104.

UEBER DIE POLAR-HEXAEDER BEI DEN FLÄCHEN DRITTER ORDNUNG.

Mathematische Annalen, Band XIII (1878), pp. 301-304.
(Am 19. September 1877 der Naturforscherversammlung in München vorgelegt).

Wenn

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0, \tag{1}$$

so folgt aus der Identität:

$$\begin{aligned}&(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)\left[(x_1+x_2+x_3)^2 + (x_4+x_5+x_6)^2 - (x_1+x_2+x_3)(x_4+x_5+x_6)\right]\\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^3 + (x_4 + x_5 + x_6)^3\\ &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3\\ &\qquad + 3\,(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2) + 3\,(x_4 + x_5)(x_5 + x_6)(x_6 + x_4),\end{aligned}$$

dass man die Gleichung:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 = 0 \tag{2}$$

in jede der *zehn* Formen setzen kann:

$$(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2) + (x_4 + x_5)(x_5 + x_6)(x_6 + x_4) = 0, \tag{3}$$

. . . .

. . . . ,

welche den Combinationen (123) (456) etc. entsprechen.

Die Fläche dritter Ordnung also, welche durch die Gleichung (2) dargestellt ist, besitzt als dreifache Tangentenebenen folgende *fünfzehn:*

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 + x \ = 0, \ \ldots\ldots, \ x_5 + x_6 = 0.$$

Dieselben lassen sich zu *zehn* Paaren conjugirter Trieder gruppiren und schneiden sich in den *fünfzehn* Geraden:

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_3 + x_4 = 0, \quad x_5 + x_6 = 0,$$
$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_3 + x_5 = 0, \quad x_4 + x_6 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

von denen jedesmal drei in einer der fünfzehn Ebenen liegen.

Die sechs Ebenen

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0$$

bilden ein vollständiges *Hexaeder*, dessen paarweis gegenüberstehende *zwanzig* Ecken die Scheitel der soeben genannten zwanzig Trieder sind. Diese zwanzig Scheitel sind also zu vier und vier auf *fünfzehn* Geraden gelegen (den Kanten des Hexaeders), und durch jede dieser Geraden geht eine der dreifachen Tangentialebenen. Durch die nämlichen Kanten verlaufen noch fünfzehn weitere Ebenen:

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 - x_3 = 0, \; \ldots\ldots, \; x_5 - x_6 = 0,$$

welche zusammen mit den dreifachen Tangentenebenen, die von den Flächen des Hexaeders eingeschlossenen Winkel harmonisch theilen. Diese fünfzehn neuen Ebenen verlaufen zu drei und drei durch *zwanzig*, paarweise conjugirte, gerade Linien und schneiden sich überdies zu sechs und sechs in *fünfzehn* Punkten; diese zwanzig Geraden und diese fünfzehn Punkte sind den Ecken und den Kanten des Hexaeders einzeln zugeordnet *).

Das Hexaeder ist *polar*, das heisst, es gehört zur Classe der *Polsechsflache*, die Hr. REYE entdeckt und in einer Abhandlung: *Geometrischer Beweis des* SYLVESTER'*schen Satzes etc.* **) (Nr. 15), beschrieben hat. In der That, man weiss, dass von den Scheiteln zweier conjugirter Trieder jeder der Pol ist für einen Polarkegel, dessen Mittelpunkt der andere Scheitel ist. Aber unser Hexaeder besitzt überdies die Eigenschaft, dass man es unmittelbar construiren kann, wenn man von den 27 Geraden der Fläche dritter Ordnung solche fünfzehn kennt, welche nach Ablösung einer *Doppelsechs* übrig bleiben.

Nun bilden die 27 Geraden *sechsunddreissig* Doppelsechse. Daher existiren für eine allgemeine Fläche dritter Ordnung 36 Hexaeder, die dem von den Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\ldots$, $x_6 = 0$ gebildeten analog sind, und jedes Hexaeder gehört zu einer Doppelsechs.

*) Vgl. meine Abhandlung: *Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di* PASCAL (R. Accademia dei Lincei, Roma, 8 April 1877) [Queste Opere, n. 103].

**) Journal für die r. u. a. Mathematik, Bd. 78.

Das heisst, die 36 Doppelsechse geben die Lösung des folgenden Problems: *man will die Gleichung der allgemeinen Fläche dritter Ordnung unter der Bedingung* (1) *auf die Form* (2) *transformiren.*

Sind $P=0$, $Q=0$, $R=0$, $S=0$, $T=0$, $U=0$ die Ebenen zweier conjugirter Trieder, so dass also:

$$PQR+kSTU=0 \tag{4}$$

die Gleichung der Fläche ist, und will man das Polar-Hexaeder finden, dem die Scheitel der beiden Trieder angehören, so hat man einfach:

$$P'=pP,\quad Q'=qQ,\quad R'=rR,$$
$$S'=sS,\quad T'=tT,\quad U'=uU,$$

zu setzen und nun $p, q, \ldots$ in der Art zu bestimmen, dass identisch

$$P'+Q'+R'+S'+T'+U'=0 \tag{5}$$

ist, während die Gleichung der Fläche folgende wird:

$$P'Q'R'+S'T'U'=0.$$

Es sei zu dem Zwecke:

$$T=aP+bQ+cR+dS,$$
$$U=a'P+b'Q+c'R+d'S;$$

dann bestimmen sich die Coefficienten $p, q, \ldots$ durch die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} p+ta+ua'&=0,\\ q+tb+ub'&=0,\\ r+tc+uc'&=0,\\ s+td+ud'&=0,\\ kpqr+stu&=0. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Eliminirt man hier p, q, r, s, so erhält man eine cubische Gleichung in $\frac{t}{u}$, von deren Wurzeln jede eine Lösung des Problems liefert. Denn

$$\left\{\begin{aligned} &x_1=Q'+R'-P',\quad x_2=R'+P'-Q',\quad x_3=P'+Q'-R',\\ &x_4=T'+U'-S',\quad x_5=U'+S'-T',\quad x_6=S'+T'-U' \end{aligned}\right. \tag{7}$$

wird eins der gesuchten Hexaeder sein.

Ein Paar conjugirter Trieder gehört also zu *drei* verschiedenen Hexaedern. In der

That, zwei Doppelsechse haben entweder *sechs* oder *vier* gerade Linien gemein. Nennt man nun zwei Doppelsechse *associirt*, wenn sie *sechs* Gerade gemein haben, so ist jede Doppelsechs zu *zwanzig* Doppelsechsen associirt, die unter einander wieder paarweise associirt sind. Drei Doppelsechse, die paarweise associirt sind, enthalten zusammen 18 gerade Linien; die neun übrigen geraden Linien gehören einem Paar conjugirter Trieder an, und dieses findet sich also in drei Hexaedern, welche den drei associirten Doppelsechsen entsprechen. Man hat in dieser Weise 120 Tripel paarweise associirter Doppelsechse, welche zu den 120 Paaren conjugirter Trieder zugehören.

Die Formeln (7) zeigen, dass die Ebenen $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ den andern P, Q, R, S, T, U einzeln entsprechen und dass die Trieder $x_1 x_2 x_3$ und P Q R mit Bezug auf die Ebene $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ perspectivisch sind. Vermöge der Identität (5) oder (1) unterscheidet sich diese Ebene nicht von $x_4 + x_5 + x_6 = 0$; man hat also nur *zehn* solche Ebenen etc. Es folgt also, dass bei zwei associirten Hexaedern, vermöge der gemeinsamen conjugirten Trieder, die Seitenflächen paarweise zusammengeordnet sind. Und aus den Gleichungen (6) schliesst man, dass die drei Ebenen:

$$q_1 \mathrm{Q} + r_1 \mathrm{R} - p_1 \mathrm{P} = 0,$$

$$q_2 \mathrm{Q} + r_2 \mathrm{R} - p_2 \mathrm{P} = 0,$$

$$q_3 \mathrm{Q} + r_3 \mathrm{R} - p_3 \mathrm{P} = 0,$$

welche den drei Wurzeln der cubischen Gleichung für $t : u$ entsprechen, ein Büschel bilden: eine Bemerkung, die selbstverständlich ebenso für die anderen Tripel zusammengehöriger Seitenflächen der drei associirten Hexaeder gilt.

Unsere Hexaeder führen jetzt für die allgemeine Fläche dritter Ordnung, auf der die 27 Geraden bekannt sein sollen, zu einer Construction des SYLVESTER'*schen Pentaeders*. In der That, betrachten wir zwei Hexaeder, die zwei beliebigen Doppelsechsen entsprechen. Die Developpable dritter Classe, welche die sechs Ebenen des ersten Hexaeders zu Tangentenebenen hat, und die analoge Developpable, welche die Ebenen des anderen Hexaeders berührt, haben nach einem Theorem des Hrn. REYE *fünf* gemeinsame Tangentenebenen, und diese eben sind die Seitenflächen des SYLVESTER'schen Pentaeders. Man führt die Construction dieser Ebenen auf diejenige der fünf isolirten Schnittpunkte zweier ebener Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt zurück, von denen jede durch den Doppelpunkt der anderen hindurchläuft.