 4.° ordine.

Per due coniche aventi, oltre ad O, un punto comune, passano cinque superficie S ciascuna delle quali contiene altre due coniche. Infatti: quelle due coniche, come componenti una curva gobba di 4.° ordine, appartengono ad una delle 2.63 serie (§ 14), e questa serie (§ 4) contiene altre 5 paja di coniche, i piani delle quali segheranno F secondo altre 5 paja che appartengono alla serie conjugata. E siccome due curve gobbe di 4.° ordine appartenenti a due serie conjugate sono sempre situate in una stessa superficie S di 2.° grado, così, prendendo ad arbitrio un pajo dal primo gruppo di paja ed un pajo dal secondo gruppo, si avranno quattro coniche situate in una stessa superficie di 2.° grado.

Da ciò segue che per una data conica di F passano $\frac{27.5}{3} = 45$ superficie S di 2.° grado ciascuna delle quali sega F secondo tre altre coniche. Il che si può anche dedurre dal notissimo teorema che la superficie generale F' ha 45 piani tritangenti: ai quali piani corrispondono superficie di 2.° grado passanti per $\mathfrak{K}$ e seganti F in altre tre coniche. Ora $\mathfrak{K}$ è una qualunque delle 56 coniche di F; dunque, ecc.

Il numero totale delle superficie S contenenti quattro coniche di F è adunque

$$\frac{56.45}{4} = 630,$$

conjugate due a due, chiamando, come già s'è detto, *conjugate* due superficie S le cui otto coniche giacciano, due a due, in quattro piani. Perciò possiamo concludere che si hanno 315 coppie di superficie S conjugate.

16. La superficie F contiene infinite curve gobbe d'ordine 6 e genere 3, le quali formano due sistemi triplamente infiniti. Quelle di un sistema sono rappresentate sul piano F'' (§ 10) dalle curve di 4.° ordine $\mathbf{0.\,1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9.\,10}$; quelle dell'altro dalle curve di 11.° ordine $\mathbf{1^4.\,2^4.\,3^4.\,4^4.\,5^4.\,6^4.\,7.\,8.\,9.\,10}$. Le une e le altre passano pel punto O. Due curve di diversi sistemi giacciono in una stessa superficie di 3.° ordine e si segano in altri dodici punti. Due curve di uno stesso sistema hanno invece soltanto cinque punti comuni, oltre ad O.

Ciascuno dei due sistemi contiene una rete di curve razionali, per le quali O è un punto triplo. Le imagini di esse deduconsi dalle imagini dianzi riferite, staccando da queste la cubica

$$\mathbf{0\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7\,.\,8\,.\,9\,.\,10}$$

che rappresenta il punto O: ossia supponendo che le superficie seganti di 3.° ordine, non solo passino per O, ma ivi tocchino il piano $x = 0$. Allora si hanno per imagini delle curve razionali di 6.° ordine, nell'un sistema le rette del piano F'', nell'altro le curve di 8.°

ordine $0^3 1^3 2^3 3^3 4^3 5^3 6^3$. Due curve razionali di uno stesso sistema si segano in un solo punto; due curve di sistemi differenti in otto punti, oltre ad O.

17. Mediante la trasformazione quadratica (§ 6) adoperata sinora si potrebbe continuare a dedurre proprietà della superficie F dalla nota teoria della superficie generale di 3.° ordine F'. Per ora io non addurrò che la costruzione geometrica della rappresentazione piana.

Per la superficie F', assunte in essa due rette α_1, α_2 che non si seghino, i punti di F' si possono projettare su di una superficie di 2.° grado S' che passi per α_1, mediante raggi appoggiati alle direttrici α_1, α_2. Con ciò i punti delle superficie F' ed S' sono messi in corrispondenza univoca.

Passiamo ora ad F; prendiamo in essa due coniche $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ non segantisi all'infuori di O, e sia $\mathfrak{K}$ una conica che incontri tanto $\mathfrak{C}_1$ quanto $\mathfrak{C}_2$ in un secondo punto, dopo O *). Sia poi P il piano di $\mathfrak{C}_1$. Per un punto qualunque **M** di F si può condurre una (ed una sola) conica $\mathfrak{H}$ la quale passi per O, ivi tocchi $x = 0$ ed altrove incontri ancora le tre coniche $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$. Infatti: la conica $\mathfrak{H}$ sarà l'ulteriore intersezione di due superficie di 2.° grado passanti per $\mathfrak{K}$ e per **M**, toccanti in O il piano $x = 0$ e condotte l'una per $\mathfrak{C}_1$, l'altra per $\mathfrak{C}_2$. La conica $\mathfrak{H}$ incontra il piano P in un unico punto $\mathbf{M}_1$, poichè già lo attraversa in O. Viceversa, assunto ad arbitrio un punto $\mathbf{M}_1$ in P, costruendo la conica (unica) $\mathfrak{H}$ che tocca $x = 0$ in O, passa per $\mathbf{M}_1$ e incontra $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, si otterrebbe univocamente il punto **M** nell'unica intersezione di $\mathfrak{H}$ con F (unica, perchè già quattro intersezioni sono riunite in O e altre tre cadono risp. in $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$).

Per tal modo sono riferite fra loro, punto per punto, mercè una projezione nella quale i raggi projettanti sono coniche, la superficie di 4.° ordine F e il piano P. Da questa rappresentazione piana di F si deduce poi, con note trasformazioni, la rappresentazione d'ordine minimo: quella cioè nella quale le imagini delle sezioni piane di F sono curve di 6.° ordine con 7 punti fondamentali doppî e 4 semplici.

Roma, giugno 1881.

*) Per esempio, siano $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ le coniche rappresentate in F'' dai punti **1**, **2**, e sia $\mathfrak{K}$ la conica avente per imagine la retta **12**.