101.

SULLA CORRISPONDENZA FRA LA TEORIA DEI SISTEMI DI RETTE E LA TEORIA DELLE SUPERFICIE.

Atti della R. Accademia dei Lincei, Memorie, serie II, volume III (1875-76), pp. 285-302

1.° Se un sistema di valori particolari attribuiti a *n parametri* o *coordinate* $x_1, x_2, \ldots x_n$, ovvero (quando si vogliano formole omogenee) agli n rapporti fra $n+1$ coordinate $x_1 : x_2 : \ldots : x_n : x_{n+1}$ individuano un *ente geometrico*, la totalità degli enti geometrici corrispondenti alla totalità de' valori attribuiti agli n parametri o agli n rapporti dicesi *spazio* di n dimensioni di cui quegli enti geometrici si riguardano come *elementi* *). Per esempio, i punti di una linea, le linee o le superficie di un fascio, le generatrici di una superficie rigata, i piani tangenti di una sviluppabile, ... costituiscono spazî di una dimensione. I punti o i piani tangenti di una superficie, le rette di un piano, le rette tangenti comuni a due superficie, le rette bitangenti o osculatrici o normali di una superficie, le corde di una data curva gobba ... costituiscono spazî di due dimensioni. I punti o i piani dello spazio ordinario, i circoli di un piano, le sezioni piane di una superficie, le rette tangenti di una superficie, le rette che incontrano una curva, ... sono elementi di spazî a tre dimensioni. Le rette dello spazio ordinario, tutte le sfere, le coniche appoggiate a quattro rette date, ... sono gli elementi di spazî a quattro dimensioni. Le coniche esistenti in un dato piano, le cubiche gobbe situate su di una data superficie di 2.° grado, ... formano spazî di cinque dimensioni ecc. ecc.

Uno spazio di n dimensioni contiene in sè infiniti spazî di $n-1$, $n-2, \ldots$ dimensioni, definiti da una o più equazioni fra le coordinate. Fra questi spazî *subordinati* sono rimarchevoli quelli determinati da equazioni lineari.

2.° Una *trasformazione geometrica* consiste nello stabilire relazioni fra le coordinate degli elementi variabili in due spazî d'uno stesso numero di dimensioni, tali che a ciascun

*) *Mannigfaltigkeit* dei matematici tedeschi.

elemento del primo o del secondo spazio corrisponda un elemento o un numero finito di elementi dell'altro spazio. La trasformazione è detta *razionale* quando a ciascun elemento del primo spazio corrisponde un solo elemento del secondo ed a ciascuno del secondo un solo del primo; eccezione fatta di alcuni elementi detti *fondamentali* (isolati o costituenti spazi subordinati), ai quali corrispondono, non un solo, bensì infiniti elementi.

Per mezzo di una trasformazione così fatta si può riferire un *complesso lineare* di rette allo spazio ordinario i cui elementi siano punti. *Complesso* di rette, secondo la denominazione di PLUECKER *) è uno spazio a tre dimensioni i cui elementi sono rette. Il complesso è di grado n se sono n le rette del complesso che passano per un punto dato ad arbitrio e giacciono in un piano condotto pure ad arbitrio per esso punto. Se $n = 1$, il complesso dicesi *lineare*.

3.° I signori NOETHER **) e LIE ***), partendo da diversi punti di vista, diedero una rappresentazione †) d' un complesso lineare C sullo spazio ordinario S′ costituito da punti, in virtù della quale ai piani di S′ corrispondono le *congruenze lineari* ††) contenenti una retta fissa (*fondamentale*) r appartenente al dato complesso e alle congruenze

*) *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement* (Leipzig 1868-69).

**) *Zur Theorie der algebraischen Functionen mehrerer complexer Variabeln* (Nachrichten di Gottinga 1869).

***) *Over en Classe geometriske Transformationer* (Atti della Società di Christiania, 1871). — *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugel-Complexe, etc.* (Mathematische Annalen t. 5). — Il presente mio scritto non ha altro fine che di attirare l'attenzione su cotesti bellissimi lavori del signor LIE, ridondanti di concetti originali e fecondissimi.

†) Dico *una* e aggiungo la più semplice, quella cioè che corrisponde alla trasformazione omografica d'uno spazio ordinario in un altro spazio ordinario. Infatti, in quella rappresentazione gli spazî di due e di una dimensione contenuti nello spazio ordinario e definiti da equazioni lineari, vale a dire i piani e le rette, corrispondono a spazî analogamente subordinati al complesso lineare, definiti essi pure da equazioni lineari, ossia a congruenze lineari (contenenti la retta fondamentale) e ad iperboloidi rigati (contenenti la retta fondamentale). Si potrebbe, invece, fare la rappresentazione in modo che queste congruenze corrispondessero a superficie di qualunque ordine dato, purchè costituenti un così detto *sistema omaloidico*. Vero è che questa rappresentazione si può considerare come risultante dalla prima e da una delle trasformazioni da me studiate in una Memoria inserita negli Annali di Matematica (t. 5) [Queste Opere, n. 96].

††) Ritenuta la denominazione di PLUECKER, *congruenza* è uno spazio di due dimensioni (*sistema di raggi* secondo KUMMER), i cui elementi siano rette. Se delle rette d'una congruenza ve se sono n passanti per un punto arbitrario ed m situate in un piano arbitrario, la congruenza dicesi *d'ordine* n e di *classe* m. Quando $m = n$, la congruenza dicesi di *grado* n. *Lineari* appellansi le congruenze di 1.° grado.

lineari contenute in C (in generale non contenenti r) corrispondono le *quadriche* (superficie di 2.° grado) passanti per una conica fissa (*fondamentale*) **K**'. I punti del piano π' di **K**', non situati in questa conica, corrispondono alle rette di C infinitamente vicine ad r, ma non seganti r. Ad un punto M' di **K**' corrispondono tutte le rette di C che passano per un punto M di r, le quali sono in un piano passante per r. Ai punti di una retta g' qualunque in S' corrispondono rette di C che sono generatrici di un iperboloide, fra le quali è compresa anche r. Ma se g' incontra **K**' in un punto M', l' iperboloide si spezza in due fasci piani, l'uno delle rette di C passanti pel punto M di r, l'altro delle rette di C che passano per un punto G e conseguentemente giacciono in un piano γ (*piano polare* di G rispetto al complesso C). Donde risulta che ai punti dello spazio ordinario S nel quale è dato il complesso C, cioè ai centri de' fasci piani contenuti in C, e simultaneamente ai piani di questi fasci, corrispondono in S' le rette appoggiate alla conica fondamentale **K**', rette che formano un complesso C' di 2.° grado.

4.° Tre punti nello spazio S' individuano un piano; i tre raggi corrispondenti in C, insieme con r, determinano la congruenza lineare che corrisponde al piano.

5.° Due piani in S' hanno in comune una retta; così i raggi comuni alle congruenze che corrispondono a quelli, sono le generatrici dell'iperboloide corrispondente alla retta data: iperboloide che ha per generatrice anche la retta r. La generatrice infinitamente vicina ad r corrisponde al punto in cui la retta comune ai due piani dati incontra il piano π'. Le direttrici dell'iperboloide sono a due a due rette reciproche rispetto a C e formano un'involuzione: due qualsivogliano di queste rette reciproche sono le direttrici di una congruenza comprendente in sè l'iperboloide e corrispondente ad un piano del fascio individuato dai due dati. I punti in cui questo piano incontra **K**' corrispondono a quelli dove le due rette reciproche sono appoggiate ad r. I raggi doppi dell'involuzione appartengono al complesso C e corrispondono a quei piani del fascio che toccano la conica **K**'.

6.° Due punti in S' determinano una retta; i due raggi corrispondenti in C individuano, insieme con r, l'iperboloide le cui generatrici corrispondono ai punti della retta data. Se la retta incontra **K**', l'iperboloide si spezza in due fasci di raggi; l'uno corrisponde al solo punto di **K**' ed è formato da rette concorrenti in un punto di r; l'altro è costituito dalle rette corrispondenti alla serie de' punti della retta data. Se due rette in S' si segano, gl' iperboloidi corrispondenti in C hanno, oltre ad r, un' altra generatrice comune (corrispondente al punto d'incontro delle due rette date) e due direttrici comuni, che sono le direttrici della congruenza corrispondente al piano delle due rette date. Se le due rette in S' s'incontrano sul piano π', i corrispondenti iperboloidi si toccano lungo la generatrice comune r. A tutte le rette in S' passanti per uno stesso punto corrispondono in C gl'iperboloidi passanti (per r e) per uno stesso raggio, il corrispondente del punto dato. A tutte le rette contenute in uno stesso piano in S' corrispondono in C gl' iperboloidi passanti (per r e) per una stessa coppia di rette reciproche, le direttrici della congruenza corrispondente al piano dato. A tutte le rette di S′ passanti per uno stesso punto e contenute in uno stesso piano corrispondono in C gl'iperboloidi passanti per un dato quadrilatero gobbo, formato da r, da un altro raggio x di C e da due rette reciproche t, t_1. Le coppie di piani (xt, rt_1), (xt_1, rt) comprese in questo fascio d'iperboloidi corrispondono alle due rette del dato fascio in S′ che incontrano K′.

7.° Tre piani in S′ individuano un punto, al quale corrisponde il raggio C comune alle tre congruenze (contenute in C e passanti per r) che corrispondono a que' tre piani. Lo stesso raggio, insieme con r, è segato da un numero doppiamente infinito di coppie di rette reciproche; ciascuna coppia dà le direttrici di una congruenza corrispondente ad un piano passante pel punto comune ai tre dati.

8.° Un piano qualunque μ' in S′ sega K′ in due punti M′, M'_1: alle rette passanti per questi punti e contenute in quel piano corrispondono i punti di due rette reciproche g, g_1 rispetto a C, le quali sono le direttrici della congruenza corrispondente al piano dato μ'. Le rette g, g_1 incontrano r in due punti M, M_1 che, in un certo senso, corrispondono ad M′, M'_1. Ai punti di una retta esistente nel piano μ' corrispondono le generatrici d'un iperboloide contenuto nella congruenza che corrisponde al piano dato. A ciascuno de' punti M′, M'_1 corrispondono i raggi d'un fascio il cui centro è il punto M od M_1 ed il cui piano passa per r. Per conseguenza l'iperboloide corrispondente alla retta comune ai piani μ', π' si decompone ne' due fasci piani i cui centri sono M, M_1. Se il piano μ' varia restando fissi i punti M′, M'_1 (o uno solo di questi), variano le rette g, g_1, ma non già i punti M, M_1 (o uno di questi). Se coincidono i punti M′, M'_1, coincideranno anche i punti M, M′, epperò le rette g, g'_1; vale a dire: ad un piano tangente a K′ corrisponde una congruenza *speciale*, la cui direttrice (unica) è un raggio del complesso C appoggiato ad r.

9.° Ad una congruenza contenuta in C, ma non contenente r, corrisponde una superficie quàdrica in S′, che passa per K′: ai due sistemi di generatrici di questa quàdrica corrispondono i punti delle due rette (reciproche, non appoggiate ad r) direttrici della data congruenza; e propriamente alle generatrici di un sistema corrispondono i punti di una direttrice e i piani per l'altra; ed alle generatrici del secondo sistema corrispondono i punti della seconda direttrice ed i piani per la prima. Se la data congruenza è *speciale*, vale a dire, se ha per direttrice unica un raggio di C non appoggiato ad r, la corrispondente quàdrica in S′ sarà un cono passante per K′ ed avente il vertice nel punto che corrisponde all'anzidetto raggio di C.

10.° Una retta arbitraria in S, insieme colla sua reciproca rispetto a C, individua una congruenza lineare, di cui quelle due rette sono le direttrici, ed a cui corrisponde in S′ una quàdrica passante per K′. Se la retta in S incontra r, la quàdrica si spezza in due piani, uno de' quali è il piano π', mentre l'altro è quello che corrisponde alla congruenza le cui direttrici sono la retta data e la sua reciproca. Se la retta in S appartiene al complesso C, la quàdrica è un cono.

In un certo senso adunque si può dire che ad una retta data in S (e alla sua reciproca rispetto a C) corrisponde in S' una quàdrica per K'. Se la retta in S passa per un punto dato (o giace in un piano dato), la quàdrica conterrà il raggio del complesso C' che corrisponde al punto (o al piano) dato. Se la retta data in S passa per un punto dato e giace in un piano dato (passante pel punto dato), la quàdrica avrà per generatrici (di sistemi differenti) il raggio corrispondente al punto ed il raggio corrispondente al piano.

11.° Due quàdriche in S', passanti per K', si segano lungo un'altra conica, alla quale corrisponderà l'iperboloide (non passante per r) formato dalle rette di C comuni alle due congruenze che corrispondono alle due quàdriche date. Le direttrici dell'iperboloide sono a due a due rette reciproche e quindi formano un'involuzione: due rette reciproche sono direttrici di una congruenza (contenente l'iperboloide) che corrisponde ad una quàdrica del fascio individuato dalle due quàdriche date; e i raggi doppi dell'involuzione sono quelle rette di C che corrispondono ai due coni del fascio. Quelle due rette reciproche (fra le direttrici dell'iperboloide) che sono incontrate da r sono le direttrici della congruenza corrispondente al piano della conica comune alle due quàdriche date.

12.° Alla serie dei punti di K' corrispondono le rette della congruenza speciale che ha per direttrice unica r, e che ha con un'altra congruenza qualsivoglia (contenuta in C, ma non passante per r) un iperboloide comune, del quale r è una direttrice. Questo iperboloide corrisponde alla conica K' considerata come sezione piana della quàdrica corrispondente alla congruenza qualsivoglia: vale a dire, tutte le congruenze che comprendono in sè uno stesso iperboloide, pel quale r sia una direttrice, corrispondono a quàdriche che si toccano lungo la conica K'. Fra queste quàdriche vi è un cono; esso corrisponde a quell'altra retta del complesso C che è pure una direttrice dell'iperboloide. L'iperboloide è individuato quando sia data un'altra direttrice g, oltre ad r: a quella direttrice corrisponderà una quàdrica per K', e tutte le altre quàdriche tangenti a questa lungo K' corrisponderanno alle direttrici dell'iperboloide.

13.° Altrimenti: una congruenza (lineare) in C ha infinite rette appoggiate ad r, le quali formano un iperboloide, e questo ha fra le sue direttrici un altro raggio del complesso C. Questo raggio corrisponde al polo del piano π' relativo alla quàdrica per K' che corrisponde alla congruenza anzidetta.

14.° Viceversa: ad un iperboloide qualunque le cui generatrici siano raggi del complesso C corrisponde una conica segante K' in due punti corrispondenti a quelli in cui l'iperboloide è incontrato da r. Se l'iperboloide è formato da rette del complesso appoggiate ad r, la conica corrispondente coincide con K'. Se invece r è una generatrice dell' iperboloide, la conica corrispondente si spezza in una retta (che non incontra K') ed in un'altra retta posta nel piano π': le due rette hanno in comune quel punto che corrisponde alla generatrice infinitamente vicina ad r.

15.° Si è già detto che ad un punto G dello spazio S corrisponde in S' un raggio g' del complesso C', cioè un raggio appoggiato a K': ai raggi di C passanti per G corrispondono i punti di g' (ovvero, se si vuole, i coni che hanno questi punti per vertici e K' per base); alle rette passanti per G ma non appartenenti a C corrispondono le quàdriche che contengono g' e K'. A tutti i punti G di un piano ε, il cui polo rispetto a C sia E, corrispondono i raggi d'una congruenza in C', cioè le rette che incontrano K' e quella retta e' (appoggiata a K') che corrisponde ad E. Il punto comune al piano ε e alla retta r corrisponde a quello in cui e' incontra K'. Alle rette del piano ε corrispondono le quàdriche contenute nella predetta congruenza, cioè le quàdriche le cui generatrici sono appoggiate a K' e ad e'.

16.° A tutti i punti G di un iperboloide formato da raggi di C corrispondono rette di una congruenza o *sistema* di 2.° grado, avente per direttrici la conica K' e una retta non appoggiata a K', ovvero una conica segante K' in due punti, secondochè l' iperboloide contiene o non contiene la generatrice r. Se l' iperboloide è formato da raggi di C appoggiati ad r, esso avrà un'altra direttrice appartenente al complesso C, alla quale corrisponde un cono per K': e ai punti dell' iperboloide corrisponderanno le rette tangenti al cono nei punti di K'.

17.° In un piano ε' dello spazio S' sia tracciata una curva L' d'ordine n', per la quale i punti A', B' comuni al detto piano e a K' siano multipli rispettivamente secondo i numeri α, β. Alla curva L' corrisponderà in C una superficie gobba contenuta nella congruenza lineare che corrisponderà al piano ε'. Siccome L' ha, all' infuori di K', un numero $2n-\alpha-\beta$ di punti comuni con una quàdrica condotta ad arbitrio per K', così una retta arbitraria in S incontrerà la superficie gobba in $2n-\alpha-\beta$ punti; vale a dire, questo numero è il grado della superficie. Un piano qualunque in S' incontra L' in n punti; dunque una retta appoggiata ad r incontra n generatrici della superficie gobba: donde segue che, per questa, la r è una generatrice multipla secondo $n-\alpha-\beta$. Le $n-\alpha-\beta$ generatrici infinitamente vicine ad r corrisponderanno ai punti in cui L' è incontrata dal piano π' fuori di K'. Le direttrici a, b della congruenza saranno direttrici anche della superficie gobba. Una retta condotta ad arbitrio per A' nel piano ε' incontra L' in altri $n-\alpha$ punti, ai quali corrispondono altrettante generatrici della superficie gobba uscenti da un punto di a e contenute in un piano per b; ed analogamente ogni piano per a contiene $n-\beta$ generatrici concorrenti in un punto di b. Agli n punti in cui L' è segata da una retta del suo piano corrispondono le n generatrici comuni alla superficie gobba e ad un iperboloide passante per le rette r, a, b. Ai $2n-\alpha-\beta$ punti in cui L' è incontrata da una conica descritta in ε per A', B' corrispondono le $2n-\alpha-\beta$ generatrici che la superficie gobba ha in comune con un iperboloide passante per a, b. Viceversa una retta arbitraria in S incontra $2n-\alpha-\beta$ generatrici della superficie gobba, alle quali corrispondono altrettanti punti comuni alla curva L' e ad una conica per A', B'. Ossia possiamo dire che ad una retta incontrante la superficie gobba corrisponde una conica per A', B' nel piano ε' (e come caso particolare una retta). Ma reciprocamente ad una conica per A', B' nel piano ε' (o ad una retta) corrispondono infinite rette in S, tutte direttrici d'uno stesso iperboloide che ha per direttrici anche a e b.

Di qui segue che le proprietà concernenti le rette tangenti, osculatrici, bitangenti ecc. della superficie gobba corrispondono a quelle delle coniche per A', B' *) e delle rette tangenti, osculatrici, bitangenti, ecc. della curva L'.

18.° Ad una curva gobba d'ordine n situata in una quàdrica per **K'** corrisponde una superficie gobba, che è pure d'ordine n, perchè ogni altra quàdrica per **K'** incontrerà la curva in n punti fuori della conica fondamentale **K'**. La superficie gobba ha due direttrici rettilinee a, b, che sono le direttrici della congruenza corrispondente alla quàdrica su cui giace la data curva. Questa segherà rispettivamente in α, β $(\alpha+\beta=n)$ punti le rette de' due sistemi esistenti sulla quàdrica; perciò da ogni punto di a partiranno α generatrici della superficie gobba, contenute in un piano per b, e da ogni punto di b ne partiranno β contenute in un piano per a.

19.° Ad una curva gobba qualsivoglia C'_n, che con **K'** abbia k punti comuni, corrisponde una superficie rigata (gobba) d'ordine $2n-k$, per la quale r è una generatrice multipla secondo $n-k$. I punti di questa superficie corrispondono alle rette che incontrano la data curva gobba e la conica fondamentale **K'**. I punti della curva doppia della superficie corrispondono alle corde della curva data incontrate da **K'**: quindi l'ordine della curva doppia, ossia il numero de' punti comuni a questa e ad un piano ε, sarà uguale al numero delle corde di C'_n che incontrano **K'** ed una retta e' appoggiata a **K'**, il qual numero è $(n-k)(n-1)+h$, dove h sia il numero delle corde di C'_n che passano per un punto arbitrario dello spazio **). Un piano per r incontra la curva doppia in h punti fuori di r, corrispondenti alle h corde di C'_n che escono da un punto di **K'**; dunque la curva doppia è appoggiata ad r in $(n-k)(n-1)$ punti. Un'altra generatrice qualun-

---

*) Ossia de' circoli, se si suppone che **K'** sia il circolo imaginario all'infinito nello spazio **S'**.

) Infatti: da un punto qualunque di e' partono h corde di C'_n; un piano qualunque per e' sega C'_n in n punti, epperò contiene $\frac{1}{2}n(n-1)$ corde di C'_n; dunque il luogo delle corde di C'_n appoggiate ad e' è dell'ordine $\frac{1}{2}n(n-1)+h$, e per esso la C_n è multipla secondo $n-1$. Questo luogo ha su **K' un punto multiplo secondo h e k punti multipli secondo $n-1$; perciò incontrerà **K'** in altri $n(n-1)+2h-h-k(n-1)=(n-k)(n-1)+h$.

que incontra la curva doppia in $n-1$ punti, corrispondenti alle corde di C'_n appoggiate a $\mathbf{K}'$ e passanti per uno stesso punto di C'_n. Le intersezioni ed i contatti della superficie gobba con linee rette appoggiate o no ad r corrispondono alle intersezioni ed ai contatti della curva C'_n con piani o con quàdriche per $\mathbf{K}'$ *).

20.° Se tutte le tangenti di C'_n incontrano $\mathbf{K}'$, vale a dire, se C'_n è la curva cuspidale di una sviluppabile circoscritta a $\mathbf{K}'$, la superficie rigata corrispondente sarà una sviluppabile; infatti siccome due punti successivi di C'_n sono sempre in una retta del complesso $\mathbf{C}'$, così due generatrici successive della corrispondente superficie rigata avranno sempre un punto comune. I punti della curva cuspidale di questa superficie corrispondono alle tangenti di C'_n, e le tangenti di quella corrispondono ai punti di C'_n **).

21.° Sia ora data in S' una superficie F'. Essa ammette in un suo punto qualunque due tangenti appoggiate a $\mathbf{K}'$; e tutte le rette analoghe saranno le tangenti di un sistema di curve Γ', delle quali due passano per un punto qualunque di F'. Ai punti ed alle tangenti di una curva Γ' corrispondono in S ordinatamente le tangenti e i punti di una curva Γ; e il luogo di tutte le curve Γ sarà una superficie F, i cui punti sono le imagini delle tangenti di F' appoggiate a $\mathbf{K}'$. Siccome ogni punto di F' appartiene a due curve Γ', così la corrispondente retta del complesso $\mathbf{C}$ toccherà due curve Γ, cioè toccherà F in due punti; questa è dunque la *superficie focale* del sistema di rette che appartengono al complesso $\mathbf{C}$ e che corrispondono ai punti di F'. Per un punto qualunque di F passa (in generale) una sola curva Γ, la cui tangente è l'intersezione del piano tangente di F col piano che contiene le rette del complesso $\mathbf{C}$ incrociate in quel punto. Ne segue che una sola curva Γ' è toccata da una retta del complesso $\mathbf{C}'$ che sia tangente ad F'. Se in un punto particolare F è toccata da infinite rette del complesso $\mathbf{C}$, la corrispondente retta di $\mathbf{C}'$ giacerà per intero su F' e farà parte del sistema Γ'.

Per tal modo ad ogni punto di F ne corrisponde uno di F', ma viceversa ad un punto di F' ne corrispondono due di F. Però a due punti infinitamente vicini dell'una superficie e situati in una retta del relativo complesso corrispondono due punti del pari infinitamente vicini dell' altra superficie e giacenti in una retta del relativo complesso, perchè ad un elemento di curva Γ o Γ' corrisponde un elemento della corrispondente curva Γ' o Γ. Ond' è che ad una curva qualunque tracciata sull'una superficie corrisponderà una curva tracciata sull'altra: propriamente, ai punti della prima curva corrispondono le generatrici di una superficie rigata circoscritta alla seconda superficie lungo la seconda curva. Se le tangenti della prima curva sono rette del rispettivo complesso $\mathbf{C}$ o $\mathbf{C}'$, anche

*) Ossia con sfere, nell'ipotesi suesposta.

**) Della corrispondenza di codeste curve le cui tangenti appartengono ai complessi $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$, il sig. LIE ha fatto importantissime applicazioni (Math. Annalen, t. 5).

le tangenti dell'altra curva hanno l'analoga proprietà, e la superficie rigata diviene sviluppabile.

Lo studio di una superficie qualunque F′ concepita come luogo di punti nello spazio S′ si traduce così immediatamente nello studio di un sistema Φ doppiamente infinito di rette contenuto nel complesso lineare **C**: sistema la cui superficie focale **F** è la corrispondente di F′. Se F′, a cagione d'esempio, è suscettibile d'essere rappresentata punto per punto sopra un piano, questo si potrà considerare come una rappresentazione del sistema Φ, per modo che ogni retta di Φ avrà per imagine un punto del piano. Se poi i punti e le rette di questo piano si trasformano per dualità nelle rette e nei punti del piano medesimo (o di un altro), le imagini delle rette di Φ saranno le rette di un piano.

22.° Per presentare un esempio, assumiamo una superficie di terz'ordine F′ che passi per la conica fondamentale **K**′. Siccome una retta appoggiata a **K**′ incontra F′ in altri due punti, così per un punto arbitrario di S passano due raggi del sistema Φ, ed un piano arbitrario in S ne contiene due del pari. Il sistema Φ è dunque di secondo grado e ad esso appartiene la retta r, a cagione della retta che F′ ha nel piano π'. Alle rette che toccano F′ e incontrano **K**′ corrispondono i *fuochi* e i *piani focali* *) del sistema Φ; di quale grado sarà il luogo di tali punti e di tali piani? Ossia, quanti fuochi si trovano su di una retta arbitraria g o quanti piani focali passano per essa? Ciò equivale a domandare quante rette sono ad un tempo tangenti di F′ e generatrici (di una stessa serie) di una quàdrica per **K**′. Siccome la quàdrica sega F′ lungo una curva di quart' ordine e questa tocca quattro generatrici (di una stessa serie) della quàdrica, così la retta g corrispondente alla quàdrica contiene quattro fuochi e giace in quattro piani focali, vale a dire, la superficie focale **F** del sistema Φ è di quart'ordine e quarta classe **).

La superficie F′ contiene ventisette rette, sedici delle quali incontrano **K**′ ***); a queste corrispondono perciò sedici punti e piani singolari: vale a dire sedici punti (e sedici piani) tali che tutte le rette del complesso **C** passanti per essi (situate in essi) appartengono al sistema Φ. In altre parole, il sistema Φ contiene sedici fasci piani di raggi. Conducendo una trasversale ad arbitrio per uno de' punti singolari, ad essa corrisponde una quàdrica (per **K**′) la quale conterrà la retta di F′ corrispondente a quel punto, epperò segherà F′ lungo una cubica gobba, che tocca due sole generatrici della quàdrica: dunque la trasversale incontrerà **F** in due soli punti, oltre al punto singolare. Per conseguenza

---

*) I piani focali sono i piani polari dei fuochi rispetto al complesso **C**.

**) KUMMER nei Monatsberichte dell'Accademia di Berlino, 1864-65.

***) CREMONA, *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du 3.^e ordre* (Berlin 1868) [Queste Opere. n. 79]. — *Sulla superficie di 4.° ordine dotata di una conica doppia* (Rend. Ist. Lomb. 1871) [Queste Opere, n. 88].

questo punto è *doppio* per F. La superficie F ha dunque sedici punti doppî e sedici piani tangenti doppî, che corrispondono alle sedici rette di F′ appoggiate a **K**′. Una qualunque di queste rette ne incontra altre cinque; dunque ciascuno de' sedici punti doppî di F è congiunto ad altri cinque mediante cinque rette del complesso C; e siccome tutte le rette di C che passano per uno stesso punto giacciono nel relativo piano polare, così ciascun piano doppio di F contiene sei punti doppî, uno dei quali (cioè il polo del piano) è congiunto agli altri cinque per mezzo di cinque raggi del sistema Φ. Correlativamente: per ciascun punto doppio passano sei piani doppî, uno dei quali (il piano polare del punto) è segato dagli altri cinque lungo cinque raggi del sistema Φ *).

Oltre alla retta a nel piano π' ed alle sedici rette appoggiate a **K**′, la superficie F′ ne contiene altre dieci (b_1, c_1), (b_2, c_2), (b_3, c_3), (b_4, c_4), (b_5, c_5) contenute in cinque piani passanti per la retta a. A ciascuna di queste dieci rette corrisponde un iperboloide le cui generatrici sono raggi del sistema Φ, ossia rette bitangenti di F. Dunque: ogni raggio, come r, del sistema Φ è comune a dieci iperboloidi formati da raggi del sistema medesimo; i dieci iperboloidi formano cinque coppie, e i due di una stessa coppia hanno in comune un altro raggio del sistema, epperò si segano inoltre secondo due rette direttrici: le cinque coppie di direttrici incontrano r negli stessi due punti **).

Delle rette b_r, c_r l'una incontra otto e l'altra le altre otto delle sedici rette di F′ appoggiate a **K**′; dunque dei due iperboloidi d'una coppia l'uno contiene otto e l'altro gli altri otto punti doppî di F; e così pure l'uno tocca otto e l'altra gli altri piani doppî. E siccome le otto rette segate da una stessa b o c si segano per coppie in quattro punti, ossia giacciono in quattro piani passanti per la b o c, così gli otto punti doppî pei quali passa uno stesso iperboloide giacciono in quattro rette del sistema Φ (che non sono rette dell'iperboloide). Per gli otto piani doppî ha luogo la proprietà correlativa.

I piani passanti per le rette b, c segano F′ secondo coniche appoggiate in due punti a **K**′: tali coniche formano dunque dieci fasci conjugati a due a due ***). Due coniche conjugate giacciono in una stessa quàdrica per **K**′ †), la quale tocca F′ ne' punti comuni alle due coniche, ed alla quale corrisponderà in S una retta (e la sua reciproca) tangente ad F in due punti. Di rette così fatte ne passano due per un punto qualunque (e ne giacciono due in un piano qualunque) dello spazio S; infatti il raggio corrispondente in S′, essendo appoggiato a **K**′, incontra F′ in due punti M′, N′; e si hanno così due quàdriche, l'una passante per **K**′ e per le coniche di F′ situate ne' piani b_rM′, c_rN′, l' altra per **K**′ e per

*) Kummer, *l. c.*

) Corrispondenti a quelli in cui a incontra **K′.

***) Diciamo *conjugate* due coniche poste in piani passanti risp. per b_r, c_r, dove b_r, c_r sono in uno stesso piano per a.

†) Cremona, *Mémoire de géométrie pure etc.* chap. 9.

le coniche poste ne' piani $b_r N'$, $c_r M'$. Al sistema delle quàdriche passanti per **K**$'$ e tangenti ad F$'$ in coppie di punti allineati col punto $b_r c_r$ corrisponde adunque un nuovo sistema di secondo grado (doppiamente infinito) di rette bitangenti ad F; e siccome queste rette sono a due a due (le due corrispondenti ad una stessa quàdrica) reciproche rispetto a C, così il predetto sistema appartiene ad un complesso lineare che è in involuzione col dato sistema C. Di tali sistemi se ne hanno cinque, quante sono le coppie delle rette b_r c_r. La superficie F è pertanto la superficie focale di sei distinti sistemi di rette, di secondo grado, *) appartenenti a sei complessi lineari, a due a due in involuzione: dei quali sei sistemi di rette l'uno corrisponde ai punti di F$'$ e l'altro ai cinque sistemi di quàdriche per **K**$'$ che toccano in due punti F$'$.

Si ottengono gli stessi risultati se invece di una superficie di terz'ordine passante per **K**$'$ si assume nello spazio S' una superficie di quart' ordine per la quale **K**$'$ sia una conica doppia.

Per tal modo dalle note proprietà delle superficie di terz'ordine e di quelle del quarto ordine, dotate di una conica doppia **), si conclude la teoria dei sistemi di rette di secondo grado ***).

In modo simigliante si ridurrebbe lo studio di altri sistemi di rette a quello di altre superficie.

23.° Le formole analitiche per la corrispondenza fra gli elementi de' due spazi C, S$'$ sono facili a stabilirsi. Siano $x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6$ le note coordinate tetraedriche di una retta soggette alla condizione

$$x_1\, x_4 + x_2\, x_5 + x_3\, x_6 = 0.$$

Assumiamo $x_1 + x_4 = 0$ come equazione del complesso dato C, e come retta fondamentale scegliamo la $x_6 = 0$. Nello spazio S$'$ siano P$'$, Q$'$, R$'$, S$'$ le coordinate di un punto qualunque e

$$S' = 0, \;\; P'^2 + Q'^2 + R'^2 = 0 \,.$$

*) Kummer *l. c.* e: *Ueber die algebraischen Strahlensysteme, in's besondere über die der ersten und zweiten Ordnung.* (Mem. dell'Accademia di Berlino, 1866).

**) Veggansi in particolare la Memoria del sig. Casey: *On cyclides and spheroquartics* nelle Transazioni filosofiche della Società Reale di Londra, 1871; l'opera del sig. Darboux: *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques etc.* (Paris 1873), nella quale sono menzionati i lavori precedenti d'altri geometri; e la già ricordata Memoria del signor Lie (Mathem. Annalen, t. 5).

***) Klein, *Zur Theorie der Linien-complexe des ersten und zweiten Grades.* (Mathem. Annalen, t. 2). — Lie, *l. c.*

le equazioni della conica fondamentale **K**$'$, la quale, se si suppone che P$'$, Q$'$, R$'$ siano coordinate cartesiane ortogonali, sarà il *circolo imaginario all'infinito:* come appunto suppone il sig. LIE.

Ciascuna delle equazioni $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_5 = 0$ insieme colla $x_1 + x_4 = 0$ determina una congruenza lineare contenente la retta fondamentale, epperò corrispondente ad un piano in S$'$. Siano $R' = 0, P' + i\,Q' = 0, P' - i\,Q' = 0$ i tre piani che per tal modo corrispondono alle tre congruenze; allora potremo porre

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv R' \\ x_2 &\equiv -(P' + i\,Q') \\ x_4 &\equiv -R' \\ x_5 &\equiv -P' - i\,Q' \\ x_6 &\equiv S' \end{aligned}$$

dove il segno $\equiv$ indica *proporzionalità*; e determinando x_3 mediante la

$$x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6 = 0,$$

ne verranno le formole

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv R'S', & x_4 &\equiv -R'S' \\ x_2 &\equiv -(P' + i\,Q')S', & x_5 &\equiv (P' - i\,Q')S' \\ x_3 &\equiv P'^2 + Q'^2 + R'^2, & x_6 &\equiv S'^2 \end{aligned} \tag{1}$$

che dànno la retta $x_1 x_2 \ldots x_6$ del complesso **C** corrispondente al punto P$'$Q$'$R$'$S$'$ dello spazio S$'$.

Siano ora P, Q, R, S le coordinate di un punto qualunque della retta x; avremo le note relazioni

$$\begin{aligned} Px_6 + Sx_2 - Rx_4 &= 0 \\ Qx_6 - Sx_1 - Rx_5 &= 0 \end{aligned}$$

e ponendo per le x i valori (1)

$$\begin{aligned} PS' - S(P' + i\,Q') + RR' &= 0 \\ QS' - SR' - R(P' - i\,Q') &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

e queste sono, meno la diversità dei simboli, le equazioni di LIE. Considerando P Q R S come coordinate di un punto dato in S, le (2) rappresentano la retta corrispondente in S$'$; perciò le coordinate $x'_1\, x'_2 \ldots x'_6$ di questa retta saranno espresse come segue:

$$(3)\qquad \begin{aligned} x'_1 &\equiv Q\,S - P\,R & x'_4 &\equiv i\,(R^2 - S^2)\\ x'_2 &\equiv i\,(Q\,S + P\,R) & x'_5 &\equiv R^2 + S^2\\ x'_3 &\equiv -(P\,S + Q\,R) & x'_6 &\equiv 2\,i\,R\,S \end{aligned}$$

le quali equazioni dànno

$$x'^2_4 + x'^2_5 + x'^2_6 = 0$$

equazione del complesso di 2.° grado C' che nello spazio S' corrisponde ai punti dell'altro spazio. In questo la retta fondamentale è $R = S = 0$.

24.° Mediante questa trasformazione adunque, le congruenze lineari in C corrispondono alle quàdriche passanti per la conica fondamentale **K**'; ossia, diremo, alle sfere, ritenuto che **K**' sia il circolo imaginario all' infinito. Le rette di una congruenza lineare sono, com'è noto, appoggiate a due rette direttrici, le quali sono rette *reciproche* rispetto ad ogni complesso lineare contenente la congruenza. Nel nostro caso adunque, una retta l assunta ad arbitrio (fuori di C) come direttrice individua una congruenza, la quale risulta formata da tutte le rette del complesso C che segano la retta l e quindi anche la seconda direttrice, cioè la retta reciproca di l. Alla retta l considerata come direttrice di una congruenza corrisponde una sfera, vale a dire, alle rette di C appoggiate ad l corrispondono i punti di una sfera; ma viceversa alla sfera corrispondono due rette (reciproche rispetto al complesso C), le direttrici della congruenza i cui raggi sono gli elementi corrispondenti ai punti della sfera.

25.° Se dunque ora chiamiamo S la totalità delle rette in uno spazio ordinario, ed S' la totalità delle sfere in un altro spazio ordinario, S ed S' saranno due spazî di quattro dimensioni i cui elementi si possono mettere in relazione tale che ad una retta qualunque in S corrisponde una sfera in S', ma ad una sfera in S' corrispondono in S due rette, le quali sono conjugate o reciproche rispetto ad un determinato complesso (fondamentale) C contenuto in S.

Siano $\xi_1\,\xi_2\ldots\xi_6$ le ordinarie coordinate tetraedriche di una retta in S; per le rette x che segano la retta ξ si avrà

$$\xi_4\,x_1 + \xi_5\,x_2 + \xi_6\,x_3 + \xi_1\,x_4 + \xi_2\,x_5 + \xi_3\,x_6 = 0$$

e sostituendo alle x i valori (1) avremo

$$\xi_6\,(P'^2 + Q'^2 + R'^2) + (\xi_2 - \xi_5)\,P'\,S' - (\xi_2 + \xi_5)\,i\,Q'\,S' + (\xi_4 - \xi_1)\,R'\,S' + \xi_3\,S'^2 = 0$$

equazione della sfera corrispondente alla retta ξ.

Ponendo quest'equazione sotto la forma

$$(4)\qquad \begin{aligned} 2\,(X_1\,P' + X_2\,Q' + X_3\,R')\,S' + X_4\,(P'^2 + Q'^2 + R'^2 - S'^2)\\ + i\,X_5\,(P'^2 + Q'^2 + R'^2 + S'^2) = 0 \end{aligned}$$

e considerando le $X_1 X_2 .. X_5$ come coordinate (omogenee) della sfera, le relazioni fra queste coordinate e le ξ delle rette corrispondenti divengono

$$(5)\qquad \begin{aligned} X_1 &\equiv \xi_2 - \xi_5 \\ X_2 &\equiv - i(\xi_2 + \xi_5) \\ X_3 &\equiv \xi_4 - \xi_1 \\ X_4 &\equiv \xi_6 - \xi_3 \\ X_5 &\equiv - i(\xi_6 + \xi_3) \end{aligned}$$

$$\Phi(X X) \equiv (\xi_1 + \xi_4)^2 \text{ a causa di } \xi_1 \xi_4 + \xi_2 \xi_5 + \xi_3 \xi_6 = 0$$

ovvero

$$(6)\qquad \begin{aligned} \xi_1 &\equiv - X_3 \pm \sqrt{\Phi(XX)} \\ \xi_2 &\equiv X_1 + i X_2 \\ \xi_3 &\equiv - X_4 + i X_5 \\ \xi_4 &\equiv X_3 \pm \sqrt{\Phi(XX)} \\ \xi_5 &\equiv - X_1 + i X_2 \\ \xi_6 &\equiv X_4 + i X_5 \end{aligned}$$

dove per brevità si è posto

$$\Phi(X X) \equiv X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2.$$

Secondochè nelle (6) si prende il radicale col segno + o col segno —, si ha l'una o l'altra delle due rette corrispondenti alla sfera X.

26.° Il raggio della sfera (4) è

$$\sqrt{\Phi(XX)} : (X_4 + i X_5),$$

dunque la sfera si riduce ad un punto (*cono - sfera*) se $\Phi(X X) = 0$, ad un piano se $X_4 + i X_5 = 0$. L'equazione $\Phi(X X) = 0$ dà $\xi_1 + \xi_4 = 0$, e la $X_4 + i X_5 = 0$ corrisponde alla $\xi_6 = 0$; dunque alle rette dello spazio S che appartengono al complesso C corrispondono le *sfere di raggio nullo*, vale a dire i punti dello spazio S', mentre a quelle rette dello spazio S che incontrano la retta fondamentale $\xi_6 = 0$ corrispondono le *sfere di raggio infinito*, vale a dire i piani dello spazio S'.

Questa elegantissima trasformazione dello spazio S costituito da rette nello spazio S' costituito da sfere è dovuta al fecondo ingegno del signor Sophus Lie di Christiania, il quale ne ha fatto numerose e importanti applicazioni specialmente per la riduzione del problema delle linee di curvatura d'una superficie a quella delle linee assintotiche di un'altra superficie, o viceversa *). Noi abbiamo creduto di dover qui richiamare quella trasformazione con una veste analitica un po' diversa, perchè di essa abbiamo bisogno per lo scopo di future ricerche, cioè per la deduzione della teoria dei sistemi di rette (congruenze, spazî a due dimensioni formati da rette) dalla teoria di superficie volgarmente conosciute.

27.° Due sfere X, Y determinano un fascio che contiene due punti o coni-sfere, corrispondenti alle radici λ_1, λ_2 dell'equazione quadratica

$$(X_1+\lambda Y_1)^2+(X_2+\lambda Y_2)^2+(X_3+\lambda Y_3)^2$$
$$+(X_4+\lambda Y_4)^2+(X_5+\lambda Y_5)^2=0$$

ossia

$$\Phi(X X)+2\lambda\,\Phi(X Y)+\lambda^2\,\Phi(Y Y)=0$$

essendosi posto:

$$\Phi(X Y)=X_1 Y_1+X_2 Y_2+X_3 Y_3+X_4 Y_4+X_5 Y_5.$$

Detto ω l'angolo delle due sfere X, Y, si ha facilmente

$$\cos\omega=-\frac{\Phi(XY)}{\sqrt{\Phi(XX).\Phi(YY)}},$$

$$\omega=\frac{1}{2i}\log\frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

vale a dire, ω è, secondo il linguaggio della *geometria projettiva* di Cayley, la *distanza* de' due elementi X, Y dello spazio di quattro dimensioni S', nel quale si assuma come *assoluto* lo spazio subordinato di tre dimensioni definito dall'equazione

$$\Phi(X X)=0,$$

cioè la totalità dei punti dello spazio ordinario.

In tutte le sfere Y che segano una data sfera X sotto un angolo costante, il cui coseno sia K, si ha dunque

$$(7)\qquad X_1 Y_1+X_2 Y_2+X_3 Y_3+X_4 Y_4+X_5 Y_5+K\sqrt{\Phi(XX)\,\Phi(YY)}=0.$$

Ora, dette y le coordinate di una retta corrispondente alla sfera Y, l'equazione precedente, mediante la sostituzione (5), darà

*) Non bisogna però dimenticare i lavori già citati di Darboux e di Casey, ne' quali è pure studiato a fondo lo spazio di quattro dimensioni i cui elementi sono sfere; e quelli, pure importantissimi, del signor Klein.

$$X_1(y_2-y_5)-i\,X_2(y_2+y_5)+X_3(y_4-y_1)+X_4(y_6-y_3)-i\,X_5(y_6+y_3)$$
$$\pm K(y_1+y_4)\sqrt{\Phi(XX)}=0$$

equazione di *due* complessi di rette (a seconda del doppio segno $\pm$) corrispondenti alle sfere Y contenute nell'equazione (7). L'equazione che precede può scriversi

$$x_4 y_1+x_5 y_2+x_6 y_3+x_1 y_4+x_2 y_5+x_3 y_6=0 \tag{8}$$

purchè si ponga

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv -X_3 \mp K\sqrt{\Phi(XX)} \\ x_2 &\equiv X_1+i\,X_2 \\ x_3 &\equiv -X_4+i\,X_5 \\ x_4 &\equiv X_3 \mp K\sqrt{\Phi(XX)} \\ x_5 &\equiv -X_1+i\,X_2 \\ x_6 &\equiv X_4+i\,X_5, \end{aligned} \tag{9}$$

ovvero inversamente

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv x_2-x_5 \\ X_2 &\equiv -i(x_2+x_5) \\ X_3 &\equiv x_4-x_1 \\ X_4 &\equiv x_6-x_3 \\ X_5 &\equiv -i(x_6+x_3) \\ \mp K\sqrt{\Phi(XX)} &\equiv x_1+x_4. \end{aligned} \tag{10}$$

Qui le x, non più soggette alla condizione $x_1 x_4+x_2 x_5+x_3 x_6=0$ $\big($infatti $x_1 x_4+x_2 x_5+x_3 x_6\equiv\Phi(X\,X)(K^2-1)$, che non è zero se non è $K=\pm 1\big)$ sono le coordinate di un complesso di rette, contenuto nello spazio S.

28.° Denominiamo *complesso di sfere* la totalità delle sfere Y (7) che segano sotto un angolo dato (definito dalla costante K) una sfera data X. A questa può darsi il nome di *nucleo* del complesso. Un complesso è dunque individuato dalla sfera-nucleo e dal parametro K, e può designarsi col simbolo (X, K), essendo K il coseno dell'angolo sotto il quale le sfere del complesso segano la sfera-nucleo, di coordinate $X_1\,X_2\ldots$. Alle sfere di un complesso corrispondono adunque, per le formole (8, 9, 10), le rette di un complesso in S e le loro conjugate o reciproche, rispetto a C, le quali formano un altro complesso, che possiamo dire *conjugato* o *reciproco* al primo, rispetto a C. Viceversa ad un complesso qualunque di rette in S corrisponde un complesso di sfere in S'. Due complessi conjugati determinano insieme col complesso fondamentale C una stessa congruenza, le cui direttrici sono appunto le rette corrispondenti a quella sfera X che è segata sotto angolo costante dalle sfere Y del complesso corrispondente a quei due.

29.º Se $K = 0$, si ha $x_1 + x_4 = 0$; allora i due complessi conjugati coincidono in un solo, formato da rette che a due a due sono conjugate rispetto a C. Vale a dire: ad un complesso di sfere ortogonali ad una data sfera X corrisponde un complesso di rette che è in involuzione col complesso fondamentale C. Le direttrici della congruenza comune ai due complessi corrispondono alla sfera X.

30.º Se $K = \pm 1$, si ha $x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6 = 0$, vale a dire, ciascuno de' due complessi conjugati è formato da rette che segano una retta data x. Dunque: ad un complesso di sfere tangenti ad una data sfera X corrispondono i due complessi *speciali* formati dalle rette che segano l'una e l'altra delle due rette x corrispondenti ad X. In altre parole: se due rette x, y in S si segano, le corrispondenti sfere X, Y, in S' si toccano. Il punto di contatto, come sfera di raggio nullo, corrisponde a quella retta del complesso C che passa pel punto xy e giace nel piano xy.

31.º Se $x_1 x_2 \ldots x_6$, $y_1 y_2 \ldots y_6$ sono le coordinate di due complessi (in generale non *speciali*), e se $X_1 X_2 \ldots X_5$, H, ed $Y_1 Y_2 \ldots Y_5$, K sono i parametri de' corrispondenti complessi di sfere, avremo per le (9), (10)

$$x_1 y_4 + x_2 y_5 + x_3 y_6 + x_4 y_1 + x_5 y_2 + x_6 y_3 \equiv$$

$$\equiv 2 \left(\pm \mathrm{H\,K} \sqrt{\Phi(\mathrm{XX}) . \Phi(\mathrm{YY})} - \Phi(\mathrm{XY}) \right),$$

$$4 (X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3 + X_4 Y_4 + X_5 Y_5) =$$

$$= 4\, \Phi(\mathrm{XY}) = -2 (x_1 y_4 + x_2 y_5 + x_3 y_6 + x_4 y_1 + x_5 y_2 + x_6 y_3)$$

$$+ (x_1 + x_4)(y_1 + y_4).$$

Dunque se H o K è nullo, vale a dire se è zero $x_1 + x_4$ od $y_1 + y_4$, si ha

$$x_1 y_4 + \ldots \equiv -2\, \Phi(\mathrm{X\,Y}).$$

Donde segue che a due complessi di sfere uno de' quali (almeno) sia formato dalle sfere ortogonali ad una sfera X e l'altro dalle sfere seganti sotto angolo costante una sfera Y ortogonale ad X, corrispondono due complessi che sono fra loro in involuzione. In generale a due complessi in involuzione corrispondono due complessi di sfere (X, H), (Y, K) tali che le sfere-nuclei X, Y, si segano sotto un angolo il cui coseno è $\pm$ HK, essendo H, K i parametri dei due complessi medesimi.

32.º È noto che in infinite maniere si possono determinare cinque sfere che a due a due si seghino ad angolo retto. Imaginiamo d'aver trovato un gruppo di cinque sfere

Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4, Σ_5 dotato di tale proprietà; dalle cose premesse segue che ai cinque complessi formati dalle sfere che ordinatamente sono ortogonali alle sfere Σ corrisponderanno nello spazio S cinque complessi lineari di rette, a due a due in involuzione fra loro ed inoltre tutti in involuzione col complesso fondamentale C. Vale a dire: ai sei spazî di tre dimensioni (Σ), (Σ_1), (Σ_2), (Σ_3), (Σ_4), (Σ_5) *) subordinati ad S', costituiti l'uno dai punti o coni-sfere di S', gli altri dalle sfere che segano ortogonalmente una delle sfere Σ, corrispondono sei complessi lineari di rette, C, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, a due a due in involuzione fra loro.

Ciò suggerisce naturalmente di riferire gli elementi dello spazio S' alle cinque sfere Σ_r o ai cinque complessi (Σ_r); il che avrà per effetto di riferire simultaneamente gli elementi dello spazio S ai sei complessi C: e saremo così condotti nel modo più spontaneo alle coordinate che il sig. KLEIN ha introdotto nella geometria dello spazio costituito da rette **). Già le coordinate X sono relative a cinque sfere a due a due ortogonali; infatti le equazioni

$$P' = 0, \quad Q' = 0, \quad R' = 0,$$

alle quali si riduce la (4) ponendo uguali a zero le X tranne X_1 o X_2 o X_3, rappresentano tre piani ortogonali; mentre l'equazione (4) medesima, postovi $X_1 = X_2 = X_3 = X_5 = 0$, ovvero $X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0$ dà le

$$P'^2 + Q'^2 + R'^2 - 1 = 0$$
$$P'^2 + Q'^2 + R'^2 + 1 = 0$$

che rappresentano due sfere ortogonali, il cui centro comune è il punto $P' = Q' = R' = 0$. Perciò la ricerca di un altro gruppo (generale) di cinque sfere Σ_r a due a due ortogonali equivarrà alla trasformazione delle forma bilineare $\Phi\,(X\,Y)$ in sè medesima.

33.° Posto per brevità

$$\sigma_1 = 2\,P'\,S',$$
$$\sigma_2 = 2\,Q'\,S',$$
$$\sigma_3 = 2\,R'\,S',$$
$$\sigma_4 = P'^2 + Q'^2 + R'^2 - S'^2,$$
$$\sigma_5 = i\,(P'^2 + Q'^2 + R'^2 + S'^2),$$

dove ha luogo l' identità $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 + \sigma_5^2 = 0$, le cinque sfere Σ_r siano date dalle equazioni

*) Indichiamo con (Σ_r) il complesso delle sfere ortogonali alla sfera Σ_r.

**) *L. c.*

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
\Phi_{11}^{\frac{1}{2}}\,\Sigma_1 &= X_{11}\,\sigma_1 + X_{12}\,\sigma_2 + X_{13}\,\sigma_3 + X_{14}\,\sigma_4 + X_{15}\,\sigma_5\,,\\
\Phi_{22}^{\frac{1}{2}}\,\Sigma_2 &= X_{21}\,\sigma_1 + X_{22}\,\sigma_2 + X_{23}\,\sigma_3 + X_{24}\,\sigma_4 + X_{25}\,\sigma_5\,,\\
\Phi_{33}^{\frac{1}{2}}\,\Sigma_3 &= X_{31}\,\sigma_1 + X_{32}\,\sigma_2 + X_{33}\,\sigma_3 + X_{34}\,\sigma_4 + X_{35}\,\sigma_5\,,\\
\Phi_{44}^{\frac{1}{2}}\,\Sigma_4 &= X_{41}\,\sigma_1 + X_{42}\,\sigma_2 + X_{43}\,\sigma_3 + X_{44}\,\sigma_4 + X_{45}\,\sigma_5\,,\\
\Phi_{55}^{\frac{1}{2}}\,\Sigma_5 &= X_{51}\,\sigma_1 + X_{52}\,\sigma_2 + X_{53}\,\sigma_3 + X_{54}\,\sigma_4 + X_{55}\,\sigma_5\,,
\end{aligned}
$$

dove

$$(12)\qquad \Phi_{rr} = X_{r1}^2 + X_{r2}^2 + X_{r3}^2 + X_{r4}^2 + X_{r5}^2.$$

L'ortogonalità delle due sfere Σ_r, Σ_s sarà espressa dalla condizione

$$\Phi_{rs} = 0$$

ossia

$$(13)\qquad X_{r1}\,X_{s1} + X_{r2}\,X_{s2} + X_{r3}\,X_{s3} + X_{r4}\,X_{s4} + X_{r5}\,X_{s5} = 0.$$

Sia Δ il determinante de' coefficienti X e suppongasi ch'esso non sia nullo; escludasi cioè che le cinque sfere siano ortogonali ad una medesima sesta sfera.

Dalle (12), (13) si hanno le

$$X_{rs}\,\Delta = \Phi_{rr}\,\frac{\partial\,\Delta}{\partial\,X_{rs}}$$

epperò dalle (11):

$$(14)\qquad \sigma_r = \frac{X_{1r}}{\Phi_{11}^{\frac{1}{2}}}\,\Sigma_1 + \frac{X_{2r}}{\Phi_{22}^{\frac{1}{2}}}\,\Sigma_2 + \frac{X_{3r}}{\Phi_{33}^{\frac{1}{2}}}\,\Sigma_3 + \frac{X_{4r}}{\Phi_{44}^{\frac{1}{2}}}\,\Sigma_4 + \frac{X_{5r}}{\Phi_{55}^{\frac{1}{2}}}\,\Sigma_5$$

e

$$(15)\qquad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 + \sigma_5^2 = \Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 + \Sigma_3^2 + \Sigma_4^2 + \Sigma_5^2,$$

$$
(16)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{X_{1r}^{\;2}}{\Phi_{11}} + \frac{X_{2r}^{\;2}}{\Phi_{22}} + \frac{X_{3r}^{\;2}}{\Phi_{33}} + \frac{X_{4r}^{\;2}}{\Phi_{44}} + \frac{X_{5r}^{\;2}}{\Phi_{55}} = 1\,,\\
&\frac{X_{1r}\,X_{1s}}{\Phi_{11}} + \frac{X_{2r}\,X_{2s}}{\Phi_{22}} + \frac{X_{3r}\,X_{3s}}{\Phi_{33}} + \frac{X_{4r}\,X_{4s}}{\Phi_{44}} + \frac{X_{5r}\,X_{5s}}{\Phi_{55}} = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Siano ora

$$X_1\,\sigma_1 + X_2\,\sigma_2 + X_3\,\sigma_3 + X_4\,\sigma_4 + X_5\,\sigma_5 = 0\,,$$

$$x_1\,\Sigma_1 + x_2\,\Sigma_2 + x_3\,\Sigma_3 + x_4\,\Sigma_4 + x_5\,\Sigma_5 = 0$$

le equazioni d'una medesima sfera, riferita dapprima alle sfere σ_r, poi alle sfere Σ_r. Viste le (11) o le (14), le due equazioni coincideranno se si farà

$$(11)' \qquad \Phi_{rr}^{\frac{1}{2}} x_r = X_{r1} X_1 + X_{r2} X_2 + X_{r3} X_3 + X_{r4} X_4 + X_{r5} X_5$$

ovvero inversamente

$$(14)' \qquad X_r = \frac{X_{1r}}{\Phi_{11}^{\frac{1}{2}}} x_1 + \frac{X_{2r}}{\Phi_{22}^{\frac{1}{2}}} x_2 + \frac{X_{3r}}{\Phi_{33}^{\frac{1}{2}}} x_3 + \frac{X_{4r}}{\Phi_{44}^{\frac{1}{2}}} x_4 + \frac{X_{5r}}{\Phi_{55}^{\frac{1}{2}}} x_5.$$

Per un'altra sfera

$$Y_1 \sigma_1 + Y_2 \sigma_2 + Y_3 \sigma_3 + Y_4 \sigma_4 + Y_5 \sigma_5 = 0$$

od

$$y_1 \Sigma_1 + y_2 \Sigma_2 + y_3 \Sigma_3 + y_4 \Sigma_4 + y_5 \Sigma_5 = 0$$

sarà analogamente

$$\Phi_{1r}^{\frac{1}{2}} y_r = X_{r1} Y_1 + X_{r2} Y_2 + X_{r3} Y_3 + X_{r4} Y_4 + X_{r5} Y_5,$$

$$Y_r = \frac{X_{1r}}{\Phi_{11}^{\frac{1}{2}}} y_1 + \frac{X_{2r}}{\Phi_{22}^{\frac{1}{2}}} y_2 + \frac{X_{3r}}{\Phi_{33}^{\frac{1}{2}}} y_3 + \frac{X_{4r}}{\Phi_{44}^{\frac{1}{2}}} y_4 + \frac{X_{5r}}{\Phi_{55}^{\frac{1}{2}}} y_5,$$

dalle quali formole e dalle (11)', (14) si ha subito

$$X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3 + X_4 Y_4 + X_5 Y_5 =$$

$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + x_5 y_5,$$

vale a dire, la forma bilineare Φ (X Y) è trasformata in sè stessa.

34.° Possiamo dunque ritenere una sfera qualunque dello spazio S' riferita mediante le coordinate $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$ alle cinque sfere fondamentali Σ; essa è definita dai rapporti fra le sue coordinate x. La condizione di ortogonalità di due sfere x, y è

$$\Phi(xy) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + x_5 y_5 = 0$$

e come caso particolare la condizione che una sfera sia ortogonale a sè medesima, vale a dire ch'essa si riduca ad un punto è

$$\Phi(xx) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0.$$

La condizione che due sfere x, y si tocchino è

$$\Phi_2(xy) - \Phi(xx)\,\Phi(yy) = 0$$

e la condizione per l'intersecarsi sotto un angolo di dato coseno k

$$\Phi_2(xy) - k^2\,\Phi(xx)\,\Phi(yy) = 0.$$

Le medesime coordinate $x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5$ determinano nello spazio S due rette, reciproche rispetto al complesso C, e distinte fra loro mediante il segno di $\sqrt{\Phi(xx)}$. Le rette dello spazio S sono così riferite ai cinque complessi rappresentati dalle equazioni $x_1 = 0, x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0$, i quali sono a due a due in involuzione, e tutti poi in involuzione col complesso C.

Ponendo $\sqrt{\Phi(xx)} = i\,x_6$, si hanno le coordinate di KLEIN.