gine a questa Memoria di CREMONA, fu presentata all'Accademia dei Lincei, nella seduta della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali dell' 8 aprile 1877 dal Socio BATTAGLINI, il quale ne lesse un sunto, a nome dell'Autore, come è detto nel rendiconto della seduta stessa (Atti citati, Transunti, serie III, volume I (1876-77), pp. 142-143). Riportiamo qui la parte rimanente di quel rendiconto che si riferisce alla Memoria di CREMONA:

« Il Socio CREMONA prende allora la parola e, premesse alcune riflessioni per mettere in evidenza i pregi del lavoro testè presentato dal collega BATTAGLINI, aggiunge quanto segue:

Avendomi il sig. VERONESE pregato di leggere la sua Memoria, io feci pensiero di verificare i risultati in essa contenuti per una via diversa da quella che l'A. aveva seguita. Mentr'egli si è attenuto sempre alla geometria piana, io ebbi ricorso allo spazio a tre dimensioni e propriamente ad *una superficie di terzo ordine dotata di un punto doppio,* ed ottenni così delle figure che proiettate dal punto doppio somministrano immediatamente quelle del sig. VERONESE.

Per brevità di discorso, applicherò ai punti ed alle rette dello spazio le denominazioni che competono alle loro proiezioni. Oltre alle 6 rette situate sul cono tangente che ha il vertice nel punto doppio, la superficie cubica ha 15 rette situate a tre a tre in 15 piani tritangenti. Due piani tritangenti non aventi in comune una retta della superficie si segano lungo una *retta di Pascal;* le coppie analoghe di piani tritangenti sono 60 (che in proiezione dànno i 60 esagoni formabili con 6 punti di una conica), epperò si hanno 60 rette di Pascal. Esse costituiscono a tre a tre gli spigoli di 10 coppie di *triedri conjugati* (CREMONA, *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du 3.e ordre* (Berlin 1868) [Queste Opere, n. **79**], n.° 148.); dove i triedri di una coppia si intersecano fra loro lungo 9 rette della superficie. I vertici di questi triedri, conjugati a due a due, sono i 20 *punti di Steiner.*

C'è un'altra specie di triedri; se prendiamo una retta di Pascal, i due piani tritangenti che passano per essa contengono sei rette della superficie; le altre nove rette formano allora tre triangoli che sono le facce di un triedro della seconda specie. I triedri analoghi sono 60; i loro vertici sono i *punti di Kirkman*, coordinati per tal modo alle rette di Pascal. I due piani tritangenti la cui intersezione è una retta di Pascal e i tre piani tritangenti che concorrono nel corrispondente punto di Kirkman formano un *pentaedro,* i cui dieci vertici sono tutti punti di Kirkman e i cui dieci spigoli sono le corrispondenti rette di Pascal. I pentaedri analoghi sono *sei*, e dànno in proiezione le sei figure π del sig. VERONESE. Due pentaedri hanno sempre un piano comune, ma i vertici e gli spigoli sono tutti differenti.

Ogni retta di Pascal contiene un punto di Steiner; le otto rette di Pascal che sono in uno stesso piano tritangente concorrono a due a due in quattro punti di Steiner che sono in una retta (*retta di Steiner-Plücker*). Il numero delle rette analoghe è 15, una in ciascun piano tritangente. Pei detti quattro punti di Steiner passano altre quattro rette di Pascal e queste giacciono in uno stesso piano, che dirò *piano di Plücker*. Come le rette di Steiner-Plücker così anche i piani di Plücker sono coordinati ai piani tritangenti, epperò in numero di 15.

I 20 punti di Steiner e le 15 rette di Steiner-Plücker sono i vertici e gli spigoli di un esaedro completo, che può riguardarsi come il nocciolo di tutta la figura.

Considerando due pentaedri e tralasciando il piano ad essi comune, le altre facce formano due tetraedri prospettivi. Il centro di prospettiva è un *punto di Salmon;* il numero dei punti consimili è 15. Le facce omologhe si segano in quattro rette di Pascal situate in un piano di Plücker; e le rette congiungenti i vertici omologhi sono *rette di Cayley*. Le rette di Cayley sono 20 in numero, coordinate ai punti di Steiner; ciascuna di esse contiene tre punti di Kirkman, tre punti di Salmon e un punto di Steiner, e giace in tre piani di Plücker. Ogni punto di Salmon è vertice d'un angolo quadrispigolo completo, i cui 4 spigoli sono rette di Cayley e le cui 6 facce sono piani di Plücker. Così pure, ogni piano di Plücker contiene un quadrilatero completo i cui 4 lati sono rette di Cayley ed i cui 6 vertici sono punti di Salmon. Ecc. ecc.

Del resto, queste proprietà non sono esclusive alle 15 rette di una superficie di 3.° ordine dotata di punto doppio; esse appartengono ad ogni sistema di 15 rette distribuite a tre a tre in 15 piani, come accade per le 15 rette che si hanno dalle 27 di una superficie cubica generale tralasciando le 12 di un *Doppelsechs*.

Si può anche partire da un esaedro dato ad arbitrio. Allora rimane ancora arbitrario uno dei 15 piani tritangenti, da condursi però per uno degli spigoli dell'esaedro. Fissato questo piano, i restanti 14 e tutti gli altri elementi della figura riescono individuati. Un piano tritangente e un piano di Plücker passanti per uno stesso spigolo dell'esaedro sono separati armonicamente mediante le due facce dell'esaedro. Variando insieme, i piani tritangenti e i piani di Plücker producono altrettanti *fasci proiettivi;* le 15 rette della superficie generano degli iperboloidi aventi per direttrici tre spigoli dell'esaedro: i punti di Salmon descrivono delle cubiche gobbe; ecc. La superficie cubica varia in una serie tale, che per un punto qualunque dello spazio passano tre superficie.

Partendo dall'esaedro e dai sei pentaedri si può ottenere una catena indefinita di nuovi sistemi ciascuno di sei pentaedri, corrispondenti ai sistemi di punti Z e di rette z del sig. VERONESE. Nel secondo sistema e nel terzo, nel quarto e nel quinto, e così di seguito, i pentaedri sono formati cogli stessi piani, ma presi in ordine differente. Questi sistemi corrispondono semplicemente ai termini di una serie numerica i cui primi termini sono $1, 3, \frac{1}{3}$, nella quale ogni termine in posto pari dà col precedente la somma costante 4, e dà col susseguente il prodotto costante 1. »

[106] Pag. 436. Della sottoscrizione si fecero promotori CREMONA e BELTRAMI con un breve