107.

QUESTION 556. [111]

Nouvelle correspondance mathématique (Bruxelles), Tome sixième (1880), pp. 554-555.

Six points, $a_1, a_2, \ldots a_6$, sont donnés, arbitrairement, dans un plan. Démontrer qu' il existe un système linéaire, triplement infini, de courbes du sixième ordre, K, *douées des propriétés suivantes:*

1.° *Les points a sont des points doubles pour toutes les courbes* K;

2.° *Les tangentes aux courbes* K, *en un même point a, forment une involution;*

3.° *Chacune des quinze droites $a_1a_2, \ldots$, et chacune des six coniques $a_1a_2a_3a_4a_5, \ldots$, est rencontrée, par les courbes* K, *en couples de points en involution.*

En considérant les six points donnés comme étant les points fondamentaux de la représentation plane, point à point, d'une surface générale F_3, du troisième ordre, dont les vingt-sept droites r auront par conséquent leurs images dans les six points $a_1, a_2, \ldots$, les quinze droites $a_1a_2, a_1a_3, \ldots$ et les six coniques $a_1a_2a_3a_4a_5, \ldots$; toute courbe du sixième ordre, ayant six points doubles aux points donnés, sera l'image de l'intersection de F_3 avec une surface du second ordre. Cela *prémis*, le théorème proposé se transforme dans le suivant:

Il y a un système linéaire, triplement infini, de surfaces du second ordre, qui est rencontré par chacune des 27 *droites r de* F_3, *dans des couples de points conjugués en involution.*

Or, le système des surfaces polaires des points de l'espace, par rapport à F_3, jouit précisément d'une telle propriété. En effet, si

$$(A) = 0, \quad (B) = 0, \quad (C) = 0, \quad (D) = 0$$

sont les équations des polaires de quatre points arbitraires A, B, C, D, non situés dans un même plan; l'équation

$$\alpha(A) + \beta(B) + \gamma(C) + \delta(D) = 0 \tag{1}$$

représente la polaire d'un point quelconque de l'espace. Supposons que A et B soient deux points de la droite r de F_3, dont les équations soient $x = 0, y = 0$. Alors l'hypothèse $x = y = 0$ réduira l'équation (1) à la suivante:

$$\gamma\,(C) + \delta\,(D) = 0. \tag{2}$$

Ainsi, les intersections de r, par toutes les surfaces du système triplement infini (1), coïncident avec les intersections par les surfaces du faisceau (2); par conséquent, elles sont en involution.