

TEOREMI STEREOMETRICI DAI QUALI SI DEDUCONO LE PROPRIETÀ
DELL' ESAGRAMMO DI PASCAL. [105]

Atti della R. Accademia dei Lincei, Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali,
serie III, volume I (1876-77), pp. 854-874.

Un egregio giovane, sig. GIUSEPPE VERONESE, già allievo del Politecnico di Zurigo ed ora studente all'Università romana, mi pregò, tempo fa, di leggere un manoscritto nel quale egli aveva raccolto e dimostrato, per mezzo di semplici considerazioni di triangoli omologici, tutte le proprietà conosciute dell'esagrammo di PASCAL e molti altri teoremi di sua propria invenzione. La lettura di quella Memoria, che poi meritò d'essere inserita negli Atti della nostra Accademia, mi fu occasione a cercare una via per la quale si potesse ottenere ed abbracciare una così grande quantità di proposizioni. Credo averla trovata, poichè m'è riuscito di ridurre ogni cosa a poche proprietà intuitive del sistema di quindici rette nello spazio, situate tre a tre in quindici piani: dove si scopre un esaedro, che è quasi il nocciolo della figura. Nel presente lavoro, d'indole affatto elementare, sono contenuti i risultati delle mie ricerche su quest'argomento.

1. Sia $\mathfrak{F}$ una superficie di terz'ordine dotata di un punto doppio (conico) O . Oltre alle sei rette, che indicherò con 1, 2, 3, 4, 5, 6, concorrenti in O e situate in un cono quàdrico, la superficie $\mathfrak{F}$ ha altre quindici rette r , rispettivamente situate ne' quindici piani determinati dalle prime sei prese due a due. Chiaminsi 12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56 queste quindici rette r ; in modo che le rette 1, 2, 12 sono in uno stesso piano, ecc. *). Le quindici rette r sono poi situate tre a tre in altri

*) Secondo questa notazione, che è la consueta, una delle rette 1, 2, ... ed una delle rette 12, 13, ... s'incontrano se i loro simboli hanno un indice comune; invece due delle rette

quindici piani τ , che sono i piani tritangenti (propriamente detti) della superficie: quelli cioè pei quali nessun punto di contatto cade in O. I quindici piani tritangenti sono:

$$\begin{array}{lll} (12. 34. 56), & (12. 35. 46), & (12. 36. 45), \\ (13. 24. 56), & (13. 25. 46), & (13. 26. 45), \\ (14. 23. 56), & (14. 25. 36), & (14. 26. 35), \\ (15. 23. 46), & (15. 24. 36), & (15. 26. 34), \\ (16. 23. 45), & (16. 24. 35), & (16. 25. 34). \end{array}$$

Per ciascuna delle rette $r \equiv 12, 13, \dots$ passano tre de' quindici piani τ .

In altre parole: la superficie contiene quindici *triangoli* τ , i cui vertici sono tutti diversi da O. e ciascuna delle rette r è lato comune a tre triangoli τ .

2. Dirò che due triangoli τ formano una *coppia* τ quando non abbiano un lato comune; un triangolo entra in otto coppie, epperò il *numero delle coppie* è $\frac{15 \cdot 8}{2} = 60$. I piani de' due triangoli di una coppia si segano lungo una retta, che dirò *retta di Pascal* *), e che incontra la superficie in tre punti P, ne' quali i tre lati di un triangolo segano ordinatamente quelli dell'altro. Per es. la retta comune ai piani (12. 34. 56), (13. 25. 46), formanti una coppia, incontra la superficie ne' punti (12. 46), (34. 25), (56. 13).

Le sessanta coppie di triangoli τ danno così sessanta rette di Pascal.

3. Siccome ogni piano tritangente entra in otto coppie, così esso contiene otto rette di Pascal; vale a dire, le sessanta rette di Pascal sono distribuite, otto ad otto, ne' quindici piani tritangenti. Per ogni retta di Pascal passano due piani tritangenti.

4. In un punto P concorrono due rette r , per es. 12 e 46; perciò, oltre al piano (12. 46. 35) determinato da queste due rette, concorrono in P due altri piani tritangenti passanti per 12 (e sono 12. 34. 56, 12. 36. 45) e altri due passanti per 46 (e sono 13. 25. 46, 15. 23. 46). I due piani per 12 combinati coi due piani per 46 danno quattro coppie τ ; epperò in ogni punto P concorrono quattro rette di Pascal.

Il numero de' punti P è adunque $\frac{60 \cdot 3}{4} = 45$, com'è d'altronde evidente, perchè essi sono i vertici de' quindici triangoli ne' piani tritangenti. Una retta r , essendo situata in

12, 13, ... sono in uno stesso piano se i loro simboli non hanno alcun indice comune. Per questa notazione e per le proprietà qui richiamate del sistema delle rette e de' piani tritangenti d'una superficie di terz'ordine, veggasi per es. il mio *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre* (G. di BORCHARDT, t. 68) Berlin, 1868 [Queste Opere, n. 79].

*) Per la ragione che si vedrà appresso.

tre piani tritangenti, incontra sei altre rette r ; dunque *ciascuna delle quindici rette r contiene sei punti P* . È noto che questi sei punti sono accoppiati in involuzione.

5. Le tre coppie di rette r (per es. 12. 46, 34. 25, 13. 56) concorrenti nei tre punti P di una retta di Pascal (intersezione de' piani 12. 34. 56, 13. 25. 46 di una coppia) danno due triangoli τ i cui terzi lati (35, 16, 24) sono in un piano, ossia formano un nuovo triangolo τ . Si ha così un triedro formato da tre triangoli τ (12. 34. 56, 13. 25. 46, 16. 24. 35) i cui nove lati si distribuiscono in altri tre triangoli τ (12. 35. 46, 16. 25. 34, 13. 24. 56) costituenti un secondo triedro. Questi sono *due triedri coniugati* ben noti nella teoria delle superficie di terz'ordine *). Due facce qualsivogliano di un triedro formano una coppia τ ; perciò i sei spigoli de' due triedri sono altrettante rette di Pascal. I vertici de' due triedri coniugati — punti coniugati della Hessiana di $\mathfrak{F}$ **) — si diranno *punti di Steiner* (coniugati.)

Ogni coppia τ determina due triedri coniugati, ma ciascun triedro comprende tre coppie; perciò *il numero dei triedri è $\frac{60}{3} = 20$, coniugati due a due*. Gli spigoli de' venti triedri sono le sessanta rette di Pascal.

Ogni retta di Pascal è spigolo di un triedro, epperò contiene un punto di Steiner. Ogni triedro ha tre spigoli, dunque in un punto di Steiner concorrono tre rette di Pascal.

6. Assunti i tre piani τ che formano uno di questi triedri, gli altri dodici piani tritangenti sono distribuiti così: 1.º tre piani formanti il triedro coniugato; 2.º nove piani ciascuno de' quali contiene una delle nove rette r situate nel triedro proposto. Segue da ciò che le sei rette r non situate nel triedro proposto *non* costituiscono due triangoli τ .

Un piano che sia faccia di un triedro entra in due delle tre coppie τ appartenenti al triedro. Ora un piano è comune ad otto coppie; dunque ogni piano tritangente appartiene a quattro triedri differenti, epperò contiene quattro punti di Steiner. Due di questi quattro punti non possono mai essere coniugati, perchè due triedri coniugati non hanno alcun piano comune.

7. Ci sono altri triedri, che dirò di 2.^a specie. Infatti, prendasi una coppia τ ; i piani che la formano contengono sei rette r (per es. 12. 34. 56, 13. 25. 46); le altre nove rette r si possono combinare, *in una sola maniera*, in tre triangoli (14. 26. 35, 15. 24. 36, 16. 23. 45) formanti un nuovo triedro, i cui spigoli sono ancora rette di Pascal (distinte però da quella della coppia anzidetta) e il cui vertice chiamerò *punto di Kirkman*.

8. Assunta una coppia di piani tritangenti (per es. 14. 26. 35, 15. 24. 36), gli altri tredici piani τ si possono classificare così:

*) Loco citato, n. 148.

**) L. c., n. 151.

- 1.° il piano (16. 25. 34) che colla coppia forma un triedro di 1.^a specie;
- 2.° i tre piani (14. 25. 36, 15. 26. 34, 16. 24. 35) che formano il triedro di 1.^a specie conjugato al precedente;
- 3.° i sei piani (14. 23. 56, 26. 13. 45, 35. 12. 46, 15. 23. 46, 24. 13. 56, 36. 12. 45) che contengono una delle sei rette r della coppia;
- 4.° i tre piani (12. 34. 56, 13. 25. 46, 16. 23. 45), ciascun de' quali forma con uno della coppia proposta una nuova coppia τ . Uno qualunque di questi tre piani costituisce adunque, insieme colla coppia data, un triedro di 2.^a specie. Ogni coppia entra pertanto in tre triedri di 2.^a specie; e siccome, viceversa, ogni triedro contiene tre coppie, così il numero de' triedri di 2.^a specie è $\frac{60 \cdot 3}{3} = 60$.

Appartenendo una coppia qualunque τ a tre diversi triedri di 2.^a specie, ne segue che ogni retta di Pascal contiene tre punti di Kirkman; come in ogni punto di Kirkman, perchè vertice di un triedro, concorrono tre rette di Pascal.

9. I sessanta triedri di 2.^a specie, e quindi anche i sessanta punti di Kirkman corrispondono univocamente *) alle sessanta coppie τ , ossia alle sessanta rette di Pascal: in quanto che le quindici rette r si separano (in sessanta maniere differenti) in due gruppi, l'uno di nove rette situate ne' tre piani di un triedro di 2.^a specie; l'altro di sei giacenti ne' due piani della coppia τ corrispondente.

In più maniere si possono così assegnare cinque piani τ che contengono le quindici rette r della superficie $\mathfrak{F}$. Le quindici rette r costituiscono adunque l'intersezione completa di una superficie del terz'ordine con una del quinto; epperò, se nove di esse giacciono in un triedro, le altre sei saranno situate in una superficie di secondo grado. Ora, o questa superficie è un iperboloide gobbo, o è il sistema di due piani: il primo caso si verifica quando il triedro contenente le prime nove rette è di 1.^a specie; l'altro quando il triedro è di 2.^a specie.

Di qui emerge, che oltre ai venti triedri (conjugati a due a due) di 1.^a specie ed ai sessanta triedri di 2.^a specie, non esistono altri triedri seganti la superficie $\mathfrak{F}$ lungo nove rette 12, 13, ...

10. Ogni coppia di triedri conjugati di 1.^a specie dà un iperboloide che sega la superficie $\mathfrak{F}$ in sei rette (tre non segantisi appoggiate alle altre tre, pure non segantisi); il numero di questi iperboloidi è adunque dieci.

Questi dieci iperboloidi, indicati per mezzo delle rette che contengono, sono i seguenti:

*) *Eindeutig* ted.

(12. 13. 23) (45. 46. 56),
 (12. 14. 24) (35. 36. 56),
 (12. 15. 25) (34. 36. 46),
 (12. 16. 26) (34. 35. 45),
 (13. 14. 34) (25. 26. 56),
 (13. 15. 35) (24. 26. 46),
 (13. 16. 36) (24. 25. 45),
 (14. 15. 45) (23. 26. 36),
 (14. 16. 46) (23. 25. 35),
 (15. 16. 56) (23. 24. 34).

11. I tre piani di un triedro di 2.^a specie e i due piani della coppia corrispondente costituiscono un *pentaedro*, nel quale tre facce qualunque formano un triedro di 2.^a specie, che corrisponde alla coppia composta delle altre due facce; infatti, queste contengono sei rette, e le altre facce contengono le nove rette rimanenti. Dunque i dieci vertici del pentaedro sono altrettanti punti di Kirkman, e le corrispondenti rette di Pascal sono gli spigoli ordinatamente opposti del pentaedro medesimo.

Ciascun punto di Kirkman individua così un pentaedro: ma ogni pentaedro ha dieci vertici; dunque il numero dei pentaedri è $\frac{60}{10} = 6$.

Per tal modo i sessanta punti di Kirkman e le corrispondenti sessanta rette di Pascal si distribuiscono in sei gruppi, ciascuno formato da dieci punti e dalle corrispondenti dieci rette. I dieci punti e le corrispondenti dieci rette di un gruppo sono i vertici e gli spigoli (ordinatamente opposti) di un pentaedro, le cui facce sono piani tritangenti della superficie $\mathfrak{F}$.

12. Ciascuna faccia d'un pentaedro, combinata colle altre, dà quattro coppie τ ; ma ciascun piano tritangente entra in otto coppie: dunque queste otto coppie appartengono a due pentaedri. Ossia, due pentaedri hanno sempre un piano comune; ogni piano tritangente appartiene a due pentaedri.

13. Se ora si proiettano tutt'i punti e le rette ottenute, dal punto O su di un piano arbitrario, le rette 1, 2, 3, 4, 5, 6 danno sei punti di una conica; le sessanta coppie di triangoli danno i sessanta esagoni iscritti, che si possono formare con que' sei punti; e le sessanta rette di Pascal, i venti punti di Steiner, e i sessanta punti di Kirkman danno le rette e i punti ugualmente denominati nella teoria dell'*hexagrammum mysticum*. Dai sei pentaedri si ottengono le sei figure π del sig. VERONESE *). Ed analogamente, le rette e i punti che in seguito si verranno determinando e denominando danno in proiezione le rette e i punti ugualmente denominati nella teoria planimetrica dell'*hexagrammum*. In ciò risiede l'unica ragione delle denominazioni da me qui adottate per gli enti geometrici ottenuti nello spazio a tre dimensioni.

*) Teorema XI della Memoria del sig. VERONESE.

14. Indicherò i sei pentaedri coi numeri romani, I, II, III, IV, V, VI. Il piano I. II sarà il piano tritangente comune ai primi due pentaedri; ...; la retta (di Pascal) I (II. III) quello spigolo del primo pentaedro che è intersezione dei piani I. II, I. III; ...: il punto (di Kirkman) I (II. III. IV) quel vertice del primo pentaedro nel quale concorrono i piani I. IV, I. III, I. IV; ...

Due piani tritangenti formanti una coppia τ appartengono sempre ad uno stesso pentaedro; perciò i loro simboli hanno un indice comune. Così per es. i piani I. II ed I. III, i cui simboli hanno l'indice comune I, formano una coppia spettante al pentaedro I. Ma i piani I. II, III. IV non fanno coppia; essi si segheranno dunque lungo una delle rette 12, 13, ... della superficie $\mathfrak{F}$. Per la medesima retta passa anche il piano V. VI, giacchè ciascuno de' sei pentaedri contiene tutte e quindici le rette della superficie. Di qui risulta che i sei pentaedri conducono ad una notazione per i quindici piani tritangenti e le quindici rette r analoga a quella che le sei rette 1, 2, ... hanno dato risp. per le quindici rette r e pei quindici piani tritangenti.

15. Ogni retta di Pascal contiene un punto di Steiner, vertice di un triedro di 1.^a specie (5). Siccome le dieci rette di Pascal contenute in un pentaedro sono gli spigoli del medesimo, così esse s'incontrano esclusivamente ne' dieci vertici (punti di Kirkman); epperò le tre rette di Pascal concorrenti in un punto di Steiner appartengono a tre pentaedri diversi. Ossia: le tre coppie τ contenute in un triedro di 1.^a specie appartengono a tre differenti pentaedri. Due triedri conjugati di 1.^a specie contengono le stesse nove rette; quindi una coppia dell'uno ed una coppia dell'altro hanno necessariamente alcune rette comuni. Ne risulta che due rette di Pascal, spigoli di due triedri conjugati di 1.^a specie, non possono trovarsi in uno stesso pentaedro.

Per conseguenza, le sei rette di Pascal, spigoli di due triedri conjugati di 1.^a specie, appartengono a sei pentaedri diversi. Ossia: un punto di Steiner è comune a tre pentaedri; il suo conjugato è comune agli altri tre pentaedri.

I dieci spigoli di un pentaedro contengono adunque dieci punti di Steiner distinti, tra i quali non se ne possono mai trovare due fra loro conjugati.

16. Poichè i dieci spigoli di un pentaedro concorrono soltanto in (dieci) punti di Kirkman, due di quelli non possono avere un punto P comune (3); ossia, ciascun pentaedro contiene 10.3 punti P distinti. Le quattro rette di Pascal concorrenti in un punto P (4) appartengono dunque a quattro pentaedri diversi.

17. Ogni piano tritangente contiene quattro punti di Steiner ed è comune a due pentaedri; dunque due pentaedri hanno quattro punti di Steiner comuni. I quattro punti di Steiner conjugati ai predetti non possono trovarsi in alcuno de' due pentaedri (15); dunque i rimanenti sei punti di Steiner dell'un pentaedro sono conjugati ai rimanenti sei punti di Steiner dell'altro.

Secondo la notazione già stabilita pei pentaedri (14), il punto di Steiner comune per es. ai pentaedri I, II, III si potrà indicare col simbolo I. II. III; in esso concorrono i tre piani tritangenti II. III, III. I, I. II. E il simbolo del punto conjugato a quello sarà IV. V. VI. I due pentaedri I, II hanno in comune i punti di Steiner espressi dai simboli I. II. III, I. II. IV, I. II. V, I. II. VI, i cui conjugati sono IV. V. VI, III. V. VI, III. IV. VI, III. IV. V *).

Questa notazione pone in evidenza per es. che la coppia I. II, I. III dev'essere associata al piano II. III per dare un triedro di 1.^a specie; mentre unita a ciascuno de' piani I. IV, I. V, I. VI dà i tre triedri di 2.^a specie ne' quali entra la coppia proposta.

18. Considero i quattro punti di Steiner situati in uno de' quindici piani tritangenti, per es. nel piano I. II, dai quali punti si spiccano, fuori di esso piano, ordinatamente le quattro rette di Pascal: III (I. II), IV (I. II), V (I. II), VI (I. II). Due qualunque di queste quattro rette si incontrano: infatti i piani I. III, II. IV si segano (14) lungo una retta di $\mathfrak{S}$ posta nel piano V. VI; così pure i piani II. III, I. IV hanno comune un'altra retta di $\mathfrak{S}$ giacente nello stesso piano V. VI; dunque i quattro piani I. III e II. III, I. IV e II. IV — de' quali i primi due si segano secondo la retta di Pascal III (I. II), e gli altri due secondo la retta di Pascal IV (I. II) — hanno un punto comune: il quale è un punto P (3), perchè comune a due rette della superficie $\mathfrak{S}$ situate nel piano tritangente V. VI.

Poichè le quattro rette di Pascal soprannominate s'incontrano due a due, esse giacciono in uno stesso piano, che dirò *piano di Plücker* e indicherò col simbolo I. II. I quattro punti di Steiner da cui si spiccano le medesime rette di Pascal si trovano così nel piano tritangente I. II come nel nuovo piano di Plücker I. II. Dunque i quattro punti di Steiner situati in uno stesso piano tritangente, ossia comuni a due pentaedri, sono situati in una linea retta. La chiamerò *retta di Steiner-Plücker* o più brevemente *retta di Steiner* e la indicherò collo stesso simbolo (formato di due cifre romane) che già esprime il piano tritangente e il piano di Plücker ne' quali essa giace.

19. Per tal modo ai quindici piani tritangenti corrispondono ordinatamente quindici nuovi piani (di Plücker), che contengono, ciascuno, quattro rette di Pascal; e corrispondono pure quindici rette (di Steiner) ciascuna delle quali contiene quattro punti di Steiner. La retta di Steiner I. II (ossia la retta comune al piano tritangente I. II ed al corrispondente piano I. II di Plücker) contiene i quattro punti di Steiner: I. II. III, I. II. IV, I. II. V, I. II. VI. Viceversa, nel punto di Steiner I. II. III concorrono

*) Se nel simbolo di due punti conjugati di Steiner si sostituiscono alle cifre romane le arabiche, si ha una espressione che può convenire al corrispondente iperboloide (10). Infatti colla scrittura (123) (456) è chiaramente designato l'iperboloide (12. 13. 23) (45. 46. 56), ecc.

e tre rette di Steiner II. III, III. I, I. II, vale a dire: per ogni punto di Steiner passano tre rette di Steiner.

20. Abbiamo veduto che un piano di Plücker contiene quattro rette di Pascal, che due a due si segano in sei punti P. Per ogni punto P passano due piani di Plücker; per es. il punto P intersezione della retta comune ai piani I. III, II. IV, V. VI colla retta comune ai piani I. IV, II. III, V. VI giace così nel piano di Plücker I. II come nel piano analogo III. IV. In un punto P concorrono quattro rette di Pascal (4); de' sei piani ch'esse determinano, quattro sono tritangenti e gli altri due sono piani di Plücker.

21. Due rette di Steiner s'incontrano in un punto di Steiner se i loro simboli hanno un indice comune; per es. le rette di Steiner I. II, I. III concorrono nel punto di Steiner I. II. III. Segue da ciò che le cinque rette di Steiner I. II, I. III, I. IV, I. V, I. VI si segano due a due, epperò giacciono in uno stesso piano, che dirò I, formando un cinquilatero completo i cui dieci vertici sono altrettanti punti di Steiner. Dunque i venti punti di Steiner giacciono dieci a dieci e le quindici rette di Steiner giacciono cinque a cinque in sei piani. Altrimenti: *i venti punti di Steiner sono i vertici (opposti o coniugati due a due) e le quindici rette di Steiner sono gli spigoli di un esaedro completo*. S'indichino le facce di quest'esaedro coi simboli I, II, III, IV, V, VI; esse corrispondono ai sei pentaedri, in quanto che per es. la faccia I contiene le rette di Steiner situate nelle facce del pentaedro I; ecc.

22. Considero nel pentaedro IV il vertice (punto di Kirkman) nel quale concorrono i tre piani I. IV, II. IV, III. IV, facce d'un triedro di 2.^a specie. Questo triedro è prospettivo a quello formato dai piani I. V, II. V, III. V, giacchè i loro spigoli s'incontrano in tre punti P: infatti, per es. le rette di Pascal IV (I. II) e V (I. II) giacciono insieme nel piano di Plücker I. II (18). I tre punti P così ottenuti sono dunque i vertici di un triangolo inscritto nel primo triedro e avente per lati le rette di Pascal I (IV. V), II (IV. V), III (IV. V), le quali giacciono tutte nel piano di Plücker IV. V. Analogamente, segnando il primo triedro coi piani I. VI, II. VI, III. VI, si ottiene un secondo triangolo inscritto, avente per lati le rette di Pascal I (IV. VI), II (IV. VI), III (IV. VI), epperò situato nel piano di Plücker IV. VI. E poichè i due triangoli sono prospettivi, i loro lati corrispondenti concorreranno in tre punti di una linea retta, la quale è l'intersezione dei piani di Plücker IV. V, IV. VI (piani de' due triangoli) epperò passa pel punto di Steiner IV. V. VI, giacchè questo è situato in entrambi quei piani. Sono dunque in linea retta i punti ne' quali le rette di Pascal della prima terna incontrano quelle della seconda, vale a dire i punti dati dalle tre terne di piani I (IV. V. VI), II (IV. V. VI), III (IV. V. VI), i quali (14) sono tre punti di Kirkman, risp. appartenenti ai pentaedri I, II, III e corrispondenti alle rette di Pascal I (II. III), II (III. I), III (I. II) che concorrono nel punto di Steiner I. II. III. Ossia: *alle tre rette di Pascal che concorrono in un*

punto di Steiner corrispondono tre punti di Kirkman allineati in una retta, che passa pel punto di Steiner conjugato a quello. A questa si darà il nome di *retta di Cayley-Salmon* o più brevemente *retta di Cayley*. Una retta di Cayley ed un punto di Steiner si diranno *corrispondenti* e s'indicheranno collo stesso simbolo — per es. I. II. III — quando quella contenga i punti di Kirkman corrispondenti alle rette di Pascal che concorrono in questo. Una retta di Cayley passa dunque pel punto di Steiner conjugato a quello che corrisponde alla retta. Le rette di Cayley sono venti, conjugate due a due, come i punti di Steiner.

Una retta di Cayley si dirà appartenente a quei pentaedri a cui appartiene il corrispondente punto di Steiner.

23. Dal ragionamento che precede emerge inoltre che, se un punto di Steiner appartiene a tre pentaedri, la retta di Cayley che passa per esso contiene tre punti di Kirkman che appartengono risp. agli altri tre pentaedri.

24 Abbiamo veduto che la retta di Cayley I. II. III passa pel punto di Steiner IV. V. VI e giace nei piani di Plücker IV. V e IV. VI; scambiando fra loro i simboli IV e V nel ragionamento del n.º 22, si proverebbe ch'essa giace anche nel piano di Plücker V. VI. E come il piano di Plücker V. VI contiene la retta di Cayley I. II. III, così esso medesimo conterrà le rette analoghe I. II. IV, I. III. IV, II. III. IV. Dunque:

Le venti rette di Cayley giacciono quattro a quattro nei quindici piani di Plücker; e per ciascuna di quelle rette passano tre di questi piani.

25. Considerando due pentaedri I, II, i loro piani non comuni

I. III, I. IV, I. V, I. VI

II. III, II. IV, II. V, II. VI

formano due tetraedri prospettivi: infatti le loro facce corrispondenti si segano nelle rette di Pascal

III (I. II), IV (I. II), V (I. II), VI (I. II)

che sono situate nel piano di Plücker I. II. Dunque le coppie di vertici corrispondenti sono allineate con uno stesso punto. Ma la retta che unisce i due vertici (punti di Kirkman)

I (IV. V. VI), II (IV. V. VI)

passa anche pel punto di Kirkman III (IV. V. VI) (vertice del pentaedro III) e pel punto di Steiner IV. V. VI, ed è la retta di Cayley I. II. III (22); ed analogamente le altre tre congiungenti sono le rette di Cayley I. II. IV, I. II. V, I. II. VI; e queste quattro rette di Cayley passano pei quattro punti di Steiner IV. V. VI, III. V. VI, III. IV. VI, III. IV. V conjugati a quelli allineati nella retta di Steiner I. II. Dunque,

come i quattro punti di Steiner comuni a due pentaedri sono in linea retta (retta di Steiner), così:

Le quattro rette di Cayley comuni a due pentaedri concorrono in uno stesso punto.

A questo darò il nome di *punto di Salmon* e lo indicherò col simbolo I. II, se le quattro rette in esso concorrenti sono comuni ai pentaedri I, II.

26. Il punto di Salmon I. II è adunque il centro di prospettiva comune a tre tetraedri: due formati dai piani tritangenti

$$\begin{array}{c} \text{I. III, I. IV, I. V, I. VI} \\ \text{II. III, II. IV, II. V, II. VI} \end{array}$$

non comuni ai pentaedri I, II; il terzo avente i vertici nei punti di Steiner conjugati ai quattro allineati nella retta di Steiner I. II, cioè formato dai piani III, IV, V, VI dell'esaedro (21) i cui vertici sono i venti punti di Steiner. Il primo tetraedro e il terzo hanno le loro facce corrispondenti che si segano nelle rette di Steiner I. III, I. IV, I. V, I. VI, epperò il loro piano d'omologia è la faccia I dell'esaedro. Similmente, la faccia II dell'esaedro è il piano d'omologia del secondo e del terzo tetraedro. Quanto ai tetraedri primo e secondo, abbiamo già veduto che il loro piano d'omologia è il piano I. II di Plücker.

27. Siccome la retta di Cayley I. II. III, che congiunge due vertici de' pentaedri I, II, va a passare anche per un vertice del pentaedro III, così essa conterrà tre centri di prospettiva, vale a dire i tre punti di Salmon I. II, I. III, II. III. *I punti di Salmon sono adunque quindici, allineati tre a tre nelle venti rette di Cayley.*

28. Come s'è già veduto, le venti rette di Cayley sono conjugate due a due; se quattro di esse

$$\text{I. II. III, I. II. IV, I. II. V, I. II. VI}$$

concorrono in un punto I. II di Salmon, passando risp. per quattro punti di Steiner

$$\text{IV. V. VI, III. V. VI, III. IV. VI, III. IV. V}$$

vertici di un tetraedro, le quattro conjugate sono nel piano I. II di Plücker (24) e passano risp. pei quattro punti di Steiner conjugati ai predetti ed allineati nella retta I. II di Steiner.

29. Il piano I. II di Plücker contiene adunque un quadrilatero i cui lati sono le quattro rette di Cayley IV. V. VI, III. V. VI, III. IV. VI, III. IV. V (le cui conjugate concorrono nel punto I. II di Salmon) ed i cui vertici sono i punti di Salmon III. IV, III. V, III. VI, IV. V, IV. VI, V. VI, pei quali passano ordinatamente altre coppie di rette di Cayley. Per es. pel punto di Salmon III. IV, comune alle rette di Cayley III. IV. V, III. IV. VI, passano anche le rette analoghe III. IV. I e III. IV. II; ecc. Queste nuove dodici rette di Cayley sono conjugate due a due; per es. sono conju-

gate III. IV. I e V. VI. II; III. IV. II e V. VI. I; ecc. Vale a dire, due rette conjugate passano per due vertici opposti del quadrilatero.

E come il piano I. II di Plücker contiene i sei punti di Salmon dianzi nominati, così pel punto I. II di Salmon passano i sei piani di Plücker III. IV, III. V, III. VI, IV. V, IV. VI, V. VI. Dunque:

I quindici piani di Plücker passano tre a tre per le venti rette di Cayley, a sei a sei per i quindici punti di Salmon.

30. I piani di Plücker sono coordinati ai punti di Salmon; un piano di Plücker per es. I. II, contiene i sei punti di Salmon che sono coordinati ai sei piani di Plücker passanti pel punto I. II di Salmon coordinato al primo piano. E la retta di Cayley che contiene tre punti di Salmon è conjugata a quella per la quale passano i tre corrispondenti piani di Plücker.

31. In un punto di Salmon, per es. I. II, convengono sei piani di Plücker, le cui rette di Steiner sono i sei spigoli del tetraedro formato dalle facce III, IV, V, VI dell'esaedro. I piani di Plücker (passanti pel punto I. II di Salmon) sono adunque i piani proiettanti degli spigoli dei tetraedri prospettivi sopra nominati (26).

32. Siccome ai quattro punti di Steiner allineati in una retta (di Steiner), per es. I. II, corrispondono (25) quattro rette di Cayley concorrenti in un punto (di Salmon, I. II), così ai dieci punti di Steiner posti in un piano — per es. nella faccia I dell'esaedro (21) — corrispondono dieci rette di Cayley che congiungono due a due i cinque punti di Salmon — I. II, I. III, I. IV, I. V, I. VI — corrispondenti ai cinque piani di Plücker le cui rette di Steiner giacciono nel piano I dell'esaedro. Vale a dire: *ai dieci punti di Steiner posti in una faccia dell'esaedro corrispondono, come rette di Cayley, gli spigoli d'un pentagono (gobbo completo) i cui cinque vertici sono punti di Salmon e le cui dieci facce sono piani di Plücker.*

E si vede pur facilmente che *gli altri dieci punti di Salmon, le altre dieci rette di Cayley (conjugate alle precedenti) e gli altri cinque piani di Plücker sono i vertici, gli spigoli e le facce d'un pentaedro*; che in un certo senso è correlativo del pentagono. I vertici del pentaedro sono ordinatamente situati negli spigoli del pentagono, e le facce di questo passano per gli spigoli di quello.

Ciascuna faccia dell'esaedro dà origine ad un pentagono e ad un pentaedro come quelli ora considerati.

33. Il piano tritangente I. II contiene tre rette della superficie $\mathfrak{F}$, le quali sono ordinatamente date (14) dalle coppie di piani tritangenti

III. IV, V. VI
III. V, IV. VI
III. VI, IV. V.

Queste tre rette formano un triangolo, pei cui vertici P, P', P'' passano adunque, rispettivamente, i piani

P	III. V,	III. VI,	IV. V,	IV. VI
P'	III. VI,	III. IV,	IV. V,	V. VI
P''	III. IV,	III. V,	IV. VI,	V. VI

epperò le rette di Pascal

P	III (V. VI),	IV (V. VI),	V (III. IV),	VI (III. IV)
P'	III (IV. VI),	IV (III. V),	V (IV. VI),	VI (III. V)
P''	III (IV. V),	IV (III. VI),	V (III. VI),	VI (IV. V).

Queste dodici rette (che sono le corrispondenti de' dodici punti di Kirkman posti nel piano I. II di Plücker), prese tre a tre secondo le linee verticali, passano pei quattro punti di Steiner

$$IV. V. VI, \quad III. V. VI, \quad III. IV. VI, \quad III. IV. V$$

e pei quattro punti di Kirkman

$$III (IV. V. VI), \quad IV (III. V. VI), \quad V (III. IV. VI), \quad VI (III. IV. V)$$

appartenenti ordinatamente ai pentaedri III, IV, V, VI e corrispondenti alle quattro rette di Pascal che giacciono nel piano I. II di Plücker. I quattro punti di Steiner ed i quattro punti di Kirkman sono allineati ordinatamente sulle quattro rette di Cayley che concorrono nel punto I. II di Salmon. Dunque, queste quattro rette contengono i vertici di quattro tetraedri prospettivi, vale a dire: i due del n.º 25, formati dai piani non comuni de' pentaedri I, II; il terzo coi vertici ne' punti di Steiner conjugati ai quattro allineati nella retta I. II di Steiner; ed il quarto i cui vertici sono punti di Kirkman appartenenti ordinatamente ai quattro pentaedri III, IV, V, VI. Considerando il terzo tetraedro e il quarto, vediamo che, delle sedici rette congiungenti i vertici dell'uno con quelli dell'altro, quattro sono rette di Cayley concorrenti nel punto I. II di Salmon, mentre le altre dodici sono rette di Pascal concorrenti quattro a quattro nei vertici P P' P'' del triangolo I. II *). Dunque:

Il tetraedro che ha i vertici ne' punti di Steiner conjugati a quelli allineati nella retta I. II di Steiner ed il tetraedro i cui vertici sono i punti di Kirkman corrispondenti alle quattro rette di Pascal contenute nel piano I. II di Plücker, sono prospettivi rispetto a quattro di-

*) Chiamo triangolo I. II quello formato dalle tre rette comuni alla superficie $\mathfrak{F}$ ed al piano I. II.

versi centri di proiezione: i quali sono il punto I. II. di Salmon ed i vertici del triangolo I. II.

34. I sei piani di Plücker passanti pel punto I. II di Salmon formano le tre coppie

III. IV e V. VI

III. V e IV. VI

III. VI e IV. V

di facce opposte del quadrispigolo completo costituito dalle quattro rette di Cayley concorrenti nel detto punto.

Prendiamo il primo di que' sei piani. Esso contiene la retta di Cayley I. II. V nella quale giacciono il punto di Steiner III. IV. VI e il punto di Kirkman VI (III. IV. V), e contiene ancora la retta di Cayley I. II. VI che passa pel punto III. IV. V di Steiner e pel punto V (III. IV. VI) di Kirkman. Unendo il primo punto di Steiner col secondo di Kirkman, ed il secondo di Steiner col primo di Kirkman, le congiungenti concorreranno (33) in un vertice del triangolo I. II. E per questo stesso punto passeranno le rette analogamente ottenute nel piano di Plücker V. VI, opposto a quello ora considerato. Dunque:

Le rette diagonali del quadrispigolo completo formato dalle rette di Cayley che concorrono nel punto I. II di Salmon passano pei vertici del triangolo I. II.

35. Si scorge così che l'intersezione di due piani di Plücker o contiene un punto di Salmon, o ne contiene tre. Nel primo caso (per es. i piani III. IV e V. VI) essa contiene anche un punto P; nel secondo (per es. i piani III. IV e III. V) essa è una retta di Cayley.

36. Un piano di Plücker, per es. I. II, contiene quattro rette di Cayley e sei punti di Salmon, conjugati due a due (vertici opposti del quadrilatero formato dalle rette di Cayley). Pel punto III. IV di Salmon passano — oltre le due giacenti nel piano che si considera — due rette di Cayley I. III. IV, II. III. IV, conjugate alle due II. V. VI, I. V. VI che passano pel punto di Salmon V. VI, a quello conjugato. Dunque le tracce dei piani di Plücker passanti pel punto I. II di Salmon, sul piano I. II di Plücker, passano ordinatamente pei punti di Salmon posti in questo piano (ed anche pei punti P vertici del quadrilatero formato dalle quattro rette di Pascal); ossia:

Le quattro rette di Cayley poste in un piano di Plücker e le quattro rette di Cayley concorrenti nel corrispondente punto di Salmon formano un quadrilatero ed un angolo quadrispigolo tali che le facce del secondo passano pei vertici del primo.

Questa proprietà è già contenuta nel n.º 32.

37. Il piano tritangente I. II è segato dalle altre quattro facce del pentaedro I in quattro rette di Pascal, per le quali passano risp. i piani di Plücker II. III, II. IV, II. V, II. VI formanti un tetraedro, i cui vertici sono i punti I. III, I. IV, I. V, I. VI di Salmon, situati nelle quattro rette di Cayley che concorrono nel punto I. II di Salmon. Così

pure lo stesso piano tritangente I. II è segato dalle altre quattro facce del pentaedro II in quattro rette di Pascal, per le quali passano i piani I. III, I. IV, I. V, I. VI di Plücker, costituenti un tetraedro, i vertici del quale sono i punti II. III, II. IV, II. V, II. VI di Salmon, allineati coi precedenti nelle quattro rette di Cayley che concorrono nel punto I. II di Salmon. Le facce omologhe dei due tetraedri nominati si segano nelle rette di Cayley IV. V. VI, III. V. VI, III. IV. VI, III. IV. V coniugate alle anzidette. Dunque il piano d'omologia de' due tetraedri è il piano I. II di Plücker.

38. In un piano di Plücker giacciono quattro rette di Pascal, quattro rette di Cayley, dodici punti di Kirkman e quattro punti di Steiner. Questi sedici punti sono le intersezioni delle prime quattro rette colle seconde; ma i quattro punti di Steiner sono in linea retta, dunque i *dodici punti di Kirkman situati in uno stesso piano di Plücker giacciono in una curva di terzo ordine.*

39. Considerando le tracce de' quindici piani tritangenti sul piano I. II di Plücker, otto di esse sono ridotte alle quattro rette di Pascal III (I. II), IV (I. II), V (I. II), VI (I. II) contenute in quel piano; una consiste nella retta I. II di Steiner; le altre sei congiungono due a due i dodici punti di Kirkman. Infatti i punti di Kirkman III (I. II. IV) e IV (I. II. III) giacciono entrambi nel piano III. IV; ecc.

Queste sei rette sono evidentemente le tracce de' sei piani tritangenti

III. IV e V. VI

III. V e IV. VI

III. VI e IV. V

che passano due a due per le rette comuni alla superficie $\mathfrak{F}$ ed al piano tritangente I. II. Le sei rette formano dunque tre coppie concorrenti ne' tre punti in cui la retta di Steiner I. II è tagliata dai lati del triangolo I. II.

40. Veniamo ora alle tracce dei piani di Plücker sopra un piano tritangente, per es. I. II. Uno di essi passa per la retta I. II di Steiner. Altri otto, vale a dire

I. III e II. III

I. IV e II. IV

I. V e II. V

I. VI e II. VI

formanti quattro coppie, danno le otto rette di Pascal situate nel piano tritangente e si segano, per coppie, nelle rette di Cayley IV. V. VI, III. V. VI, III. IV. VI, III. IV. V poste nel piano I. II di Plücker. I sei rimanenti sono quelli che concorrono nel punto I. II di Salmon, epperò le loro tracce sono i lati di un quadrangolo completo avente i punti

diagonali ne' vertici del triangolo I. II; giacchè questi vertici sono (34) le tracce delle rette diagonali del quadrispigo formato dalle quattro rette di Cayley concorrenti nel punto I. II di Salmon.

Di questi sei piani uno qualunque, per es. III. IV, contiene quattro rette di Pascal — I (III. IV), II (III. IV), V (III. IV), VI (III. IV) — e dodici punti di Kirkman, due de' quali — I (II. III. IV), II (I. III. IV) — sono anche nel piano tritangente I. II. Dunque le sei rette congiungenti i vertici corrispondenti de' due quadrilateri formati dalle rette di Pascal nel piano tritangente I. II — vale a dire le rette che uniscono i punti di Kirkman

$$\begin{aligned} & \text{I (II. III. IV) e II (I. III. IV),} \\ & \text{I (II. III. V) e II (I. III. V),} \\ & \text{I (II. III. VI) e II (I. III. VI),} \\ & \text{I (II. IV. V) e II (I. IV. V),} \\ & \text{I (II. IV. VI) e II (I. IV. VI),} \\ & \text{I (II. V. VI) e II (I. V. VI),} \end{aligned}$$

sono le tracce de' sei piani di Plücker che passano pel punto I. II di Salmon.

41. Nelle cose esposte sinora, l'ipotesi di una superficie $\mathfrak{F}$ di terz'ordine dotata di un punto conico O non è stata necessaria se non in quanto s'è voluto avere un centro di proiezione per dedurre dalle proposizioni stereometriche i teoremi planimetrici dell'*hexagrammum mysticum*. Che se si prescinde da tale proiezione, le proprietà dimostrate nella prima parte di questa Memoria presuppongono unicamente l'esistenza di un sistema di quindici rette situate tre a tre in quindici piani. I quindici piani si aggruppano in *sei pentaedri* i cui vertici e i cui spigoli ho chiamati *punti di Kirkman* e *rette di Pascal* *); e si aggruppano inoltre in *venti triedri conjugati* due a due, i cui vertici sono i *punti di Steiner*: punti situati quattro a quattro in quindici rette, dette *rette di Steiner*. Le rette ed i punti di Steiner sono spigoli e vertici di un *esaedro*, che costituisce in certo modo il nucleo dell'intera figura, ed alle cui sei facce sono coordinati i sei pentaedri. Le sessanta rette di Pascal, oltre ad essere gli spigoli de' sei pentaedri e de' venti triedri sono anche distribuite quattro a quattro in quindici piani, detti *piani di Plücker*, i quali passano tre a tre per le *venti rette di Cayley*, sei a sei per i *quindici punti di Salmon* e uno ad uno per le quindici rette di Steiner.

*) Ripeto che queste denominazioni sono adottate unicamente in vista del riferimento all'*hexagrammum mysticum*.

42. Questa figura si presenterà adunque ogniqualvolta si abbiano quindici rette situate tre a tre in quindici piani. Ora, un tal sistema di rette e di piani, che è unico nella superficie di terz'ordine *con punto doppio*, esiste invece trentasei volte nella superficie *generale* di terz'ordine. Infatti è un noto teorema di Schläfli *) che le ventisette rette di questa superficie dànno *trentasei bissestuple* **): dove per *bissestuple* intendo il sistema di due gruppi di sei rette

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{array}$$

tali che ciascuna di esse non incontra alcuna retta del suo gruppo e ne incontra cinque dell'altro gruppo. Togliendo dalle ventisette rette della superficie le dodici di una bissestuple, le quindici rimanenti costituiscono appunto un sistema della natura suindicata, cioè giacciono tre a tre in quindici piani. Gli altri trenta piani tritangenti sono quelli che contengono, ciascuno, due rette della bissestuple ed una delle quindici restanti.

A ciascuna delle trentasei bissestuple corrispondono adunque un esaedro ***) , sei pentaedri e dieci coppie di triedri conjugati, col corredo delle proprietà surricordate (41). Siccome però il numero totale delle coppie di triedri conjugati è *centoventi* †), così può già inferirsi che i triedri non possono essere totalmente diversi da una bissestuple ad un'altra. Infatti, si dimostrerà ora che ogni coppia di triedri conjugati è comune a tre bissestuple.

43. Siccome le quindici rette escluse da una bissestuple giacciono tre a tre in quindici piani, così da esse non è possibile cavare un'altra bissestuple: giacchè le rette di una bissestuple sono invece situate, due a due, in trenta piani, ciascuno de' quali contiene inoltre una retta estranea alla bissestuple. Da ciò si conclude che due bissestuple hanno almeno una retta comune.

*) *An attempt to determine the twenty-seven lines upon a surface of the third order etc.* (Quarterly Journal of Math. vol. II, 1858).

**) *Doppelsechs* ted., *double-six* ingl.

***) Questi esaedri, in numero finito, sono compresi tra quelli, in numero illimitato, ottenuti dal prof. REYE nel suo bel lavoro inserito nel tomo 78 del Giornale di BORCHARDT ed avente per titolo: *Geometrischer Beweis des Sylvesterschen Satzes* « *Jede quaternäre cubische Form ist darstellbar als Summe von fünf Cuben linearer Formen* » n.º 15. Ne segue una costruzione, forse finora non conosciuta, per passare dalle ventisette rette di una superficie generale di terz'ordine al suo *pentaedro* (l. c. n.º 98) di SYLVESTER: le due sviluppabili di quart'ordine risp. inscritte negli esaedri corrispondenti a due bissestuple hanno cinque piani tangenti comuni, i quali sono appunto le facce del pentaedro domandato

†) L. c. n.º 148.

Sia a_1 *) una retta comune a due bissestuple, e b_1 la sua coniugata nella prima bissestupla. Allora sono imaginabili due casi: o la retta coniugata ad a_1 nella seconda bissestupla incontra b_1 , o non la incontra; e sia essa a_2 nel primo caso, c_{23} nel secondo.

In entrambi i casi, la prima bissestupla è completata dalle cinque rette ($a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$) che incontrano b_1 senza tagliare a_1 , e dalle cinque ($b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$) che sono appoggiate ad a_1 senza incontrare b_1 .

Nel primo caso poi, la seconda bissestupla è completata dalle cinque rette ($b_1 c_{23} c_{24} c_{25} c_{26}$) che incontrano a_2 ma non a_1 , e dalle cinque ($b_2 c_{13} c_{14} c_{15} c_{16}$) che incontrano a_1 ma non a_2 . Fra le rette che segano b_1 ma non a_1 c'è anche a_2 ; e così fra le rette che incontrano a_2 senza appoggiarsi ad a_1 c'è b_1 ; e siccome fra le rette che incontrano a_1 senza incontrare b_1 c'è b_2 , che incontra a_1 ma non a_2 , così le due bissestuple hanno in comune quattro rette ($a_1 b_1 a_2 b_2$). Le rette che non appartengono nè all'una nè all'altra bissestupla sono in numero di $27 - (2 \cdot 12 - 4) = 7$ soltanto; perciò due bissestuple che abbiano quattro rette comuni non hanno in comune alcuna coppia di triedri coniugati.

Nel secondo caso, le tre rette ($b_4 b_5 b_6$) che incontrano a_1 senza appoggiarsi nè a c_{23} nè a b_1 , e le due ($a_2 a_3$) che si appoggiano a c_{23} ed a b_1 senza incontrare a_1 , appartengono alle due bissestuple, le quali hanno, per conseguenza, sei rette ($a_1 a_2 a_3 b_4 b_5 b_6$) in comune. Le due bissestuple risultano così formate

$$\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_1 & a_2 & a_3 & c_{56} & c_{64} & c_{45} \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & c_{23} & c_{31} & c_{12} & b_4 & b_5 & b_6 \end{array}$$

e le nove rette da esse escluse giacciono appunto in due triedri coniugati

$$\begin{array}{c} (c_{14} c_{25} c_{36}) \quad (c_{15} c_{26} c_{34}) \quad (c_{16} c_{24} c_{35}) \\ (c_{14} c_{26} c_{35}) \quad (c_{15} c_{24} c_{36}) \quad (c_{16} c_{25} c_{34}). \end{array}$$

Questa coppia di triedri è poi comune ad una terza bissestupla: infatti, le sei rette $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ della prima bissestupla non comuni alla seconda e le sei rette $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & c_{56} & c_{64} & c_{45} \\ c_{23} & c_{31} & c_{12} & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ della seconda non comuni alla prima costituiscono insieme una nuova bissestupla

$$\begin{array}{c} a_4 & a_5 & a_6 & c_{23} & c_{31} & c_{12} \\ c_{56} & c_{64} & c_{45} & b_1 & b_2 & b_3, \end{array}$$

*) Qui è adottata per le ventisette rette della superficie di terz'ordine la notazione consueta: l. c. n.º 114.

la quale, ha, per conseguenza, in comune colle prime due la coppia anzidetta di triedri conjugati.

Tre bissestuple le quali abbiano così in comune una coppia di triedri conjugati si diranno costituire una *terna*. Vi sono *centoventi terne* analoghe, corrispondenti alle centoventi coppie di triedri conjugati. Scelta una bissestupla, fra le altre ve ne sono quindici ciascuna delle quali ha colla prima quattro rette comuni; e venti ciascuna delle quali ha invece colla prima in comune sei rette. Queste venti bissestuple formano dieci coppie per modo che ciascuna coppia costituisce colla bissestupla data una terna. Una bissestupla qualunque entra dunque in dieci terne.

44. In luogo di partire dalla superficie di terz'ordine o dal gruppo delle quindici rette poste tre a tre in quindici piani, si può supporre arbitrariamente dato l'*esaedro* e dedurre quindi da esso tutti gli altri elementi della figura fin qui considerata.

Rappresentando i sei piani I, II, III, IV, V, VI (21), facce dell'*esaedro*, colle equazioni

$$\begin{aligned} \text{I} \dots x = 0, \text{ II} \dots y = 0, \text{ III} \dots z = 0, \text{ IV} \dots w = 0, \\ \text{V} \dots -(x + y + z + w) \equiv t = 0, \text{ VI} \dots ax + by + cz + dw \equiv u = 0, \end{aligned}$$

si trovano facilmente pei piani tritangenti le equazioni:

$$\begin{aligned} \text{I. II} \dots (\theta - a)x + (\theta - b)y &= 0 \\ \text{I. III} \dots (\theta - a)x + (\theta - c)z &= 0 \\ \text{I. IV} \dots (\theta - a)x + (\theta - d)w &= 0 \\ \text{I. V} \dots (\theta - a)x + \theta t &= 0 \\ \text{I. VI} \dots (\theta - a)x + u &= 0 \\ \text{II. III} \dots (\theta - b)y + (\theta - c)z &= 0 \\ \text{II. IV} \dots (\theta - b)y + (\theta - d)w &= 0 \\ \text{II. V} \dots (\theta - b)y + \theta t &= 0 \\ \text{II. VI} \dots (\theta - b)y + u &= 0 \\ \text{III. IV} \dots (\theta - c)z + (\theta - d)w &= 0 \\ \text{III. V} \dots (\theta - c)z + \theta t &= 0 \\ \text{III. VI} \dots (\theta - c)z + u &= 0 \\ \text{IV. V} \dots (\theta - d)w + \theta t &= 0 \\ \text{IV. VI} \dots (\theta - d)w + u &= 0 \\ \text{V. VI} \dots \theta t + u &= 0 \end{aligned}$$

dove θ è un parametro indeterminato.

Cambiando il segno $+$ in $-$ al secondo termine di ciascuna di queste equazioni binomie, si hanno le equazioni dei piani di Plücker corrispondenti agli stessi simboli.

Ne segue che *due facce qualsivogliano dell'esaedro sono separate armonicamente mediante il piano tritangente e il piano di Plücker passanti per la retta di Steiner che è intersezione di quelle due facce.*

Combinando due a due le equazioni dei piani di Plücker, si hanno le rette di Cayley; combinandole tre a tre, si hanno i punti di Salmon.

L'equazione della superficie di terz'ordine (toccata da quei piani tritangenti e in generale non dotata di punto doppio) può mettersi sotto diverse forme, per es. sotto la seguente

$$\begin{aligned} & ((\theta - b)y + (\theta - c)z)((\theta - c)z + (\theta - a)x)((\theta - a)x + (\theta - b)y) + \\ & ((\theta - d)w + \theta t)((\theta - d)w + u)(\theta t + u) = 0. \end{aligned}$$

Se, rispetto a questa superficie, si cerca la *prima polare* di uno de' vertici dell'esaedro, per es. del punto $x = y = z = 0$, si trova l'equazione

$$(\theta - d)^3 w^2 - \theta^3 t^2 + du^2 = 0,$$

che è soddisfatta da ciascuno de' seguenti quattro sistemi

$$\begin{aligned} & (\theta - d)w = \theta t = u, \\ & -(\theta - d)w = \theta t = u, \\ & (\theta - d)w = -\theta t = u, \\ & (\theta - d)w = \theta t = -u. \end{aligned}$$

Donde si trae che il cono polare del vertice $x = y = z = 0$ è conjugato al triedro formato dalle tre facce dell'esaedro concorrenti nel vertice opposto $w = t = u = 0$, e passa per la retta di Cayley e per le tre rette di Pascal che escono da questo punto. Le medesime quattro rette formano un quadrispigo completo le cui facce sono tre piani tritangenti e tre piani di Plücker, e le cui diagonali sono tre rette di Steiner.

45. La presenza del parametro θ fa vedere che l'esaedro non basta a determinare l'intera figura; si può ancora, per uno degli spigoli dell'esaedro (rette di Steiner) condurre ad arbitrio il piano tritangente o il piano di Plücker: con ciò tutto resta determinato. Facendo variare quel piano intorno allo spigolo prescelto, tutt'i piani tritangenti e i piani di Plücker si muovono simultaneamente generando altrettanti fasci proiettivi; e la superficie di terz'ordine genera una serie semplicemente infinita d'indice 3.

Si può invece assumere ad arbitrio una retta di $\mathfrak{S}$, conducendo una secante di tre spigoli dell'esaedro che due a due non s'incontrino, per es. degli spigoli I. II, III. IV, V. VI. Così restano individuati i piani tritangenti I. II, III. IV, V. VI. Il piano I. II sega ciascuno degli spigoli III. V, IV. VI, III. VI, IV. V in un punto; unendo il primo col se-

condo punto, ed il terzo col quarto si hanno due rette della superficie. Analogamente si costruiscono altre due rette nel piano III. IV ed altre due nel piano V. VI. Ed operando similmente su queste nuove rette come sulla prima, si ottengono tutte le quindici rette di $\mathfrak{F}$, ciascuna appoggiata su tre spigoli dell'esaedro. Una qualsivoglia delle quindici rette determina dunque tutte le altre, epperò l'intera figura.

Se poi si domandano le altre dodici rette della superficie, le quali costituiscono una bisestupla, indicate coi simboli $c_{12}, c_{13}, \dots, c_{56}$ le quindici già ottenute, si costruiscano le due trasversali a_1, b_1 comuni alle rette $c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}, *$). Indi si troverà a_2 costruendo la retta che giace nel piano $b_1 c_{12}$ ed incontra c_{23}, c_{24} ; si troverà b_2 costruendo la retta che giace nel piano $a_1 c_{12}$ ed incontra c_{23}, c_{24} ; ecc.

46. Posto per brevità

$$\begin{aligned} (\theta - a)x &= X, & (\theta - b)y &= Y, & (\theta - c)z &= Z, \\ (\theta - d)w &= W, & \theta t &= T, & u &= U, \end{aligned}$$

onde si ha identicamente (44)

$$X + Y + Z + W + T + U = 0,$$

le sei facce del dato esaedro saranno rappresentate dalle equazioni

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad W = 0, \quad T = 0, \quad U = 0.$$

Se ora si prendono a considerare i sei pentaedri

- 1.º) $X + kY = 0, \quad X + kZ = 0, \quad X + kW = 0, \quad X + kT = 0, \quad X + kU = 0,$
- 2.º) $Y + kX = 0, \quad Y + kZ = 0, \quad Y + kW = 0, \quad Y + kT = 0, \quad Y + kU = 0,$
- 3.º) $Z + kX = 0, \quad Z + kY = 0, \quad Z + kW = 0, \quad Z + kT = 0, \quad Z + kU = 0,$
- 4.º) $W + kX = 0, \quad W + kY = 0, \quad W + kZ = 0, \quad W + kT = 0, \quad W + kU = 0,$
- 5.º) $T + kX = 0, \quad T + kY = 0, \quad T + kZ = 0, \quad T + kW = 0, \quad T + kU = 0,$
- 6.º) $U + kX = 0, \quad U + kY = 0, \quad U + kZ = 0, \quad U + kW = 0, \quad U + kT = 0,$

formati da trenta piani che passano, due a due, per i quindici spigoli dell'esaedro (rette di Steiner), si riconosce facilmente che, qualunque sia il valore del parametro arbitrario k , essi hanno proprietà analoghe a quelle de' pentaedri del n.º 11, sebbene i nuovi pentaedri non abbiano in generale due a due una faccia comune. L'insieme de' loro spigoli e de' loro vertici è analogo al sistema delle sessanta rette di Pascal e de' sessanta punti di Kirkman.

47. Uno spigolo qualunque, come

*) Se le due trasversali coincidono, la superficie avrà un punto doppio.

$$X + k Y = 0, \quad X + k Z = 0,$$

passa per un punto di Steiner (vertice dell'esaedro)

$$X = Y = Z = 0,$$

e viceversa, per uno qualunque

$$X = Y = Z = 0$$

de' punti di Steiner passano tre spigoli

$$X + k Y = 0, \quad X + k Z = 0,$$

$$Y + k X = 0, \quad Y + k Z = 0,$$

$$Z + k X = 0, \quad Z + k Y = 0,$$

che appartengono a tre diversi pentaedri — 1°, 2°, 3° — e determinano un triedro le cui facce sono

$$(k-1) X + Y + Z = 0,$$

$$(k-1) Y + Z + X = 0,$$

$$(k-1) Z + X + Y = 0.$$

Per i detti spigoli passano risp. i tre piani di Plücker

$$Y - Z = 0, \quad Z - X = 0, \quad X - Y = 0,$$

che si segano lungo la retta di Cayley

$$X = Y = Z.$$

Agli spigoli medesimi si oppongono, ne' rispettivi pentaedri, tre vertici

$$X + k W = 0, \quad X + k T = 0, \quad X + k U = 0,$$

$$Y + k W = 0, \quad Y + k T = 0, \quad Y + k U = 0,$$

$$Z + k W = 0, \quad Z + k T = 0, \quad Z + k U = 0,$$

allineati nella retta di Cayley $W = T = U$ che corrisponde al punto di Steiner $X = Y = Z = 0$ donde escono i tre spigoli (cfr. 22).

48. Nei quattro punti di Steiner allineati in uno spigolo $X = Y = 0$ dell'esaedro concorrono dodici spigoli de' nuovi pentaedri, vale a dire: quattro del 1.° pentaedro, situati nella faccia $X + k Y = 0$; quattro del 2.° situati nella faccia $Y + k X = 0$; e quattro che appartengono risp. agli altri pentaedri e giacciono insieme nel piano di Plücker $X - Y = 0$ (cfr. 18).

49. Se da due pentaedri, 1.° e 2.°, si tolgono le facce $X + k Y = 0$, $Y + k X = 0$ che passano per una stessa retta di Steiner, le facce rimanenti formano due tetraedri prospettivi, aventi per piano d'omologia il piano $X - Y = 0$ di Plücker, ed i cui

vertici corrispondenti sono nelle rette di Cayley che concorrono nel punto di Salmon $Z = W = T = U$. Queste rette contengono inoltre, ciascuna, un vertice d'uno de' rimanenti pentaedri; per es. la retta $Z = W = T$ contiene i vertici

$$X + kZ = X + kW = X + kT = 0 \text{ del 1.º pentaedro}$$

$$Y + kZ = Y + kW = Y + kT = 0 \text{ del 2.º}$$

$$U + kZ = U + kW = U + kT = 0 \text{ del 3.º (cfr. 25).}$$

50. Pei quattro punti di Steiner coniugati ai quattro situati nella retta $X = Y = 0$ passano dodici spigoli de' quattro pentaedri 3.º, 4.º, 5.º e 6.º; i quali spigoli tre a tre passano pei quattro punti

$$Z + kW = Z + kT = Z + kU = 0 \text{ vertice del 3.º pentaedro}$$

$$W + kZ = W + kT = W + kU = 0 \quad \text{»} \quad \text{del 4.º}$$

$$T + kZ = T + kW = T + kU = 0 \quad \text{»} \quad \text{del 5.º}$$

$$U + kZ = U + kW = U + kT = 0 \quad \text{»} \quad \text{del 6.º,}$$

i quali sono uniti ai quattro di Steiner mediante i predetti dodici spigoli e le quattro rette di Cayley concorrenti nel punto $Z = W = T = U$ di Salmon (cfr. 33).

Le medesime dodici rette concorrono due a due in sei punti, che dirò V:

$$\begin{aligned} Z = W = -kT = -kU, & \quad T = U = -kZ = -kW, \\ W = T = -kZ = -kU, & \quad Z = U = -kW = -kT, \\ T = Z = -kW = -kU, & \quad W = U = -kT = -kZ, \end{aligned}$$

situati due a due nelle tre rette

$$\begin{aligned} Z = W, & \quad T = U, \\ W = T, & \quad Z = U, \\ T = Z, & \quad W = U, \end{aligned}$$

che sono gli spigoli diagonali del quadrispigolo formato dalle rette di Cayley concorrenti nel nominato punto di Salmon.

Il numero de' punti V è novanta, corrispondendone sei a ciascun punto di Salmon. Essi giacciono tre a tre in sessanta rette, che sono gli spigoli di sei nuovi pentaedri, le equazioni delle cui facce si deducono da quelle del n.º 46 cambiando k in $\frac{1}{k}$. Per es. i tre punti V

$$\begin{aligned} X = Y = -kZ = -kW, \\ X = Y = -kZ = -kT, \\ X = Y = -kZ = -kU \end{aligned}$$

sono situati nella retta $X = Y = -kZ$, spigolo del pentaedro che è 3.º nella nuova serie.

51. Tornando ai pentaedri del n.º 46, un piano di Plücker, per es. $X - Y = 0$, contiene dodici vertici de' pentaedri 3.º, 4.º, 5.º e 6.º, allineati tre a tre in quattro spigoli de' pentaedri stessi e in quattro rette di Cayley (cfr. 33).

Gli stessi dodici punti sono situati due a due nelle sei rette, che dirò v , e che sono rappresentate da $X - Y = 0$ insieme con

$$\begin{aligned}(k-1)(X+Y)+2(Z+W)&=0, & (k-1)(X+Y)+2(T+U)&=0, \\ (k-1)(X+Y)+2(Z+T)&=0, & (k-1)(X+Y)+2(U+W)&=0, \\ (k-1)(X+Y)+2(Z+U)&=0, & (k-1)(X+Y)+2(W+T)&=0.\end{aligned}$$

Queste sei rette v concorrono due a due ne' tre punti

$$\left. \begin{aligned} X+Y=0, & \quad Z+W=0, & T+U=0 \\ X+Y=0, & \quad Z+T=0, & U+W=0 \\ X+Y=0, & \quad Z+U=0, & W+T=0 \end{aligned} \right\} X-Y=0$$

allineati nella retta di Steiner $X=Y=0$. Questi punti e gli analoghi (in tutto *quarantacinque*) sono quelli in cui gli spigoli dell'esaedro sono incontrati da quindici rette della superficie $\mathfrak{F}$

$$(Y+Z)(Z+X)(X+Y)+(W+T)(T+U)(U+W)=0,$$

ossia dalle rette r in cui si segano tre a tre i quindici piani che insieme coi piani di Plücker dividono armonicamente gli angoli diedri dell'esaedro. Ogni spigolo dell'esaedro (come $X=Y=0$) è incontrato da tre rette r situate in un piano ($X+Y=0$); e viceversa ogni retta r (come $X+Y=0$, $Z+W=0$, $T+U=0$) incontra tre spigoli dell'esaedro ($X=Y=0$, $Z=W=0$, $T=U=0$) che due a due non si segano.

Le rette v sono *novanta*; situate sei a sei nei piani di Plücker, *concorrenti tre a tre in sessanta punti che sono i vertici di sei nuovi pentaedri*. Le equazioni delle facce di questi pentaedri si deducono da quelle del n.º 46 cambiando k in $4-k$. Per es. le tre rette v

$$\begin{aligned}(k-1)(Y+Z)+2(W+T)&=0, & Y-Z&=0, \\ (k-1)(Z+X)+2(W+T)&=0, & Z-X&=0, \\ (k-1)(X+Y)+2(W+T)&=0, & X-Y&=0,\end{aligned}$$

concorrono nel punto rappresentato dalle equazioni

$$W+T=(1-k)X=(1-k)Y=(1-k)Z,$$

ossia dalle

$$-U=(4-k)X=(4-k)Y=(4-k)Z,$$

avuto riguardo all'identità del n.º 46. Questo punto è un vertice del pentaedro che è 6.º nella nuova serie.

52. Ogni valore del parametro k individua un sistema dei sei pentaedri (46), aventi le proprietà suesposte, cioè aventi in comune l'esaedro e i piani di Plücker (e per conseguenza le rette di Steiner e di Cayley, i punti di Steiner e di Salmon). Mediante i punti V il sistema è coniugato ad un altro (50), formato cogli stessi piani presi in ordine differente. Due sistemi coniugati corrispondono a valori reciproci del parametro; epperò tutte le coppie analoghe formano un'involuzione i cui elementi doppi sono: 1.° il sistema dei piani di Plücker ($k = -1$); 2.° il sistema dei piani che con quelli di Plücker dividono armonicamente gli angoli diedri dell'esaedro ($k = 1$).

53. Così pure, mediante le rette v , un sistema qualunque di pentaedri (46) è coniugato ad un altro (51); e i due sistemi coniugati corrispondono a valori di k che danno la somma costante 4. Dunque anche queste coppie costituiscono un'involuzione, i cui elementi doppi sono: 1.° il sistema de' sei pentaedri che si possono formare colle sei facce dell'esaedro, prese cinque a cinque ($k = \infty$); 2.° il sistema corrispondente a $k = 2$.

54. Ogni retta v contiene due vertici del sistema k e due del sistema $4 - k$: infatti, le due rette v

$$\begin{aligned}(k-1)(X+Y)+2(Z+W)&=0, & X-Y&=0, \\(k-1)(X+Y)+2(T+U)&=0, & X-Y&=0,\end{aligned}$$

avuto riguardo all'identità del n.° 46, si scambiano fra loro se a k si sostituisce $4 - k$.

Analogamente si scambiano fra loro i due punti V

$$\begin{aligned}Z=W &= -kT = -kU, \\T=U &= -kZ = -kW,\end{aligned}$$

mutando k in $\frac{1}{k}$; vale a dire, in ogni punto V concorrono due spigoli del sistema k e due del sistema $\frac{1}{k}$.

55. Le rette v e i punti V coincidono con quelli indicati dagli stessi simboli della Memoria del sig. VERONESE. I suoi punti Z e le sue rette z sono i vertici e gli spigoli de' successivi sistemi di pentaedri. Per ottenere precisamente le figure π' , π'' ... considerate dal giovane geometra ne' suoi teoremi XXXIV, XLVIII, XLIX, basta partire dal sistema di pentaedri $k = 1$, dedurre da esso il coniugato nell'involuzione $k + k' = 4$, poi da questo il coniugato nell'involuzione $k' k'' = 1$, indi da quest'ultimo il coniugato nell'involuzione $k'' + k''' = 4$, e così via di seguito, alternando le due involuzioni indefinitamente.