

LE FIGURE RECIPROCHE NELLA STATICA GRAFICA. [103]

 Terza edizione, Milano, U. Hoepli, 1879. [104]

1.

È notissima la teoria delle figure reciproche nello spazio che emerge dalla considerazione di un sistema di forze applicate ad un corpo rigido e libero *). Per un punto qualunque M dello spazio passano infiniti assi, rispetto a ciascuno de' quali il momento del sistema è nullo; ed il luogo geometrico di tali assi è un piano μ , che MÖBIUS chiama *Nulllebene* del punto M. Viceversa, un piano qualsivoglia μ contiene infiniti assi di momento nullo, i quali tutti concorrono in uno stesso punto M, detto da MÖBIUS il *Nullpunkt* del piano μ . Invece di *Nullpunkt* e di *Nulllebene* io dirò *polo* e *piano polare*.

Per tal modo, ad ogni punto M dello spazio corrisponde un piano μ passante per M, e viceversa ad ogni piano μ corrisponde un punto M situato in μ . Se il polo M si muove in un dato piano α , il piano polare μ passa costantemente per un punto fisso A, che è

*) Ovvero dalle proprietà geometriche dello spostamento, infinitesimo o finito, di un corpo, o dalla teoria delle cubiche gobbe o da quella de' complessi di rette di 1.º grado, ecc. Veggansi: GIORGINI, *Sopra alcune proprietà dei piani dei momenti principali e delle coppie di forze equivalenti*. (Memorie della Società Italiana, tomo XX, Modena, 1828).

MÖBIUS, *Ueber eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume* (CRELLE's Journal für Mathematik, X Bd., Berlin, 1833 [ovvero, *Gesammelte Werke*, Leipzig, vol. I, p. 489, 1883]). — *Lehrbuch der Statik* (Leipzig, 1837), I Th. p. 144.

CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, etc.* (Bruxelles, 1827), p. 227, 413, 674-679, 684-686. — *Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide dans l'espace* (Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, t. XVI, Paris, 1843).

STAUDT, *Geometrie der Lage* (Nürnberg, 1847), p. 191.

JONQUIÈRES, *Mélanges de géométrie pure* (Paris, 1856), p. 1-31.

REYE, *Die Geometrie der Lage* [Dritte Auflage (Leipzig, 1892), zweite Abth., p. 165].

il polo di α ; e viceversa, il luogo dei poli di tutt'i piani passanti per un punto A è un piano α , polare di A.

Se il polo percorre una retta, il piano polare gira intorno ad un'altra retta. Due rette così fatte diconsi *conjugate o reciproche*; ciascuna di esse è ad un tempo il luogo dei poli de' piani passanti per l'altra e l'involuppo de' piani polari de' punti dell'altra.

Si sa che il dato sistema può in infinite maniere essere ridotto a due forze; scelta ad arbitrio la linea d'azione di una di esse, la linea d'azione dell'altra riesce univocamente determinata, giacchè le due linee di azione devono essere rette conjugate.

2.

Ad un fascio di piani paralleli corrispondono come poli i punti di una retta di direzione determinata; vale a dire, ad una retta situata a distanza infinita è conjugata una retta il cui punto I all'infinito è il polo del piano all'infinito. A tutt'i fasci di piani paralleli corrispondono di tal guisa tutte le rette (fra loro parallele) passanti per I: fra queste ve n'è una, detta asse *centrale* del sistema, che è perpendicolare al corrispondente fascio di piani paralleli.

In altre parole: ogni retta parallela all'asse centrale ha la sua conjugata a distanza infinita; ogni piano parallelo all'asse centrale ha il suo polo all'infinito.

3.

A due rette conjugate qualsivogliano compete la seguente proprietà: la loro minima distanza è una retta che sega ortogonalmente l'asse centrale. Donde segue che, *se si proiettano le due rette reciproche parallelamente all'asse centrale e sopra un piano perpendicolare al detto asse, le due proiezioni saranno rette parallele.*

4.

Facilmente si riconosce che:

1.º a più rette r dello spazio, le cui proiezioni coincidano in una sola retta, corrispondono rette r' , le cui proiezioni sono coincidenti o parallele, secondochè le r (necessariamente contenute in un piano parallelo all'asse centrale) siano o non siano parallele;

2.º a più rette r dello spazio, le cui proiezioni siano parallele, corrispondono rette r' , le cui proiezioni sono coincidenti o parallele, secondochè le r (necessariamente parallele ad uno stesso piano per l'asse centrale) sono parallele o no.

5.

Suppongo orizzontale l'asse centrale, e denomino *ortografico* il piano di proiezione, che incontrerà l'asse centrale nel proprio polo. Posta in questo punto l'origine degli assi

delle coordinate rettangolari x, y, z , l'ultimo dei quali coincida coll'asse centrale, la suesposta legge di corrispondenza reciproca sarà espressa dalle seguenti formole. Il punto $x_1 y_1 z_1$ è il polo del piano

$$x y_1 - y x_1 + k(z - z_1) = 0,$$

dove k è una costante. Viceversa, al piano

$$a x + b y + c z + d = 0$$

corrisponde il polo

$$x = -\frac{k b}{c}, y = \frac{k a}{c}, z = -\frac{d}{c}.$$

E la retta

$$a x + b y + c = 0$$

$$p x + q y + r z = 0$$

è conjugata all'altra retta

$$a x + b y + c' = 0$$

$$p x + q y + r' z = 0,$$

dove

$$r c' = r' c = k(a q - b p).$$

6.

Dirò *reciproci* due poliedri, se i vertici del primo sono i poli delle facce del secondo, così che anche le facce del primo saranno porzioni dei piani polari de' vertici del secondo, e gli spigoli dell'uno saranno ordinatamente conjugati agli spigoli dell'altro.

Siccome ogni polo giace nel rispettivo piano polare, così ciascuno de' due poliedri reciproci è simultaneamente inscritto e circoscritto all'altro. Per es. siano A B C D i vertici di un tetraedro, $\alpha \beta \gamma \delta$ le facce del tetraedro reciproco; i piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ passano pei rispettivi poli A, B, C, D: ed i vertici $\beta\gamma\delta, \gamma\alpha\delta, \alpha\beta\delta, \alpha\beta\gamma$ giacciono ne' rispettivi piani polari BCD, CAD, ABD, ABC *).

Proiettinsi ora i due poliedri sul piano ortografico; le proiezioni saranno due figure dotate di proprietà reciproche. Ad ogni lato della prima figura corrisponderà un lato parallelo della seconda, due lati corrispondenti essendo le proiezioni di spigoli conjugati de' due poliedri. Se l'un poliedro ha un angolo solido, nel cui vertice concorrano m spigoli,

*) MÖBIUS, *Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden eine jede in Bezug auf die andere um- und eingeschrieben zugleich sein?* (CRELLE's Journal, III Bd., 1828 (ovvero, *Gesammelte Werke* vol., I, p. 439)). — *Lehrbuch der Statik*, I Th., p. 156-158. — *Ueber eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume* (CRELLE's Journal, X Bd., p. 324 e seg.).

l'altro avrà una faccia poligonale di m lati; epperò, considerando le due figure ortografiche, se nell'una vi sono m lati divergenti da un punto o *nodo*, gli m lati corrispondenti nell'altra saranno i lati di un poligono chiuso.

In un poliedro, ogni spigolo è comune a due facce e unisce due vertici; ogni faccia ha almeno tre spigoli, ed anche in ogni vertice concorrono almeno tre spigoli; dunque in ciascuna delle due figure ortografiche, ogni lato sarà comune a due poligoni e congiungerà due nodi, in ogni nodo concorreranno almeno tre lati, come ogni poligono avrà tre o più lati.

Supposto che l'un poliedro, epperò anche l'altro, sia *semplicemente connesso* *), la somma dei numeri de' vertici e delle facce supererà di 2 il numero degli spigoli, secondo il notissimo teorema di EULERO. Dunque, se la prima figura ortografica ha p nodi, p' poligoni ed s rette, sarà

$$p + p' = s + 2.$$

La seconda figura avrà p' nodi, p poligoni ed s rette.

7.

Se l'un poliedro ha un vertice all'infinito, all'altro spetta una faccia perpendicolare al piano ortografico, e viceversa; cioè, se una delle due figure ortografiche ha un vertice all'infinito, l'altra contiene un poligono, tutt'i lati del quale cadono in una stessa retta: e viceversa.

Se pel primo poliedro, il punto I all'infinito dell'asse centrale è il vertice comune ad n facce, l'altro poliedro avrà nel piano all'infinito una faccia poligonale di n lati. In questo caso, la prima figura ortografica ha $p - 1$ nodi, $p' - n$ poligoni ed $s - n$ rette; e la seconda (prescindendo dalla retta all'infinito) ha $p - 1$ poligoni, $p - n$ nodi ed $s - n$ rette: dove i numeri p , p' , s s'intendono ancora legati dalla relazione $p + p' = s + 2$.

8.

Questi *diagrammi reciproci*, che si ottengono come proiezioni ortografiche di due poliedri reciproci, s'incontrano per via diretta nella *statica grafica*. La proprietà meccanica dei diagrammi reciproci è espressa dal seguente teorema, dovuto all'illustre prof. CLERK MAXWELL **):

« If forces represented in magnitude by the lines of a figure be made to act between the extremities of the corresponding lines of the reciprocal figure, then the points of the reciprocal figure will all be in equilibrium under the action of these forces ».

*) {TODHUNTER, *Spherical Trigonometry*, Chapter XIII, Polyhedra.}

**) *Philosophical Magazine*, aprile 1864, p. 258.

La verità del teorema si rende subito manifesta, osservando che le forze applicate ad un nodo qualunque del secondo diagramma sono parallele e proporzionali ai lati di un poligono chiuso nel primo diagramma. Il teorema è precipuamente utile, quando se ne fa applicazione alla determinazione grafica degli *sforzi interni nelle travature reticolari*.

9.

I primi germi di questa teoria si possono ricercare nelle proprietà del *poligono delle forze*, i cui lati rappresentino in grandezza e direzione un sistema di forze applicate ad un punto ed equilibrate; e nelle note costruzioni geometriche che danno le tensioni dei lati di un poligono funicolare piano *). Ma chi ha iniziato l'applicazione alle travature reticolari è il prof. MACQUORN RANKINE, che all'art. 150 del suo eccellente *Manual of applied Mechanics* (1857) dimostrò il teorema;

« If lines radiating from a point be drawn parallel to the lines of resistance of the bars of a polygonal frame, then the sides of any polygon whose angles lie in those radiating lines will represent a system of forces, which, being applied to the joints of the frame, will balance each other; each such force being applied to the joint between the bars whose lines of resistance are parallel to the pair of radiating lines that enclose the side of the polygon of forces, representing the force in question. Also, the lengths of the radiating lines will represent the stresses along the bars to whose lines of resistance they are respectively parallel **).

Il medesimo sig. RANKINE pubblicò più tardi ***) un teorema analogo per le *polyhedral frames*.

10.

Però la teoria geometrica de' diagrammi reciproci si deve propriamente al prof. CLERK MAXWELL, il quale prima nel 1864 †) e poi di nuovo nel 1870 ††) ne diede la definizione generale e li dedusse dalla proiezione di due poliedri reciproci. Se non che, i poliedri del ch. A. sono reciproci nel senso della *teoria delle figure polari reciproche di PONCELET* †*), *relative ad un certo paraboloide di rotazione* in modo che nelle proiezioni (ortogonali e parallele all'asse) i lati corrispondenti non riescono paralleli, ma perpendicolari fra loro; ond'è

*) VARIGNON, *Nouvelle Mécanique ou Statique, dont le projet fut donné en 1687*, Paris, 1725.

**) Pag. 140 della sesta edizione (1872). Ben inteso che la travatura o *frame*, di cui parla qui l'A., è un semplice poligono.

***) *Philosophical Magazine*, febbraio 1864, p. 92.

†) *On reciprocal figures and diagrams of forces* (*Phil. Magazine*, aprile 1864, p. 250).

††) *On reciprocal figures, frames and diagrams of forces* (*Transactions of the R. Society of Edinburgh*, vol. XXVI, p. 1). Vedi anche una lettera di M. RANKINE nel giornale *the Engineer*, 16 febbraio 1872.

†*) O, se si vuole, di MONGE. Vedi CHASLES, *Aperçu historique*, p. 378.

che uno de' diagrammi dev'essere fatto rotare di 90° nel proprio piano, affinchè assuma quella posizione che è richiesta dal problema statico. Invece, col metodo ch'io propongo qui, le proiezioni ortografiche di due poliedri reciproci danno senz'altro i diagrammi, quali si ottengono nella statica grafica.

11.

L'applicazione pratica del metodo delle figure reciproche è il soggetto di una Memoria che il prof. FLEEMING JENKIN comunicò nel marzo 1869 alla Società reale di Edimburgo *); nella quale l'A., dopo aver citata la definizione delle figure reciproche, e la proprietà statica, come la enuncia MAXWELL nel suo lavoro del 1864, aggiunge:

« Few engineers would, however, suspect that the two paragraphs quoted put at their disposal a remarkably simple and accurate method of calculating the stresses in framework; and the author's attention was drawn to the method chiefly by the circumstance that it was independently discovered by a practical draughtsman, Mr. TAYLOR, working in the office of the well-known contractor, Mr. J. B. COCHRANE ».

L'A. presenta un buon numero di esempi illustrati con figure, e finisce coll'osservare:

« When compared with algebraic methods, the simplicity and rapidity of execution of the graphic method is very striking; and algebraic methods applied to frames, such as the Warren girders, in which there are numerous similar pieces, are found to result in frequent clerical errors, owing to the cumbrous notation which is necessary, and especially owing to the necessary distinction between odd and even diagonals ».

12.

Ma quando si parla di risoluzioni geometriche de' problemi della scienza delle costruzioni, non si può certamente tacere del prof. CULMANN, l'ingegnoso e benemerito creatore della statica grafica **), al quale è dovuto se i metodi spicci ed eleganti di questa

*) *On the practical application of reciprocal figures to the calculation of strains on framework* (Transactions of the R. Society of Edinburgh, vol. XXV, p. 441). Dello stesso A. veggasi anche *On braced arches and suspension bridges*, read before the R. Scottish Society of arts (Edinburgh 1870); e la Memoria *On the application of graphic methods to the determination of the efficiencies of machinery* (Transactions of the R. Society of Edinburgh, vol. XXVIII, 1877, p. 1).

**) *Die graphische Statik*, Zurich, 1866. Nel 1875 è venuta in luce la 2.^a edizione del 1.^o tomo con ricche aggiunte [cfr. la prefazione e i n. 81 82]. Siccome quest'opera insigne non è esente da difficoltà gravi, specialmente per chi non è familiarizzato colla geometria proiettiva, così si è saviamente pensato di aiutare la diffusione di queste preziose dottrine per mezzo di trattati più elementari. Veggasi: K. von OTT, *Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik*, Prag, 1871 (3.^a edizione, 1874); — J. BAUSCHINGER, *Elemente der graphischen*

scienza, usciti dalla scuola di Zurigo, vengono ora insegnati in parecchi politecnici di Germania (e da ben cinque anni anche nell'Istituto tecnico superiore di Milano *)). Tutte le quistioni di statica teorica, come pur quelle che appartengono ai singoli rami delle pratiche applicazioni, sono risolte dal prof. CULMANN con uniforme e semplice procedimento, che in sostanza si riduce alla costruzione delle due figure ch'egli denomina *Kräftepolygon* e *Seilpolygon*. E benchè egli non le consideri come figure reciproche, nel senso della teoria di MAXWELL, tuttavia esse sono tali sostanzialmente; ed in particolare, le costruzioni geometriche che il CULMANN dà nel 5.^o Abschnitt della sua Opera, consacrato ai sistemi reticolari (*das Fachwerk*), coincidono quasi sempre con quelle che si dedurrebbero dai metodi del MAXWELL medesimo. Anzi le costruzioni di CULMANN comprendono anche quei casi (non isfuggiti al geometra inglese), ne' quali i diagrammi reciproci non sono possibili.

13.

Prima di tutto voglio mettere in evidenza che il *Kräftepolygon* ed il *Seilpolygon* (poligono delle forze, poligono funicolare) di CULMANN si possono ridurre a diagrammi reciproci.

Date in un piano (che supporrò sempre essere il piano ortografico) n forze $P_1, P_2, \dots, P_n$, che si facciano equilibrio, per *poligono delle forze* s'intende un poligono i cui lati $1, 2, \dots, n$ siano *equipollenti* **) alle rette che rappresentano quelle forze ***). Preso un punto O (nello stesso piano), che dirò *polo* del poligono tracciato, si proiettino da esso i vertici del poligono medesimo; e si denomini (r s) il raggio che proietta il vertice comune ai lati r, s . Ora per *poligono funicolare*, corrispondente al polo O , s'intende un altro poligono i cui

Statik, München, 1871; — ed il 2.^o Abschnitt dell'opera di F. REAULEAUX, *Der Constructeur* (3.^a edizione), Braunschweig, 1869; — L. KLASSEN, *Graphische Ermittlung der Spannungen in den Hochbau- und Brückenbau-Construction*; Leipzig, 1878; — G. HERMANN, *Zur graphischen Statik der Maschinengetriebe*; Braunschweig, 1879; — G. SIDENAM CLARKE, *The principles of graphic Statics*; London, 1880; — J. B. CHALMERS, *Graphical determination of forces in engineering structures*; London, 1881; — K. STELZEL, *Grundzüge der graphischen Statik und deren Anwendung auf den kontinuierlichen Träger*; Graz, 1882; M. MAURER, *Statique graphique appliquée aux constructions*; Paris, 1882; oltre a parecchie Memorie meno estese e riguardanti argomenti speciali, dei signori MOHR, HARLACHER, W. RITTER, E. WINKLER, ecc. Che in Inghilterra, oltre agli autori già citati, altri matematici abbiano portata la loro attenzione sulla statica grafica risulta dai *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. III, pp. 233, 320-322. Veggasi inoltre: C. UNWIN, *Wrought iron bridges and roofs*; London, 1869. — Per le pubblicazioni posteriori veggasi la nota in fine.

*) Questo fu scritto nel 1872. Ora si può aggiungere « ed in tutte le scuole italiane per gli Ingegneri ».

**) Uguali in grandezza, direzione e senso; denominazione che prendo dal prof. BELLAVITIS.

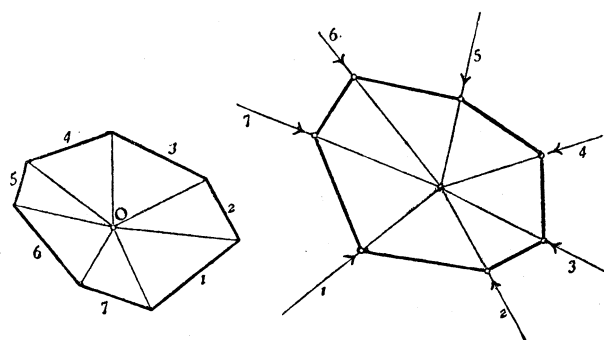
***) Nel costruire questo poligono, la posizione del primo vertice è arbitraria.

vertici cadano nelle linee d'azione (che denominerò $1, 2, \dots, n$) delle forze $P_1, P_2, \dots, P_n$, ed i cui lati siano rispettivamente paralleli ai raggi per O^* : in modo che il lato compreso fra le linee d'azione di P_r, P_s , sia parallelo al raggio (rs), epperò esso medesimo sia indicato col simbolo (rs).

Il poligono funicolare risulterà chiuso, al pari del poligono delle forze.

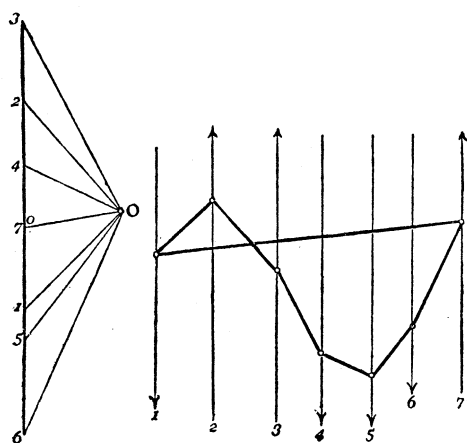
14.

Se le linee d'azione delle forze date, fossero concorrenti in uno stesso punto (fig. 1.^a), si avrebbero già così due diagrammi reciproci: che evidentemente sarebbero le proiezioni ortografiche di due piramidi n -edre.

Fig. 1.^a

Se le forze sono parallele, il poligono delle forze si ridurrà ad una retta, ossia la base

della prima piramide sarà perpendicolare al piano ortografico; ed il vertice della seconda cadrà all'infinito; vale a dire, il secondo poliedro sarà un prisma avente una sola base a distanza finita. Questo caso è illustrato dalla fig. 2.^a, dove i lati del poligono delle forze sono indicati, non già da un solo numero $1, 2, 3, \dots$, ma da due numeri posti ai termini di ciascun segmento; così che i segmenti $01, 12, 23, 34, \dots$ corrispondono alle rette $1, 2, 3, 4, \dots$ del secondo diagramma.

Fig. 2.^a

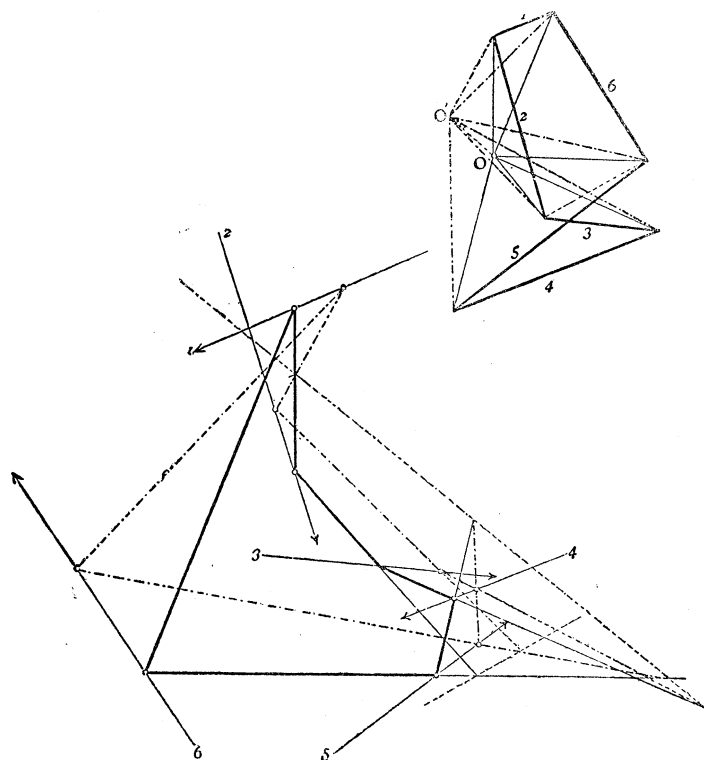
Qui, come in seguito, si adoperano *nel testo* due serie di numeri $1, 2, 3, \dots, r, \dots, s, \dots$, $1, 2, 3, \dots, r, \dots, s, \dots$, per distinguere le

linee di un diagramma dalle corrispondenti dell'altro.

*) Nella costruzione di questo poligono, il primo lato è dato soltanto in direzione.

15.

Consideriamo ora il caso generale, che le forze non concorrano in uno stesso punto. Assumasi un secondo polo O' , si congiunga ai vertici del poligono delle forze mediante rette, e costruisca un secondo poligono funicolare, corrispondente al polo O' ; cioè un poligono, i cui vertici cadano sulle linee d'azione delle forze, ed i cui lati siano risp. paralleli ai raggi uscenti da O' . Vedi le fig. 3.^a e 5.^a, nelle quali i raggi uscenti dal secondo polo, come pure il corrispondente poligono funicolare, sono segnati a tratti non continui.

Fig. 3.^a

Per tal modo il diagramma costituito dal poligono delle forze e dei raggi proiettanti per O e per O' , ed il diagramma costituito dai due poligoni funicolari e dalle linee d'azione delle forze sono manifestamente reciproci. Il primo è la proiezione di un poliedro *) for-

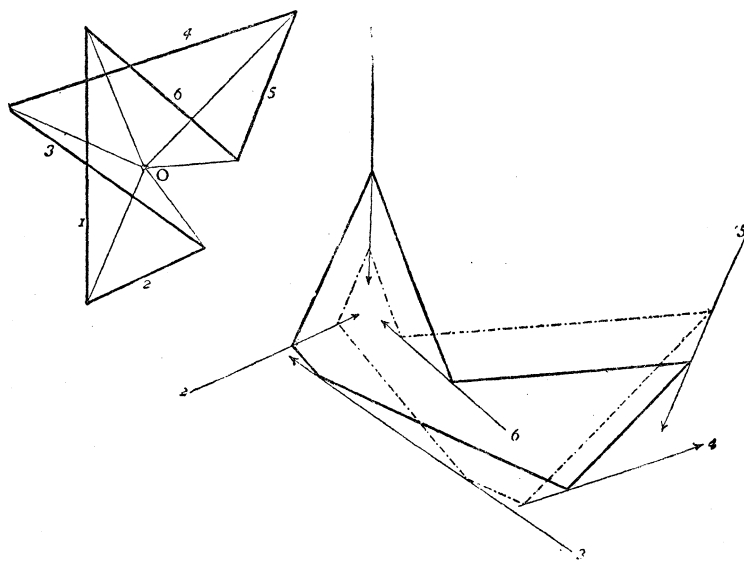
*) Questo poliedro ha $3n$ spigoli, $2n$ facce triangolari, 2 angoli n -edri ed n angoli 4-edri. L'altro poliedro ha $3n$ spigoli, $2n$ angoli triedri, 2 basi che sono poligoni di n lati, ed n facce quadrilateri.

mato da due angoli solidi n -edri le cui facce corrispondenti si seghino lungo il contorno di un poligono gobbo *) di n lati; il secondo è la proiezione di un poliedro compreso fra due poligoni piani di n lati, tali che i lati dell'uno incontrino ordinatamente i lati corrispondenti dell'altro.

La retta che nello spazio congiunge i vertici de' due angoli n -edri del primo poliedro è la conjugata di quella che è comune ai piani delle due basi del secondo poliedro. Donde segue, attesa la proprietà che due rette conjugate hanno di proiettarsi ortograficamente in due rette parallele, che due lati corrispondenti qualunque (rs) , $(rs)'$ de' due poligoni funicolari si segano sopra una retta fissa, che è parallela alla congiungente de' due poli O , O' . Questo teorema è fondamentale per i metodi del CULMANN.

16.

Se i poli O , O' si fanno coincidere, i lati corrispondenti de' due poligoni funicolari saranno paralleli (fig. 4.^a). In tal caso, la retta che congiunge i vertici degli angoli n -edri

Fig. 4.^a

del primo poliedro è perpendicolare al piano ortografico; mentre le basi del secondo poliedro sono parallele.

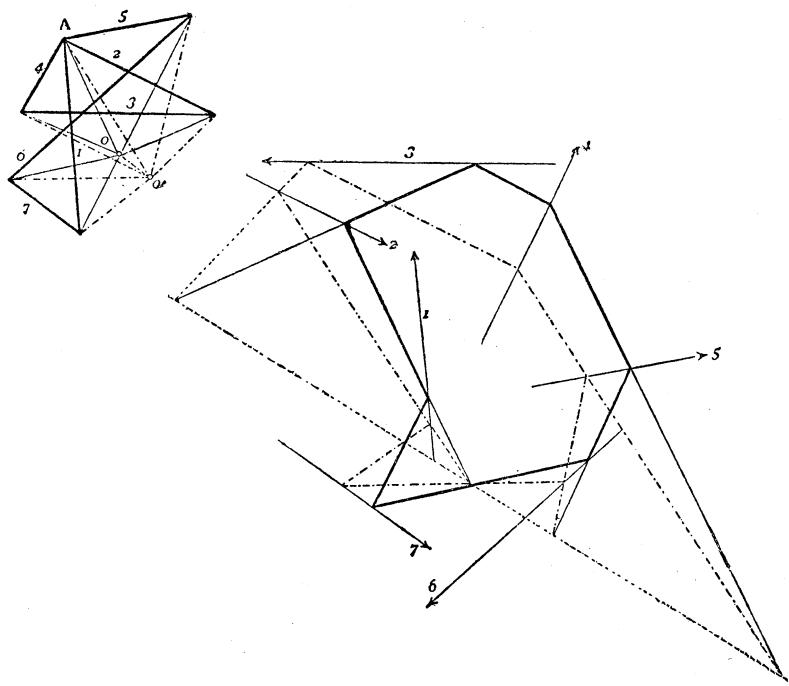
*) È evidente che, se questo poligono diviene una curva continua, il poligono delle forze e i poligoni funicolari diventano rispettivamente la curva delle forze, e le curve funicolari di un sistema continuo di forze in un piano. }

17.

La diagonale fra i vertici di due angoli tetraedri del primo poliedro (n.º 15), ossia la diagonale fra due vertici del poligono gobbo, è coniugata all'intersezione delle corrispondenti facce quadrilateri del secondo poliedro, la quale congiunge il punto comune a due lati di una base col punto comune ai lati corrispondenti dell'altra base. Nella proiezione ortografica la prima retta dà una diagonale fra due vertici $(r \cdot r + 1)$, $(s \cdot s + 1)$ del poligono delle forze, ossia una retta equipollente alla risultante delle forze P_{r+1} , $P_{r+2}, \dots, P_s$; la seconda retta darà la linea d'azione della risultante medesima. Dunque la linea d'azione della risultante di un numero qualunque di forze consecutive P_{r+1} , $P_{r+2}, \dots, P_s$ passa pel punto comune ai lati $(r \cdot r + 1)$, $(s \cdot s + 1)$ del poligono funicolare: altro teorema fondamentale nella statica grafica. Veggasi per es. nella fig. 3.^a la risultante delle forze 6, 1, 2.

18.

Se l'accennata diagonale del primo poliedro è perpendicolare al piano ortografico, la

Fig. 5.^a

retta coniugata sarà all'infinito. Allora, nel poligono delle forze coincideranno i due vertici $(r \cdot r + 1)$, $(s \cdot s + 1)$ in un solo punto A (vedi fig. 5.^a, dove $r = 1$, $s = 4$), ed in

ciascuno de' poligoni funicolari saranno paralleli i lati $(r . r + 1)$, $(s . s + 1)$. La risultante delle forze $P_{r+1}, P_{r+2}, \dots, P_s$ avrà dunque una grandezza evanescente e la sua linea d'azione cadrà nella retta all'infinito del piano ortografico: essa risultante sarà una forza infinitamente piccola e lontana, equivalente ad una coppia di forze agenti secondo i predetti lati paralleli del poligono funicolare e rappresentate in grandezza dalla retta che congiunge il corrispondente polo O al punto A . Siccome queste due forze equivalgono al sistema delle $P_{r+1}, P_{r+2}, \dots, P_s$, così il senso di quella che agisce secondo il lato $(r . r + 1)$ è da A verso O ; e il senso dell'altra, agente secondo il lato $(s . s + 1)$, è da O verso A .

19.

Date le forze $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$ (n.º 13), i due poligoni (delle forze e funicolare) servono a determinare la P_n , uguale ed opposta alla risultante delle date (vedi la fig. 3.^a, dove $n = 5$). Infatti, costruita la linea spezzata $1 . 2 . 3 \dots n - 1$, i cui lati siano equipollenti alle forze date, la retta n che ne congiunge gli estremi (diretta dal termine all'origine della spezzata) sarà equipollente a P_n . Indi, assunto un polo O , costruiscasi un poligono (funicolare), i cui primi $n - 1$ vertici $1, 2, 3, \dots, n - 1$ cadano nelle linee d'azione delle forze date $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$, ed i cui lati $(n . 1), (1 . 2), (2 . 3), \dots, (n - 1 . n)$ siano risp. paralleli ai raggi che da O proiettano i vertici omonimi del primo poligono. Allora la retta che passa per l'ultimo vertice n del poligono funicolare, vale a dire pel punto di concorso del primo lato $(n . 1)$ coll'ultimo $(n - 1 . n)$, ed è parallela all'ultimo lato n del poligono delle forze, sarà la linea d'azione di P_n .

Suppongo che il primo lato del poligono funicolare debba passare per un punto fisso, e si faccia muovere il polo O in linea retta; anche gli altri lati ruoteranno intorno ad altrettanti punti fissi, allineati col primo in una retta parallela al luogo del polo (n.º 15). Ciò rientra nel celebre porisma di PAPP0:

« Si quocumque rectæ lineæ sese mutuo secant, non plures quam duæ per idem punctum, omnia autem in una ipsarum data sint, et reliquorum multitudinem habentium triangulum numerum, hujus latus singula habet puncta tangentia rectam lineam positione datam, quorum trium non ad angulum existens trianguli spacii unumquodque reliquum punctum rectam lineam positione datam tangent *) ».

20.

Se consideriamo il punto O come suscettibile di prendere una posizione qualsivoglia

*) *Mathematicæ Collectiones*, prefazione al libro VII, p. 162 dell'edizione di COMMANDINO (Venetiis, 1589). Veggasi la traduzione o parafrasi del porisma, fatta da PONCELET al n.º 498 del suo *Traité des propriétés projectives* (Paris, 1822).

nel piano, le proprietà dei due poligoni (delle forze e funicolare) si possono compendiare nel seguente enunciato geometrico:

Sia dato un poligono piano di n lati $1, 2, 3, \dots, n-1, n$; e nello stesso piano siano inoltre date $n-1$ rette $1, 2, 3, \dots, n-1$ risp. parallele ai primi $n-1$ lati del poligono. Da un punto o polo, mobile nel piano (senz'alcuna restrizione), s'intendano proiettati i vertici del poligono dato. Ora si immagini un poligono variabile di n lati, i primi $n-1$ vertici del quale $1, 2, 3, \dots, n-1$ debbano trovarsi ordinatamente nelle rette date omonime, mentre gli n lati $(n.1), (1.2), (2.3), \dots, (n-1.n)$ debbano essere paralleli ai raggi che dal polo proiettano i vertici omonimi del poligono dato. Il punto di concorso di due lati qualsivogliano $(r.r+1), (s.s+1)$ del poligono variabile cadrà in una retta determinata, parallela alla diagonale fra i vertici $(r.r+1), (s.s+1)$ del poligono dato.

Questo teorema la cui dimostrazione per mezzo della sola *geometria piana* non pare ovvia, risulta invece a dirittura evidente, se si considerano le figure piane come proiezioni ortografiche di poliedri reciproci.

21.

Il poligono delle forze è la proiezione di un poligono piano o di un poligono storto, secondochè le forze P siano o non siano concorrenti in un punto. Come s'è veduto al n.º 14, nel primo caso i due diagrammi reciproci sono semplicemente costituiti l'uno dal poligono delle forze e dal polo O , l'altro dalle linee d'azione delle forze e dal poligono funicolare corrispondente ad O . Invece nel secondo caso (n. 15) è d'uopo aggiungere al primo diagramma un altro polo O' , ed al secondo un altro poligono funicolare corrispondente ad O' . Si è pur veduto (n.º 16) che i due poli si possono assumere coincidenti, e allora il primo diagramma riesce il più semplice possibile. Ma se invece si volesse semplificare il secondo, gioverebbe portare il polo O' a distanza infinita, in una direzione arbitraria; il poliedro la cui proiezione ortografica è il primo diagramma, avrebbe all'infinito il vertice di uno de' suoi angoli n -edri; e siccome il piano polare di un punto all'infinito è parallelo all'asse centrale, così il nuovo poligono funicolare, corrispondente ad O' , avrebbe tutti i suoi lati distesi in una stessa linea retta (il cui punto all'infinito è O'). La posizione assoluta di questa retta nel piano ortografico è ancora arbitraria, epperò si potrebbe portarla a distanza infinita.

Si ha un risultato ancor più semplice nel modo seguente. Suppongasì che il primo poliedro abbia il vertice dell'anzidetto suo angolo n -edro nel punto all'infinito dell'asse centrale; nel primo diagramma scompare allora assolutamente il polo O , giacchè gli spi-

goli di quell'angolo n -edro si proiettano ortograficamente nei vertici del poligono delle forze. Il piano polare del vertice è ora il piano all'infinito; dunque il secondo poligono funicolare cadrà tutto a distanza infinita (cfr. n.º 7).

22.

Concludo da ciò l'aspetto più semplice, sotto il quale si possono riguardare come diagrammi reciproci il poligono delle forze e il poligono funicolare di un sistema di n forze equilibrate, situate in un piano (il piano ortografico), ma non concorrenti in uno stesso punto. L'un diagramma sia costituito dal poligono delle forze e dai raggi che ne proiettano i vertici da un polo O ; l'altro dalle linee d'azione delle forze, dal poligono funicolare e dalla retta all'infinito. Il primo diagramma è la proiezione d'un poliedro le cui facce si ottengono col proiettare gli n lati d'un poligono gobbo sì perpendicolarmente al piano ortografico, sì da un punto dello spazio a distanza finita. Il poliedro reciproco, la cui proiezione è il secondo diagramma, è la porzione (infinita) di spazio contenuta da un poligono piano e da n piani passanti ordinatamente pei lati del medesimo ed estesi sino al piano all'infinito.

23.

Passo ora a diagrammi più complicati, quali si presentano nella teoria delle travature reticolari *). Siano s, s' due superficie poliedriche reciproche, che posseggono un orlo o contorno, che sono semplicemente connesse, e i cui contorni sono due poligoni chiusi sghembi **); p il poliedro formato da s e dalla superficie piramidale, il cui vertice sia un punto o fissato ad arbitrio nello spazio, e la cui linea direttrice sia il contorno poligonale di s ; e p' il poliedro reciproco di p , ossia il poliedro contenuto dalle facce di s' , dai piani degli angoli dell'orlo di s' e dal piano ω polare di o . Proiettando ortografica-

*) [Dicesi *travatura reticolare* un sistema piano di aste rettilinee riunite agli estremi per nodi o articolazioni. Sia AB un'asta qualunque (il cui peso è trascurato) di una tale travatura; e supponiamo che nessuna forza agisca sopra di essa, fuorchè ai nodi A, B . Allora l'insieme delle forze che agiscono su di essa nel nodo A (alcune esterne, alcune consistenti in pressioni esercitate sull'asta medesima da quella o da quelle che l'incontrano nel nodo A) possono essere ridotte ad una sola risultante: lo stesso per quelle che agiscono al nodo B ; e queste risultanti, essendo necessariamente eguali ad opposte, debbono agire secondo l'asta AB . Quindi l'asta è in un semplice stato di *tensione* quando queste risultanti agiscono all'infuori, o di *compressione* quando agiscono verso l'interno. Un'asta è chiamata *un tirante* quando è in tensione, *un puntone* quando è in compressione (CROFTON, *Lectures on Applied Mechanics, at the Royal Military Academy*, London, 1877)]. [cfr. n. 31].

**) Se l'orlo di s è un poligono piano di n lati, quello di s' sarà un punto, vertice di un angolo n -edro.

mente i due poliedri, si avranno i due diagrammi reciproci, che qui si vogliono prendere in considerazione.

L'orlo di $\mathfrak{s}$ sia di n lati, e questa superficie abbia altri m spigoli *) e p facce. Il poliedro $\mathfrak{p}$ avrà $n + p$ facce e $2n + m$ spigoli, epperò $m + n - p + 2$ vertici. Dunque $\mathfrak{s}$ ha, fuori dell'orlo, $m - p + 1$ vertici **).

Reciprocamente $\mathfrak{p}'$ avrà $m + n - p + 2$ facce, $n + p$ vertici e $2n + m$ spigoli.

24.

Suppongo ora che la proiezione di $\mathfrak{s}'$ sia lo schema di una travatura reticolare dotata di p nodi e di m membri o pezzi rettilinei, per la quale le forze esterne abbiano a linee di azione le proiezioni degli spigoli all'orlo di $\mathfrak{s}'$, e siano rappresentate in grandezza dagli n lati del poligono che è proiezione dell'orlo di $\mathfrak{s}$ ***). Allora la proiezione di quella faccia di $\mathfrak{s}'$ che è nel piano ω sarà il poligono funicolare delle forze esterne, corrispondente al polo O , proiezione di $\mathfrak{o}$; e le proiezioni degli m spigoli di $\mathfrak{s}$, non appartenenti all'orlo, daranno le misure degli sforzi interni, ai quali sono soggetti i membri corrispondenti della travatura, in conseguenza del dato sistema di forze esterne.

25.

Se il punto $\mathfrak{o}$ si allontana all'infinito nella direzione perpendicolare al piano ortografico, il piano ω coinciderà col piano all'infinito. Allora il primo diagramma si ridurrà alla proiezione di $\mathfrak{s}$, cioè all'insieme delle rette che misurano le forze esterne e gli sforzi interni; ed il secondo diagramma, scomparendone affatto il poligono funicolare, conterrà soltanto lo schema della travatura (cioè le linee d'azione delle forze interne) e le linee d'azione delle forze esterne. Nelle figure che accompagnano questo scritto, il primo diagramma è indicato colla lettera $\mathfrak{b}$, il secondo colla lettera $\mathfrak{a}$.

26.

Se le forze esterne sono tutte parallele fra loro, come avviene assai di frequente nelle applicazioni pratiche, l'orlo di $\mathfrak{s}$ sarà un poligono tutto contenuto in un piano perpendicolare all'ortografico; epperò i lati del poligono delle forze esterne cadranno tutti in una sola e medesima retta.

*) Evidentemente è $m \equiv n$.

**) Laonde m non può essere minore di $p - 1$.

***). Perciò $\mathfrak{s}$ non dovrà avere alcun vertice a distanza infinita; vale a dire $\mathfrak{s}'$ non avrà alcuna faccia perpendicolare al piano ortografico.

27.

Altre forme poligonali degeneri possono offrire i diagrammi, le quali provengono da degenerazioni analoghe delle figure nello spazio.

Suppongasì per es. che nello spazio si abbia un angolo solido tetraedro, al quale corrisponderà nella figura reciproca una faccia quadrilatera; e che due spigoli (non opposti) dell'angolo solido accostandosi indefinitamente nel loro piano vengano a sovrapporsi l'uno all'altro; sicchè da ultimo l'angolo solido sarà ridotto al sistema composto di un triedro e di un piano passante per uno degli spigoli. Perciò anche nella faccia quadrilatera della figura reciproca vi saranno due lati che, senza cessare d'avere un vertice comune, verranno a trovarsi nella stessa direzione o in direzioni opposte.

Passando ora alle proiezioni ortografiche, si avrà nell'un diagramma un punto donde divergono quattro rette, due delle quali con direzioni sovrapposte; e nell'altro diagramma un quadrilatero con tre vertici in linea retta *).

28.

Dato lo schema di una travatura reticolare, e supposto conosciuto il sistema delle forze esterne, bisognerà anzi tutto costruire il poligono di queste forze, vale a dire un poligono i cui lati siano equipollenti alle forze esterne. Nelle figure qui unite, le forze esterne e i lati del poligono sono indicati coi numeri 1, 2, 3, ... per modo che, percorrendo il contorno del poligono nell'ordine crescente de' numeri, ciascun lato sia percorso nel senso della forza, che esso rappresenta. Questo modo di percorrere il contorno del poligono si chiamerà *l'ordine ciclico del contorno* medesimo.

Quando si tratta di costruire il diagramma reciproco a quello che è costituito dallo schema della travatura e dal sistema delle forze esterne, non è arbitrario l'ordine col quale si fanno succedere queste forze l'una all'altra per costruire il relativo poligono. L'ordine di cui si tratta è determinato dalla considerazione che segue. Nel poligono delle forze esterne, che fa parte del diagramma **b**, devono essere successivi i lati equipollenti a due forze, se le linee d'azione di queste appartengono al contorno di uno stesso poligono nel diagramma **a**; giacchè questo poligono corrisponde al vertice che è comune a quei due lati.

Si darà dunque l'indice 1 ad una qualunque delle forze esterne; la linea d'azione della forza prescelta è lato comune a due poligoni del diagramma **a**; ciascuno di questi ha nel proprio contorno la linea d'azione d'un'altra forza esterna; si hanno così due forze esterne, che possono riguardarsi come *contigue* alla forza 1, e sarà indifferente di attribuire all'una o all'altra l'indice 2; naturalmente l'altra avrà allora l'indice n , se n è il nu-

*) Esempi di queste forme degeneri si possono vedere a pag. 444 e nelle prime due tavole della citata Memoria del prof. FLEEMING JENKIN (1869), ed anche nella 9.^a delle nostre figure.

mero delle forze esterne. Dopo di ciò, non rimane più alcun che d'arbitrario o d'incerto nell'ordine col quale si avranno a disporre i lati del poligono delle forze esterne.

Supposto che i nodi ai quali sono applicate le forze esterne si trovino tutti sul contorno dello schema della travatura *), queste forze si dovranno prendere nell'ordine col quale sono incontrate da chi percorra il contorno suddetto. Quando non si seguano queste regole e le altre esposte più innanzi, si può ancora risolvere il problema della determinazione grafica degli sforzi interni, ma non si hanno più *diagrammi reciproci*, bensì figure più complicate o sconnesse, dove uno stesso segmento, non trovandosi al suo posto *conveniente*, dev'essere ripetuto o riportato per dar luogo alle costruzioni ulteriori **), come accadeva nel vecchio metodo di costruire separatamente un poligono delle forze per ciascun nodo della travatura.

29.

Formato così il poligono delle forze esterne, si completerà il diagramma **b**, costruendo successivamente i poligoni che corrispondono ai nodi della travatura. Il problema di costruire un poligono, i cui lati devono avere direzioni date, è determinato ogni qualvolta siano incogniti due soli lati. Perciò si dovrà incominciare da un nodo nel quale concorrano tre sole rette; le linee di resistenza di due membri della travatura e la linea d'azione di una forza esterna. Il segmento equipollente a questa forza sarà un lato del triangolo corrispondente a quel nodo; perciò il triangolo può essere costruito. Nè in questa costruzione sussisterà alcuna ambiguità, se si ponga mente che ad un membro della travatura, il quale insieme colle linee d'azione di due forze esterne appartenga al contorno d'un poligono del diagramma **a**, corrisponde in **b** una retta passante pel vertice comune ai lati che sono equipollenti a quelle due forze.

Indi si passerà successivamente agli altri nodi, in modo che per ogni nuovo poligono da costruirsi rimangano due soli lati incogniti.

Nelle figure qui unite, si sono segnati con numeri tutte le linee di ciascun diagramma per indicare l'ordine delle operazioni.

« The figure can be drawn in five minutes, whereas the algebraic computation of the stresses, though offering no mathematical difficulty, is singularly apt, from mere complexity of notation, to result in error ***) ».

*) Il contorno della travatura è costituito dalle due così dette *tavole* (*Gurten*, *Streckbäume*), la tavola superiore e l'inferiore. I pezzi che congiungono i nodi dell'una a quelli dell'altra diconsi *aste* e *saette*.

**) Per questa ragione, non sono diagrammi reciproci le fig. 1 e 3 della tavola 16 nell'atlante della *Graphische Statik* di CULMANN, nè le fig. 7 e 7₁, della tavola 19, ecc. Invece sono perfettamente reciproci i diagrammi 168 e 169 a pag. 422 del testo, ecc.

***) Così il prof. FLEEMING JENKIN a pag. 443 del citato volume delle *Transactions* di Edimburgo.

30.

Una considerazione superficiale potrebbe far credere possibile e determinata la soluzione del problema anche in casi ne' quali nessun nodo sia il punto di concorso di tre sole rette *). Suppongasi per es. lo schema della travatura costituito dai lati 5, 6, 7, 8 di un quadrilatero e dalle rette 9, 10, 11, 12 che ne congiungono i vertici ad un quinto punto; e le forze esterne siano le 1, 2, 3, 4 applicate ai vertici (8 . 5 . 9), (5 . 6 . 10), (6 . 7 . 11), (7 . 8 . 12) del quadrilatero **). Formato il poligono 1 . 2 . 3 . 4 delle forze esterne, pei punti (1 . 2), (2 . 3), (3 . 4), (4 . 1) conducasi ordinatamente le 5, 6, 7, 8 indefinite; indi pongasi il problema di costruire un quadrilatero i cui lati 9, 10, 11, 12 siano risp. paralleli alle linee omonime del diagramma dato, e i cui vertici (9 . 10), (10 . 11), (11 . 12), (12 . 11) cadano risp. nelle 5, 6, 7, 8. Siccome il problema di costruire un quadrilatero i cui lati abbiano direzioni date (o passino per punti dati in una stessa retta) ed i cui vertici cadano in altrettante rette fisse, ammette in *generale* una ed una sola soluzione, così si potrebbe credere a primo aspetto che il diagramma delle forze riesca così perfettamente determinato.

Ma l'illusione svanisce, se si pon mente che il problema geometrico ha i suoi casi di impossibilità e di indeterminazione. Infatti, quando si ometta una delle condizioni proposte, vale a dire si assoggetti il quadrilatero soltanto ad avere i suoi lati nelle date direzioni, e i primi tre vertici sulle rette date 5, 6, 7, il quarto vertice descrive ***) una retta r ; ed è il punto comune a questa ed alla retta data 8 che, preso come posizione del quarto vertice, dovrebbe dare la soluzione desiderata. Ora, se i dati della questione sono tali che r risulti parallela alla 8, ecco, ci troviamo in un caso d'impossibilità. Però, se, in un'ipotesi anche più speciale, la retta r coincidesse appunto colla 8, il problema riuscirebbe indeterminato, cioè, infiniti quadrilateri soddisferebbero alle condizioni proposte.

A persuaderci che, nella costruzione del diagramma reciproco al dato, si urta precisamente nell'impossibilità o nell'indeterminazione, basta riflettere che, ove si consideri il diagramma dato come un poligono di forze, le cui grandezze siano espresse dai segmenti 5, 6, 7, 8 e il cui polo sia il punto (9 . 10 . 11 . 12), la figura cercata 9 . 10 . 11 . 12 sarebbe il corrispondente poligono funicolare. Ora, affinchè sia possibile la costruzione del poligono funicolare, è necessario che le forze siano in equilibrio: al quale scopo, se si suppongono date le loro grandezze 5, 6, 7, 8, e le linee d'azione di tre fra esse, 5, 6, 7, la linea d'azione della quarta risulta univocamente determinata, ed è appunto quella retta r

*) | Supposta la travatura reticolare composta di triangoli come dappertutto in questo opuscolo |.

**) Queste considerazioni sussistono inalterate, se la travatura sia invece costituita da un poligono qualunque e dalle rette che ne congiungano i vertici ad un punto fisso. Non do la figura relativa a questo paragrafo; ma il lettore potrà supplirvi senza difficoltà.

***) PONCELET, *Traité des propriétés projectives* (Paris 1822), n.º 500.

che sopra si è menzionata. Dunque, se r ed 8 non coincidono, le forze fittizie 5, 6, 7, 8 non sono in equilibrio, ma equivalgono ad una forza infinitamente piccola e distante, e il problema è impossibile. Se poi r coincide con 8, cioè se le forze fittizie sono equilibrate il problema è indeterminato, giacchè per un dato sistema di forze e per un dato polo, si possono costruire infiniti poligoni funicolari (n.º 16).

Nel primo di questi due casi si otterrebbe l'equilibrio, aggiungendo alle forze 5, 6, 7, 8 una forza uguale ed opposta alla loro risultante (infinitamente piccola e lontana), cioè considerando il poligono 5 . 6 . 7 . 8 come proiezione, non già di un quadrangolo, ma di un pentagono, due vertici consecutivi del quale si proiettino in uno stesso punto (7 . 8 . 12). Allora la retta 12 è la proiezione di due rette distinte nello spazio, epperò, nel diagramma reciproco, al punto (9 . 10 . 11 . 12) corrisponderà un pentagono (aperto) 9 . 10 . 11 . 12 . 12', avente i vertici (9 . 10), (10 . 11), (11 . 12), (12' . 9) risp. situati nelle 5, 6, 7, 8, e il vertice (12 . 12') all'infinito.

31.

Ogni membro o pezzo rettilineo della travatura è linea d'azione di due forze uguali ed opposte, applicate risp. ai due nodi che sono congiunti da quel pezzo. La grandezza comune di queste due forze, ossia la misura dello sforzo cui va soggetto il pezzo considerato, è data dalla retta corrispondente del diagramma *b*. Quelle due forze si possono considerare come *azioni* o come *reazioni*: per passare dall'un caso all'altro, basta rovesciarne i sensi. Considerandole come *azioni*, se esse agiscono dai rispettivi punti d'applicazione verso l'interno del pezzo, questo si dice *premuto* o *compresso*; se agiscono invece all'infuori, il pezzo dicesi *teso* o *stirato*. Spesse volte ai pezzi compressi si dà il nome di *puntoni*; ai pezzi tesi quello di *tiranti* *).

32.

Ciascun nodo della travatura è il punto d'applicazione di un sistema di forze equilibrate, almeno tre di numero; una di esse può essere una forza esterna; tutte le altre sono *reazioni* dei pezzi concorrenti in quel nodo. Basterà conoscere il senso di una delle forze del sistema, per dedurne il senso di tutte le altre; al quale uopo non si avrà che a percorrere il contorno del poligono corrispondente a quel nodo. Se al nodo è applicata una forza esterna, e si percorra nel senso della medesima il lato equipollente del poligono, ciascuno degli altri lati del contorno verrà percorso nel senso che spetta alla corrispondente forza interna riguardata come reazione applicata al nodo che si considera. Se invece le forze in-

*) Nelle figure in fondo a questo opuscolo i tiranti sono indicati con linee più sottili di quelle che rappresentano i puntoni. Nelle figure del CULMANN e del REULEAUX i puntoni sono segnati con linee doppie, i tiranti con linee semplici.

terne s'intendono agire nel senso che loro compete come *azioni*, nel percorrere il contorno del poligono bisognerà rovesciare il senso della forza esterna.

Se ad un nodo non è applicata alcuna forza esterna, ma sole forze interne, basterà del pari conoscere il senso di una fra esse, per ottenere, col procedimento ora esposto, il senso di ciascuna delle rimanenti.

Si dirà *ordine ciclico del contorno* di un poligono del diagramma **b**, quello che corrisponde alle forze interne considerate come *azioni*.

Per tal modo, incominciando da un nodo al quale sia applicata una forza esterna, si verranno a determinare successivamente le grandezze e i sensi di tutte le forze interne. Considerando una forza interna come *azione* applicata ad uno dei due nodi fra i quali essa agisce, si riconoscerà tosto se il pezzo limitato dai nodi medesimi sia compresso o teso.

Ogni retta nel diagramma **b** è lato comune a due poligoni; percorrendo i contorni de' quali, nel loro ordine ciclico rispettivo, quel lato verrà descritto una volta in un senso l'altra volta nel senso opposto *). Ciò corrisponde all'essere quella retta la misura di due forze uguali opposte, agenti lungo il corrispondente membro della travatura.

33.

È noto che la somma algebrica delle proiezioni delle facce di un poliedro è uguale a zero. Applicando questo teorema al poliedro **p** (n.º 23) ed osservando che la proiezione della superficie **s** è costituita dai poligoni del diagramma **b** corrispondenti ai nodi della travatura, mentre la proiezione della restante superficie di **p** non è altro che il poligono delle forze esterne, si ottiene il risultato seguente:

*Riguardata come positiva o negativa l'area di un poligono, secondo che essa giaccia a sinistra o a destra di chi ne percorra il contorno nell'ordine ciclico del medesimo, la somma delle aree dei poligoni del diagramma **b** che corrispondono ai nodi della travatura è uguale ed opposta all'area del poligono delle forze esterne.*

Il signor MAXWELL è giunto per altra via a questo teorema, dimostrandolo per una frame piana qualsivoglia, sia o non sia possibile di costruire un diagramma di forze **).

34.

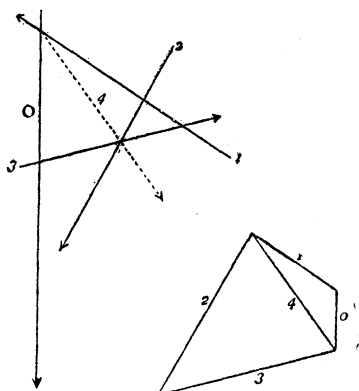
Il metodo delle sezioni, generalmente adoperato nella trattazione de' sistemi variabili, offrirà al disegnatore un prezioso mezzo di verificaione.

*) Questa proprietà è in accordo colla così detta *legge degli spigoli* (*Kantengesetz*) nei poliedri dotati di una superficie interna e di una superficie esterna. Vedi MÖBIUS, *Ueber die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders* (nei *Berichte* della Società delle scienze di Lipsia, 1865, vol. 17, p. 33 e seg. [ovvero *Gesammelte Werke*, vol. II, p. 473] e BALTZER, *Stereometria* (p. 147 della traduzione italiana, 2.^a edizione, Genova, 1877).

**) Citata Memoria del 1870, p. 30.

Se si considera una delle parti nelle quali la travatura è divisa da una *sezione ideale*, le forze esterne applicate ad essa parte sono equilibrate dalle reazioni de' pezzi incontrati dalla sezione.

Se di queste reazioni tre sole sono incognite, esse potranno dedursi da quella condizione d'equilibrio, giacchè il problema di decomporre una forza P in tre componenti, le cui linee d'azione $1, 2, 3$ siano date e formino con 0 , linea d'azione di P , un quadrilatero (piano) completo, è determinato ed ammette una sola soluzione. Infatti (fig. 6.^a) basta condurre una delle diagonali del quadrilatero, per es. la retta 4 che unisce i punti $01, 23$, decomporre la forza data 0 in due componenti secondo le rette $1, 4$ (e ciò costruendo il triangolo delle forze 041 , il lato 0 del quale è dato in grandezza e direzione) e da ultimo decomporre la forza 4 secondo le rette $2, 3$ (costruendo analogamente il triangolo delle forze 432).

Fig. 6.^a

Questo metodo, che potrebbe dirsi *statico*, basta da sè solo alla determinazione grafica degli sforzi interni, al pari del metodo *geometrico*, esposto precedentemente, che si deduce dalla teoria delle figure reciproche e consiste nella costruzione successiva dei poligoni corrispondenti ai diversi nodi della travatura. Il metodo statico mi pare però meno semplice, e piuttosto può giovare in combinazione coll'altro, soprattutto per verificare l'esattezza delle operazioni grafiche, già eseguite. Le forze esterne

applicate ad una porzione della travatura, staccata mediante una sezione qualsivoglia, e le reazioni dei pezzi segati devono aver la proprietà che le corrispondenti linee del diagramma b siano i lati di un poligono chiuso. Questo poligono dev'essere la proiezione di un poligono gobbo, chiuso del pari, non già di una spezzata, i cui estremi siano in una retta perpendicolare al piano ortografico: la qual condizione equivale all'esser chiuso anche il poligono gobbo reciproco, ossia al potersi connettere le linee corrispondenti del diagramma a con un poligono funicolare chiuso.

Il metodo delle sezioni può anche essere presentato sotto un'altra forma. Indicando ancora con 0 la risultante di tutte quelle forze (applicate alla porzione di travatura) che sono conosciute, e con $1, 2, 3$ le tre reazioni incognite, la somma dei momenti delle quattro forze sarà nulla. Donde segue che, posto il centro dei momenti nel punto d'incontro di due linee di resistenza, per es. nel punto 23 , il momento della terza reazione 1 sarà uguale ed opposto al momento della forza 0 . Si ha così una proporzione di quattro grandezze (le due forze e i loro bracci di leva), fra le quali la sola incognita è la grandezza della forza 1 . In ciò consiste il *metodo dei momenti statici*, che s'adopera quando si vogliono

calcolare numericamente (non costruire graficamente) gli sforzi interni nelle travature reticolari *).

35.

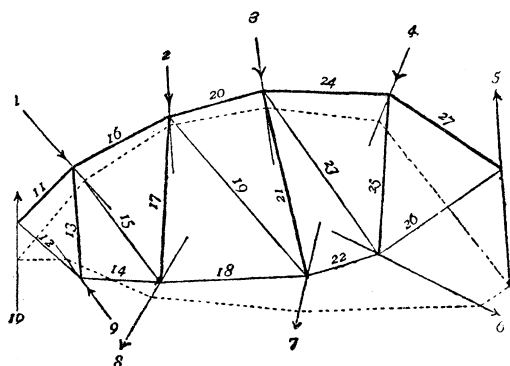
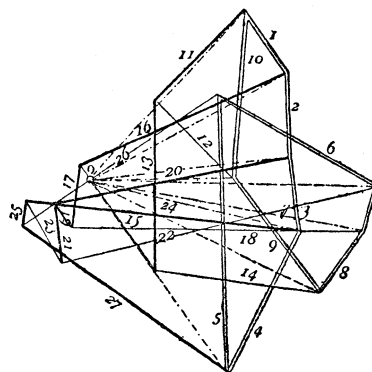
Passo a dare alcuni esempi, atti a mettere in evidenza la semplicità e l'eleganza del metodo grafico. In questi esempi non mi curo sempre della regolarità o della simmetria di forma, sebbene in pratica non vi si rinunci quasi mai. *Ma le forme simmetriche della pratica non sono che un caso particolare delle forme irregolari della geometria astratta*: epperò la trattazione di queste include in sè tutti i casi pratici possibili. Qui adunque il vocabolo *travatura reticolare* è preso in quel senso generale e teorico che il signor MAXWELL dà alla parola *frame* **):

« A frame is a system of lines connecting a number of points. A stiff frame is one in which the distance between any two points cannot be altered without altering the length of one or more of the connecting lines of the frame.... A frame of s points in a plane requires in general $2s - 3$ connecting lines to render it stiff ».

Soltanto io intendo limitarmi alla considerazione di figure piane {e formate da triangoli}.

36.

Come primo esempio (teorico, generale) sia 1, 2, ..., 10 (fig. 7.^a a) un sistema di dieci forze (esterne) equilibrate, cosicchè, costruito il poligono di esse forze e proietta-

Fig. 7.^a aFig. 7.^a b

tine i vertici da un polo O (fig. 7.^a b, dove il poligono delle forze è segnato con linee doppie), si potrà tracciare un poligono funicolare, i cui vertici siano nelle linee d'azione

*) Vedi A. RITTER, *Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach-und Brücken-Constructionen*, 2.^a ediz. (Hannover, 1870).

**) A pag. 294 del *Philosophical Magazine*, aprile 1864

1, 2, ..., ed i cui lati (segnati a tratti nella fig. a) siano ordinatamente paralleli ai raggi (pur segnati a tratti nella fig. b) che escono da O. Le dette forze siano applicate ai nodi di una travatura reticolare, i cui membri rettilinei indicherò con 11, 12, 13, ..., 27 (fig. a).

Comincio dal costruire il triangolo corrispondente al nodo (10 . 11 . 12), conducendo dai termini di 10 due rette 11, 12 risp. parallele ad 11, 12; al quale uopo osservo che 11 deve passare pel punto (1 . 10), perchè nel diagramma a le linee 1, 10, 11 appartengono al contorno di uno stesso poligono *); e per la identica ragione, 12 dee passare pel punto (9 . 10). Percorrendo il contorno del triangolo così ottenuto, nel senso contrario a quello della forza 10, si ottengono i sensi delle azioni esercitate sul nodo che si considera, lungo le linee 11, 12; e si vede così che il pezzo 11 è compresso, mentre 12 è teso.

Costruisco il quadrilatero corrispondente al nodo cui è applicata la forza 9, conducendo la 13 pel punto (11 . 12) e la 14 pel punto (8 . 9). Il pezzo 13 è compresso; 14 è teso.

Costruisco il pentagono corrispondente al nodo cui è applicata la forza 1, conducendo 15 pel punto (13 . 14), e 16 pel punto 1 . 2. Il pentagono così ottenuto è a contorno intrecciato. Il pezzo 15 è teso, e 16 è compresso.

Costruisco il pentagono corrispondente al nodo cui è applicata la forza esterna 8; al quale uopo guido 17 pel punto (15 . 16) e 18 pel punto (7 . 8). Il pezzo 17 è compresso, mentre 18 è teso.

E continuando così trovo tutti gli altri sforzi interni. L'ultima costruzione dà il triangolo che corrisponde al punto d'applicazione della forza 5.

Sono compressi, 20, 21, 24, 25, 27; tesi 19, 22, 23, 26.

37.

La fig. 8.^a a rappresenta un ponte, ai cui nodi sono applicate le forze 1, 2, ..., 16 tutte verticali; la 1 e la 9 sono dirette dal basso in alto ed esprimono le reazioni degli appoggi; le forze 2, 3, ..., 8 sono pesi applicati ai nodi della tavola superiore; e 10, 11, ..., 16 sono pesi applicati ai nodi della tavola inferiore. Queste forze sono prese nell'ordine secondo il quale sono incontrate da chi percorra il contorno della travatura; e nello stesso ordine sono disposti i lati del poligono delle forze esterne nel diagramma b: il qual poligono ha tutt'i suoi lati distesi in una stessa retta verticale. In questa retta, la somma de' segmenti 1, 9 è uguale ed opposta alla somma de' segmenti 2, 3, ..., 8, 10, 11, ..., 16, giacchè il sistema delle forze esterne dev'essere equilibrato.

*) Che è un quadrangolo il cui quarto lato è il lato del poligono funicolare compreso fra le forze 1, 10. Come già s'è detto altrove (n.º 21, 25), il poligono funicolare potrebbe anche allontanarsi tutto all'infinito.

Il diagramma *b* si completa ora precisamente colle regole già esposte. Cominciando dal nodo (1 . 17 . 18), tiro la 17 pel punto (1 . 2), cioè pel punto dove termina il segmento

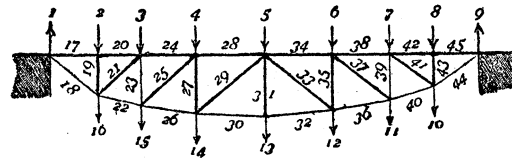


Fig. 8.ª a

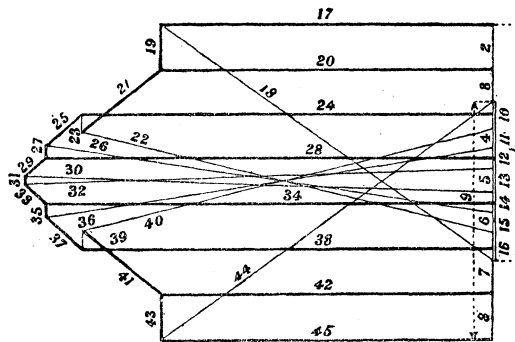


Fig. 8.ª b

1, che è diretto dal basso in alto e dove incomincia il segmento 2, che è diretto d'alto in basso, e la 18 pel punto (16 . 1), cioè pel punto dove termina il segmento 16 diretto d'alto in basso e dove comincia il segmento 1.

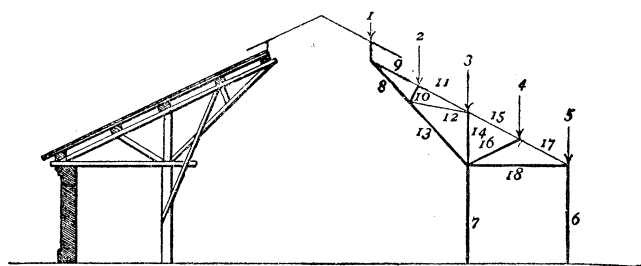
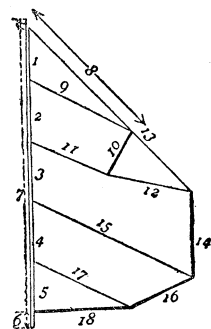
Passando al nodo (2 . 17 . 19 . 20), tiro la 19 pel punto (17 . 18) e la 20 pel punto (2 . 3), cioè pel punto dove termina 2 e dove incomincia 3, segmenti diretti ambedue di alto in basso; ed ottengo così il poligono 2 . 17 . 19 . 20, che è un rettangolo.

Vengo ora al nodo (16 . 18 . 19 . 21 . 22), e tiro la 21 pel punto (19 . 20) e la 22 pel punto (15 . 16); ottengo così un pentagono a contorno intrecciato. E continuando nello stesso modo, opero successivamente rispetto ai nodi o punti d'applicazione delle forze 3, 15, 4, 14, 13, 5, 12, 6, 11, 7, 10, 9. Siccome nel diagramma *a*, lo schema della traveatura ed il complesso delle forze esterne hanno un asse comune di simmetria (la verticale media), così anche il diagramma *b* è simmetrico (intorno all'orizzontale media). Così per es. il triangolo 9 . 45 . 44 è simmetrico al triangolo 1 . 17 . 18; il rettangolo 8 . 45 . 43 . 42 al rettangolo 2 . 17 . 19 . 20; ecc.

Tutt'i tronchi della tavola superiore sono compressi; tesi tutti quelli della tavola inferiore. Le saette oblique sono tutte compresse. Delle aste verticali, due sono tese, 23 39; le altre sono compresse.

38.

Nella fig. 9.^a a si contempla la metà di una rimessa di locomotive *). Le forze esterne sono i pesi 1, 2, 3, 4, 5 applicati ai nodi superiori della tettoja, e le reazioni 6, 7 del muro e della colonna. Anche qui le forze esterne sono tutte parallele, epperò il loro poligono nel diagramma b si riduce ad una linea retta. La forza 6 è (presa in senso oppo-

Fig. 9.^a aFig. 9.^a b

sto) uguale ad una parte del peso 5; aggiungendo la differenza agli altri pesi, si ha la grandezza della forza 7.

Nel diagramma b coincidono in direzione le linee 8. 13; la prima è una parte della seconda. Qui si presenta adunque, come poligono corrispondente al nodo (8 . 10 . 12 . 13) una di quelle forme degeneri, delle quali si è discusso nel n.º 27; si ha cioè un quadrilatero 8 . 10 . 12 . 13, tre vertici (13 . 8), (8 . 10), (12 . 13) del quale sono per diritto fra loro.

Una forma degenera analoga è anche quella del quadrilatero 5 . 17 . 18 . 6 corrispondente al punto dove il tetto s'appoggia sul muro; infatti i vertici (6 . 5), punto più basso del segmento 6, (5 . 17), (18 . 6) sono in una stessa linea retta.

Sono compressi i pezzi inferiori 8, 13, 18, le saette 10, 14, 16, la colonna 7 ed il muro 6; sono tese le parti superiori 9, 11, 15, 17 e la saetta 12.

39.

Il diagramma a della fig. 10.^a rappresenta una capriata ai cui nodi superiori sono applicate le forze oblique 1, 2, ..., 7, che si possono considerare come risultanti dalle azioni combinate della gravità e del vento; le forze 8, 9 rappresentano le reazioni degli appoggi.

*) Questo esempio è preso dalla tav. 19 dell'atlante della *Graphische Statik* di CULMANN (1.^a edizione). Ivi però, come ho già notato, i due diagrammi non sono rigorosamente reciproci.

Il poligono delle forze esterne è tracciato nel diagramma b con linee doppie. Si sono successivamente costruiti il triangolo 1. 10. 11, il quadrilatero 9. 10. 12. 13, il pentagono 2. 11. 12. 14. 15, il quadrilatero 13. 14. 16. 17, il pentagono a contorno

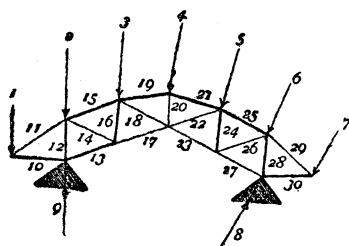


Fig. 10. a

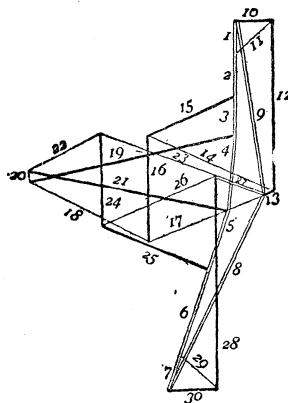


Fig. 10. b

intrecciato 3. 15. 16. 18. 19; il quadrilatero 4. 19. 20. 21, pure intrecciato; il pentagono 17. 18. 20. 22. 23, ecc.

Risultano compressi i pezzi superiori 15, 19, 21, 25, i pezzi inferiori 10, 13, 30 e le saette 12, 16, 24, 28; tesi tutti gli altri membri.

40.

Il diagramma a della fig. 11.^a rappresenta un ponte sospeso, caricato nei nodi superiori dai pesi 1, 2, ..., 8, ne' nodi inferiori dai pesi 10, 11, ..., 16; i quali pesi sono equilibrati dalle due reazioni oblique 9, 17 ai punti estremi della travatura *).

Il poligono delle forze esterne ha i primi otto lati distesi in una retta verticale, e i lati 10, 11, ... sino al 16 parimente distesi in un'altra retta verticale. I lati obliqui 9 e 17 s'intersecano, così che il contorno del poligono risulta intrecciato.

Costruisco successivamente i poligoni

$$1. 17. 19. 18, \quad 16. 19. 20. 21, \quad 2. 18. 20. 22. 23,$$

$$15. 21. 22. 24. 25, \quad 3. 23. 24. 26. 27, \dots,$$

che per la maggior parte sono a contorno intrecciato.

Anche in questo esempio, i due diagrammi sono simmetrici.

Il diagramma b mostra che i membri della parte superiore sono tutti tesi, e che la

*) Questo esempio è analogo a quello che il sig. MAXWELL dà nella sua Memoria del 1870.

tensione decresce andando dalle estremità verso il mezzo; che sono tutti tesi anche i membri della tavola inferiore, ma qui la tensione diminuisce andando dal mezzo verso le estre-

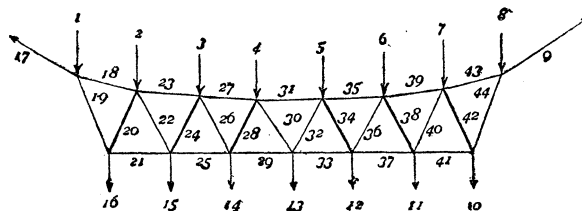


Fig. 11.ª a

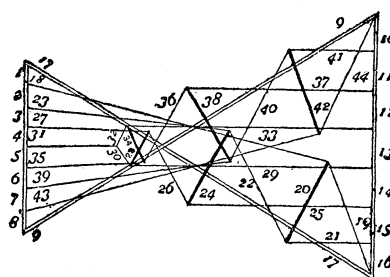


Fig. 11.ª b

mità. Le saette sono alternativamente tese e compresse, fuorchè al centro, dove due saette consecutive sono tese l'una e l'altra. Considerando solamente le saette tese, o solamente le compresse, si vede che lo sforzo interno decresce dalle estremità verso il mezzo della travatura.

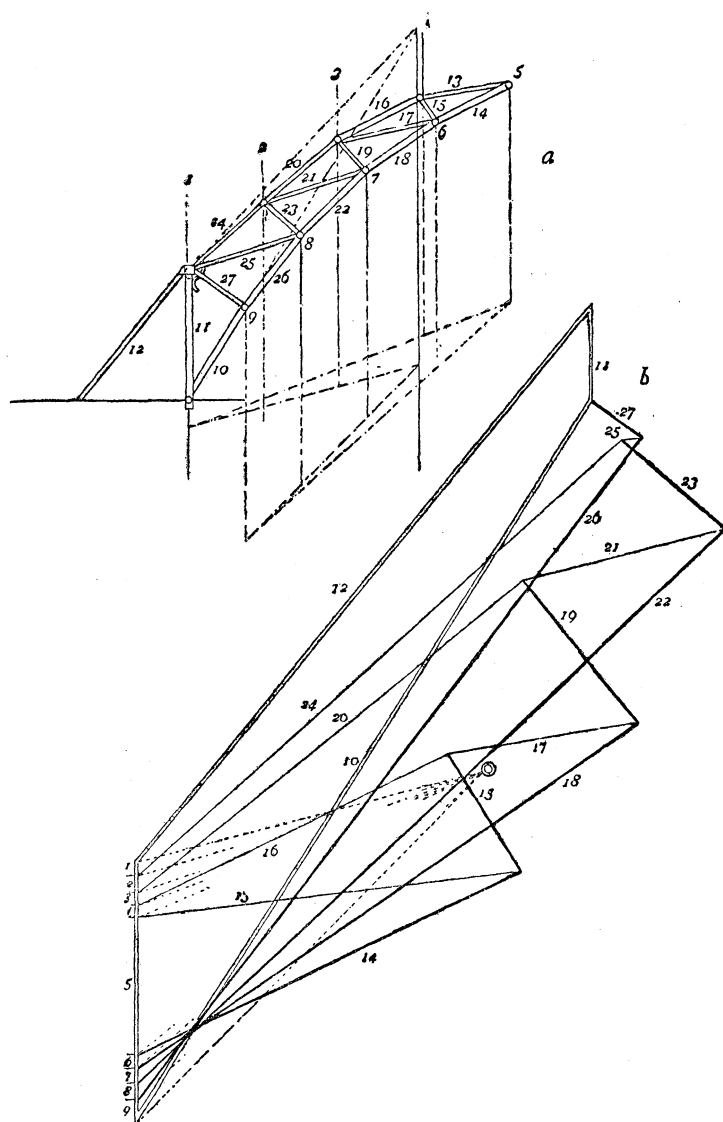
41.

Il diagramma a della fig. 12.ª rappresenta una gru reticolare; il peso proprio della gru è distribuito in varie forze 1, 2, 3, 4, ..., 9 applicate ai nodi; 5 comprende anche il peso accidentale che la gru dee sostenere. Tutti questi pesi sono equilibrati dalle reazioni degli appoggi, le grandezze delle quali si ottengono decomponendo il peso risultante in tre forze dirette secondo le linee 10, 11, 12. Le quali, prese in senso opposto, danno già le pressioni del puntone 10, della colonna 11, e la tensione del tirante 12.

Nella figura è anche espressa siffatta determinazione delle forze esterne. Presi successivamente i segmenti d'una stessa verticale che rappresentino i pesi 1, 2, ..., 9, si è fissato un polo; e proiettati da esso i punti (0.1), (1.2), (2.3), ..., (8.9), (9.0) *)

*) Qui (0.1) indica l'origine del segmento 1; e (9.0) il termine del segmento 9. Nella figura, i raggi uscenti dal polo del diagramma b ed il poligono funicolare del diagramma a sono indicati con linee a tratti discontinui.

si è costruito il corrispondente poligono funicolare. La verticale che passa pel punto comune ai lati esterni (0 . 1), (9 . 0) sarà la linea d'azione del peso risultante, la cui grandezza è del resto indicata dal segmento che ha l'origine comune col segmento 1 e il termine

Fig. 12.^a

comune col segmento 9. Se ora si decompone questo peso risultante, che è una forza conosciuta in tutt'i suoi elementi, in tre componenti le cui linee d'azione siano 10, 11, 12,

e ciò impiegando la costruzione già dichiarata nel n.º 34 e nella fig. 6.^a, si ottengono le tre forze 10, 11, 12. Queste, prese in senso opposto, e i pesi dati costituiscono il sistema completo delle forze esterne.

Per ottenere il diagramma **b**, comincio dal costruire il poligono delle forze esterne, prendendo queste nell'ordine in cui sono incontrate da chi percorra il contorno della travatura. Indi costruisco successivamente i poligoni corrispondenti ai nodi

(5 . 13. 14), (4 . 13 . 15 . 16), (6 . 14 . 15 . 17 . 18), ... ,

col metodo già esplicito.

Il diagramma che ne risulta fa conoscere che sono tesi i pezzi della parte superiore, e compressi i membri inferiori; quanto alle saette, si alternano le pressioni colle tensioni *).

*) Debbo essere grato al signor ingegnere C. SAVIOTTI, che mi ha usata la cortesia di eseguire disegni delle figure che accompagnano questo scritto.

NOTA AL § 12.

Dopo il 1872 molte Memorie ed Opere speciali furono pubblicate intorno alla Statica grafica o a qualche speciale argomento della medesima. Oltre alla seconda edizione di una prima parte dell'Opera capitale di Culmann, riportiamo qui i titoli di quegli scritti che al momento ci sono presenti alla mente, alcuni de' quali segnano un vero progresso della scienza. Facciamo però osservare che la nostra lista è del tutto incompleta:

- R. H. BOW, *Economics of constructions in relation to framed structures*. London, 1873 *).
- M. LEVY, *La statique graphique et ses applications aux constructions*. Paris, 1874.
- MOHR, *Beitrag zur Theorie des Fachwerks* (Zeitschrift des Architekten — und Ingenieur — Vereins zu Hannover, t. XX, 1874).
- F. WEYRAUCH, *Ueber die graphische Statik: zur Orientirung; mit Literaturverzeichniss*. Leipzig, 1874.
- JAY DU BOIS, *The elements of graphical statics and their application to framed structures, etc.* New York, 1875.
- G. B. FAVERO, *Intorno alle figure reciproche della statica grafica* (Atti della R. Accademia dei Lincei, Roma, 1875).
- F. STEINER, *Die graphische Zusammensetzung der Kräfte: ein Beitrag zur graphischen Mechanik*. Wien, 1876.
- G. JUNG, *On a new Construction for the Central Nucleus* (Report-1876 della British Association for the Advancement of Science).
- C. SAVIOTTI, *Sopra alcuni punti di statica grafica* (Atti della R. Accademia dei Lincei, Roma, 1877).
- { M.-W. CROFTON, *Lectures on the elements of applied mechanics*. London, 1877. }
- H. G. ZEUTHEN, *Oveiser i grafisk Statik* (Tidsskrift for Mathematik, Kjöbenhavn, 1877).
- G. GRUGNOLA, *Dei tetti metallici: applicazione dei metodi grafici allo studio delle incavallature*. Torino, 1877.
- H. T. EDDY, *New constructions in graphical statics* (Van Nostrand's Engineering Magazine, New York, 1877).
- G. JUNG, *Ueber die Bedeutung des Centralkerns in der Biegungsfestigkeitslehre* (Amtlicher Bericht d. 50. Versammlung deutscher Naturforscher. München, 1877).
- H. T. EDDY, *Researches in graphical statics* (Van Nostrand's Engineering Magazine, New York, 1878).
- H. G. ZEUTHEN, *Anvendelse af Saetning af Maxwell til at finde de bilingste Bygningskonstruktioner* (Den tekniske Forenings Tidsskrift, 1877-78).
- G. B. FAVERO, *La determinazione grafica delle forze interne nelle travi reticolari* (Atti della R. Accademia de' Lincei, Roma, 1878).

*) Cfr. un articolo di CLERK MAXWELL nei *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, febbraio 1876.

- C. SAVIOTTI, *Le travature reticolari a membri caricati* (Atti della R. Accademia de' Lincei, Roma, 1878).
- H. T. EDDY, *On the two general reciprocal methods in graphical statics* (American Journal of Mathematics pure and applied, volume 1.º, n.º 4, Baltimore, 1878).
- {C. GUIDI, *Sugli archi elastici* (Memorie della R. Accademia di Torino, serie 2.ª, t. XXXVI, 1884)}.

Inoltre, molte Memorie e Note di:

- G. JUNG e A. SAYNO, ne' *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo* (Milano, 1874-75-76-79).
- HIRSCH, MOHR e RITTER, nel *Civilingenieur*, t. XXI e XXII (Leipzig, 1875-76).
- G. JUNG, A. SAYNO, C. SAVIOTTI ed E. CAVALLI, nel *Politecnico*, anni XXIV e XXV (Milano, 1876-77-78-79).
- G. FOURET, nei *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (Paris, 1875).
- G. JUNG, nel *Bullettin de la Société mathématique de France* (Paris, 1876-79).
- E. CAVALLI, negli *Annali dell'Istituto tecnico di Livorno* (1877).
- G. SACHERI e C. MODIGLIANO, nel periodico *l'Ingegneria civile* (Torino 1876-77).
- C. SACHERI e F. ZUCCHETTI, negli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino* (1875-76).
Ecc. ecc.

{ Infine, gli scritti più recenti che si riferiscono all'argomento delle travature reticolari sono i seguenti:

- C. GUIDI, *Sulla determinazione grafica delle forze interne nelle travi omogenee e nelle travi reticolari appoggiate agli estremi e soggette ad un sovracarico mobile* (Atti della R. Accademia dei Lincei, Roma, 1880).
- C. SAVIOTTI, *Nuovi tipi di travature reticolari strettamente indeformabili* (Annuario del R. Istituto tecnico di Roma, 1880).
- C. GUIDI, *Sul calcolo delle travi armate* (Giornale del Genio Civile, Roma, 1880).
- C. GUIDI, *Delle travi reticolari paraboliche e parallele* (Giornale del Genio Civile, Roma, 1881).
- C. SAVIOTTI, *Il problema dei tre membri nella Statica grafica* (Giornale del Genio Civile, Roma, 1883).
- C. SAVIOTTI, *Le funicolari coniche dedotte da forme reciproche nello spazio* (Giornale del Genio Civile, Roma, 1884). }

Del presente opuscolo *Le figure reciproche nella Statica grafica*, che qui viene ristampato in una terza edizione conforme alla seconda del 1872, fu fatta una traduzione libera in tedesco dall'ingegnere A. MIGOTTI ed inserita nella *Zeitschrift des österr. Ingenieur — und Architekten — Vereins*, Wien, 1873.
