106.

SULLE SUPERFICIE E LE CURVE CHE PASSANO PEI VERTICI D'INFINITI POLIEDRI FORMATI DA PIANI OSCULATORI DI UNA CUBICA GOBBA.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, volume XII (1879), pp. 347-352.

In una elegantissima Nota del Prof. EMILIO WEYR: *Ueber Involutionen höherer Grade* (Giornale di BORCHARDT, tomo 72) e a pag. 187 dell'importante lavoro del signor DARBOUX: *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces, etc.* (Paris, 1873) sono considerate certe curve piane d'ordine n, passanti per tutti i punti d'intersezione di $n+1$ tangenti d'una conica *).

Non so se sia stato osservato che tale considerazione è suscettibile d'essere estesa allo spazio e d'essere generalizzata anche ulteriormente.

1. Siano $t_1=0,\ t_2=0, \dots t_{n+1}=0$ le equazioni di $n+1$ rette tangenti di una conica data, allora l'equazione:

$$\sum \frac{k_i}{t_i}=0 \qquad (i=1,2,\dots n+1) \tag{1}$$

rappresenta, qualunque siano i parametri k, una curva d'ordine n passante per le $\frac{1}{2}n(n+1)$ scambievoli intersezioni di quelle $n+1$ rette.

Supposto $t_i=x_1+2\tau_i x_2+\tau_i^2 x_3$, dove x_1, x_2, x_3 sono coordinate trilineari e τ è il parametro che varia da una ad altra tangente della conica, siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ i valori del parametro τ per altre tre tangenti:

$$a_1=0, \qquad a_2=0, \qquad a_3=0.$$

*) Cfr. BELTRAMI nel Giornale di BATTAGLINI, anno 1871, e nella Memoria di CHELINI *Sopra alcuni punti notabili nella teoria elementare de' tetraedri e delle coniche.* (Accad. di Bologna, serie 3.ª, tomo V delle Memorie, 1874).

La condizione perchè la curva (1) passi pel punto $a_1 a_2$ è:

$$\sum \frac{k_i}{(\tau_i - \alpha_1)(\tau_i - \alpha_2)} = 0, \tag{2}$$

ed analogamente:

$$\sum \frac{k_i}{(\tau_i - \alpha_1)(\tau_i - \alpha_3)} = 0 \tag{3}$$

è la condizione del passaggio pel punto $a_1 a_3$. Se ora si sommano le (2), (3), moltiplicate rispettivamente per $\alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_3 - \alpha_1$, si ottiene:

$$\sum \frac{k_i}{(\tau_i - \alpha_2)(\tau_i - \alpha_3)} = 0 \tag{4}$$

che è la condizione onde la stessa curva (1) passi pel punto $a_2 a_3$. Dunque:

Se la curva (1) *passa per due vertici di un triangolo circoscritto alla conica data, passa anche pel terzo vertice.*

Nella curva (1) si possono così inscrivere infiniti *moltilateri completi* (di 3, 4, ... $n+1$ lati) circoscritti alla conica data. Se la curva (1) vuolsi far passare per tutti gli $\frac{1}{2} r(r-1)$ vertici d'un cosifatto r-latero, i coefficienti k dovranno soddisfare a sole $r-1$ condizioni lineari.

Al teorema si potrebbero dare altri enunciati, supponendo che le x siano funzioni (omogenee intere) di un dato grado nelle coordinate.

2. Un teorema analogo ha luogo nello spazio.

Siano $t_1 = 0, t_2 = 0, \ldots t_{n+2} = 0$ le equazioni di $n+2$ piani osculatori di una data cubica gobba. L'equazione:

$$\sum \frac{k_{rs}}{t_r t_s} = 0 \tag{5}$$

(dove r, s sono eguali a due numeri differenti della serie $1, 2, \ldots, n+2$) rappresenta, qualunque siano le costanti k, una superficie di ordine n passante per gli $\frac{(n+2)(n+1)n}{2 \, . \, 3}$ vertici del *poliedro completo* formato da quei piani.

Supposto $t = x_1 + 3\tau x_2 + 3\tau^2 x_3 + \tau^3 x_4$, dove le x sono coordinate quadriplanari e τ è il parametro variabile da uno ad altro piano osculatore della cubica, siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ i valori di τ per altri quattro piani osculatori della stessa curva gobba:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 0.$$

La condizione perchè la superficie (5) passi pel punto $a_1 a_2 a_3$ è:

$$\sum \frac{k_{rs}}{(\tau_r-\alpha_1)(\tau_r-\alpha_2)(\tau_r-\alpha_3)(\tau_s-\alpha_1)(\tau_s-\alpha_2)(\tau_s-\alpha_3)}=0$$

e due altre analoghe equazioni di condizione si avrebbero pel passaggio della superficie (5) pei punti $a_1a_2a_4$, $a_1a_3a_4$. Se ora si sommano le tre equazioni di condizione, ordinatamente moltiplicate per:

$$(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3),$$
$$(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_2),$$
$$(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4),$$

si ottiene la:

$$\sum \frac{k_{rs}}{(\tau_r-\alpha_2)(\tau_r-\alpha_3)(\tau_r-\alpha_4)(\tau_s-\alpha_2)(\tau_s-\alpha_3)(\tau_s-\alpha_4)}=0,$$

che è la condizione onde la superficie (5) passi pel punto $a_2a_3a_4$. Dunque:

Se la superficie (5) *passa per tre vertici di un tetraedro circoscritto alla data cubica gobba essa passa ancora pel quarto vertice.*

Uno qualunque dei piani osculatori della cubica gobba taglia la sviluppabile osculatrice di questa secondo una conica e la superficie (5) secondo una curva d'ordine n; ogni r-latero completo inscritto in questa curva e circoscritto alla conica è la sezione di un poliedro completo inscritto nella superficie (5) e formato da $r+1$ piani osculatori della cubica gobba.

3. Il teorema sussiste per un numero qualunque m di variabili, e la dimostrazione analitica del medesimo si fonda sulle notissime proprietà del determinante che esprime il prodotto di tutte le differenze di quantità date. Si ha così l'enunciato:

Se in uno spazio di m dimensioni si ha un sistema semplicemente infinito di piani:

$$t \equiv x_0+\tau x_1+\tau^2 x_2+\ldots+\tau^m x_m=0$$

di genere zero e classe m, e se la superficie d'ordine n:

$$\sum \frac{k_{r_1 r_2 \ldots r_{m-1}}}{t_{r_1} t_{r_2} \ldots t_{r_{m-1}}}=0$$

(dove $r_1, r_2, \ldots r_{m-1}$ sono $m-1$ numeri differenti della serie $1, 2, \ldots n+m-1$), la quale contiene tutti i vertici, in numero:

$$\frac{(n+m-1)(n+m-2)\ldots n}{1.2\ldots m},$$

del poliedro completo le cui facce sono gli $n+m-1$ piani:

$$t_1 = 0,\ t_2 = 0, \ldots t_{n+m-1} = 0$$

del sistema, passa inoltre per m vertici del poliedro formato da altri $m+1$ piani del medesimo sistema, essa passerà eziandio per l'$(m+1)$-esimo vertice.

4. Come il signor DARBOUX ha mostrato potersi individuare un punto qualunque di un piano mediante due tangenti di una conica fissa, così nello spazio a tre dimensioni un punto è individuato da tre piani osculatori di una data cubica gobba K. Rappresentata questa colle equazioni:

$$x : y : z : w = \omega^3 : 3\,\omega^2 : 3\,\omega : 1$$

e detti $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3$ i parametri de' piani osculatori concorrenti nel punto $x\,y\,z\,w$, il passaggio dalle coordinate ordinarie $x\,y\,z\,w$ alle nuove $\omega_1\,\omega_2\,\omega_3$ si effettuerà mediante le formole:

$$x : y : z : w = \omega_1\,\omega_2\,\omega_3 : \omega_2\,\omega_3 + \omega_3\,\omega_1 + \omega_1\,\omega_2 : \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 : 1$$

ossia le $\omega_1\,\omega_2\,\omega_3$ saranno le radici dell'equazione di 3.° grado:

$$w\,\omega^3 - z\,\omega^2 + y\,\omega - x = 0 \qquad [108]$$

Sull'uso di queste coordinate $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3$ si possono fondare considerazioni analoghe a quelle che il signor DARBOUX ha svolto per le curve piane.

Un'equazione $f(\omega_1\,\omega_2\,\omega_3) = 0$ rappresenta una superficie luogo del punto comune a tre piani osculatori di K, i cui parametri ω soddisfacciano l'equazione proposta. Detti n_1, n_2, n_3 i gradi dell'equazione separatamente in $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, l'ordine della superficie è $n_1 + n_2 + n_3$ [109], oppure $n_1 + n_2$ [110], oppure n_1 secondochè l'equazione è dissimmetrica rispetto alle tre ω, oppure rispetto a due di esse, oppure simmetrica rispetto a tutte e tre.

5. Ritenuto per ω il significato precedente, siano $\lambda_1\ \lambda_2$ due altri parametri arbitrari. L'equazione $f\,(\lambda_1\,\lambda_2\,\omega) = 0$, che supporremo essere del grado n nel parametro ω, si può considerare come rappresentante la superficie luogo de' punti di concorso di tutte le terne di piani osculatori di K soddisfacienti all'equazione medesima. L'equazione in $\omega_1\,\omega_2\,\omega_3$ della superficie si otterrà eliminando $\lambda_1\,\lambda_2$ fra le:

$$f(\lambda_1\,\lambda_2\,\omega_1) = 0, \qquad f(\lambda_1\,\lambda_2\,\omega_2) = 0, \qquad f(\lambda_1\,\lambda_2\,\omega_3) = 0.$$

Ad ogni coppia di valori di $\lambda_1\,\lambda_2$ corrispondono n valori di ω epperò $n\,(n-1)\,(n-2) : 6$ punti della superficie. Per ottenere l'ordine di questa, si cerchi in quanti punti essa sia incontrata dalla retta comune a due piani $\omega = a$, $\omega = b$, osculatori di K. Se le equazioni:

$$f(\lambda_1\,\lambda_2\,a) = 0, \qquad f(\lambda_1\,\lambda_2\,b) = 0,$$

risolute rispetto a $\lambda_1\,\lambda_2$, dànno N soluzioni *dipendenti* da a, b, per ciascuna di esse l'equazione $f(\lambda_1\,\lambda_2\,\omega) = 0$ darà $n-2$ valori di ω, oltre a, b. Dunque la coppia $a\,b$ fa parte di

$N(n-2)$ terne di piani, ossia la retta ab incontra la superficie in $N(n-2)$ punti.

6. Se $N=1$, la superficie è il luogo dei vertici di una serie (doppiamente infinita) di poliedri circoscritti a K, che corrispondono univocamente ai punti di un piano. Tre poliedri siffatti determinano la superficie. Ossia: *i vertici di tre poliedri completi, ciascuno dei quali sia formato da n piani osculatori d'una cubica gobba data, giacciono sempre in una superficie d'ordine $n-2$, che contiene i vertici d'infiniti (∞^2) altri poliedri analoghi.*

Questa proprietà combinata col teorema del n. 2 mostra che il passaggio di una superficie d'ordine $n-2$ pei vertici di tre n — edri circoscritti a K corrisponde ordinatamente ad

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}, \quad \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad n-2$$

condizioni: i quali tre numeri danno appunto la somma

$$\frac{(n-1)n(n+1)}{2.3}-1$$

che è il numero delle condizioni semplici che determinano una superficie d'ordine $n-2$. In altri termini: per individuare la superficie, la si farà passare dapprima per tutti i vertici del primo poliedro, poi pei vertici contenuti in una faccia del secondo, da ultimo pei vertici situati in uno spigolo del terzo.

7. Se N è qualunque ed $n=3$, l'equazione $f(\lambda_1 \lambda_2 \omega)=0$ ha la forma

$$A-3B\omega+3C\omega^2-D\omega^3=0,$$

dove A, B, C, D sono funzioni di $\lambda_1 \lambda_2$. Ad ogni coppia di valori di $\lambda_1 \lambda_2$ corrisponde una terna di piani osculatori di K concorrenti nel punto:

$$x:y:z:w=A:B:C:D,$$

il luogo del quale è conseguentemente una superficie rappresentabile, punto per punto, sul piano.

8. Data un'equazione $f(\lambda\omega)=0$ tra due soli parametri, essa può considerarsi come rappresentante una curva, l'ordine della quale è $m(n-1)(n-2):2$, se f è di grado m in λ e di grado n in ω: il che risulta dal cercare le intersezioni con un piano $\omega=a$.

Se $m=1$, si ha una curva d'ordine $(n-1)(n-2):2$, luogo dei vertici d'infiniti poliedri di n facce, corrispondenti ai punti d'una retta. Due poliedri siffatti determinano la curva. Ossia: i vertici di due poliedri completi, ciascuno de' quali sia formato da n piani osculatori di una data cubica gobba, sono situati in una curva gobba d'ordine $(n-1)(n-2):2$ che passa pei vertici d'infiniti altri poliedri analoghi.

Per m qualunque ed $n=3$ si hanno tre piani osculatori di K concorrenti in un punto che ha per luogo una curva razionale.