97.

RAPPRESENTAZIONE PIANA DI ALCUNE SUPERFICIE ALGEBRICHE DOTATE DI CURVE CUSPIDALI. [100]

Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie III, tomo II (1872), pp. 117-127.

Dai diversi geometri che si sono occupati sin qui di rappresentare superficie algebriche sopra un piano, già molti esempi sono stati trattati ne' quali la superficie proposta è dotata di una curva doppia o nodale. Quanto alle superficie che posseggono una curva di regresso o cuspidale, è bensì stata additata la via *) per la quale si potrebbero esse dedurre dalla teoria delle trasformazioni razionali dello spazio a tre dimensioni, ma in realtà, per quanto io sappia, nessuna di tali superficie è stata sinora studiata in modo da esibirne la effettiva rappresentazione. Perciò, non sarà forse inutile che qui si eseguisca tale studio per un pajo di casi, che sono a un tempo semplici ed istruttivi.

1.

Assumo una superficie di 2.º grado, la cui equazione scriverò nella forma seguente:

$$F' \equiv y' w' - x' z' = 0. \tag{1}$$

Nel piano $y' = 0$, che tocca F' nel punto $x' = y' = z' = 0$, considero le tre rette

$$y' = x' = 0, \; y' = z' = 0, \; y' = w' = 0 \tag{2}$$

le prime due delle quali appartengono anche alla superficie; e considero inoltre la cubica gobba C'_3 definita dalle equazioni:

$$3x' : y' : z' : 3w' = 4\lambda^2 : -4 : 4\lambda : -\lambda^3 \tag{3}$$

(λ parametro variabile), che è osculata dal piano $y' = 0$ e toccata dalla retta $y' = z' = 0$ nel punto $x' = y' = z' = 0$, ed è osculata dal piano $w' = 0$ e toccata dalla retta $x' = w' = 0$ nel punto $x' = z' = w' = 0$.

*) *Nachrichten* di Gottinga, 1871, n.º 3.

Per questa cubica gobba e per le tre rette (2) preaccennate si può far passare un sistema omaloidico di superficie di 3.º ordine, l'equazione generale delle quali sarà

$$\begin{aligned}(4)\qquad & \mathrm{A}y'(z'^2+3x'y')+\mathrm{B}y'(4y'w'-x'z')\\ & +\mathrm{C}y'(3x'^2+4z'w')+\mathrm{D}w'(4y'w'-x'z')=0.\end{aligned}$$

Considero ora un secondo spazio, nel quale le coordinate correnti siano $x\,y\,z\,w$, e faccio corrispondere i piani di questo spazio alle superficie (4), mediante le formole:

$$(5)\qquad \begin{aligned} x &\equiv 27\,y'(z'^2+3x'y'),\\ y &\equiv 9\,y'(4y'w'-x'z'),\\ z &\equiv 9\,y'(3x'^2+4z'w'),\\ w &\equiv 16\,w'(4y'w'-x'z'),\end{aligned}$$

il che equivale ad operare sullo spazio $(x'\,y'\,z'\,w')$ una trasformazione di 3.º grado.

Rappresento sopra un piano Π una qualunque delle superficie φ, contenute nell'equazione (4). Fissati in Π i sei punti fondamentali 1, 2, 3, 4, 5, 6, si potranno assumere le rette 12, 34, 56 come imagini delle rette $y'=z'=0$, $y'=x'=0$, $y'=w'=0$; e la conica passante per 4, 5, 6 e toccata dalla 12 nel punto di concorso delle 12, 34 come imagine della cubica gobba (3). Allora la cubica gobba intersezione ulteriore di φ con un'altra qualsivoglia delle superficie (4) sarà rappresentata da una curva di 4.º ordine $1^2\,2^2\,3^2\,4\,5\,6$; dunque alle rette dello spazio $(x\,y\,z\,w)$ corrispondono cubiche gobbe R', che segano in cinque punti la cubica fissa (3), in due la retta $y'=w'=0$, in uno solo la $y'=x'=0$, in nessuno la $y'=z'=0$.

Da ciò segue che ai piani dello spazio $(x'\,y'\,z'\,w')$ corrisponderanno superficie ψ di 3.º ordine, la cui Jacobiana sarà composta di tre luoghi, ordinatamente dell'ordine 5, 2, 1 corrispondenti alla cubica gobba (3), alla retta $y'=w'=0$ ed alla retta $y'=x'=0$; e che alla $y'=z'=0$ corrisponderà di nuovo una retta nello spazio $(x\,y\,z\,w)$.

Nel piano Π, le curve di 4.º ordine $1^2\,2^2\,3^2\,4\,5\,6$ formano una rete, la Jacobiana della quale è costituita dalle coniche 12356, 12364, 12345 e dalle rette 23, 31, 12: imagini delle sei rette che, insieme colle linee fondamentali (2) e (3) contate tre volte, compongono l'intersezione di φ colla Jacobiana delle superficie (4). La conica 12356 rappresenta una corda della cubica gobba (3), segata dalla retta $y'=x'=0$; il luogo di tutte le corde analoghe è l'iperboloide

$$(6)\qquad 4y'w'-x'z'=0,$$

la cui intersezione con una qualunque delle superficie (4) risulta dalla cubica gobba (3), dalle due rette $y'=x'=0$, $y'=z'=0$ e da una delle predette corde.

Le coniche 12364, 12345 e le rette 31, 23 rappresentano corde della cubica gobba (3) segate da $y' = w' = 0$; il luogo di tutte le corde così fatte è la superficie di 4.° grado

$$\mathrm{J}' \equiv 3\,(4\,y'\,w' - x'\,z')^2 - (z'^2 + 3\,x'\,y')\,(3\,x'^2 + 4\,z'\,w') = 0\,, \tag{7}$$

per la quale la curva (3) è doppia, e la quale sega ciascuna superficie (4) lungo essa curva (3), le due rette $y' = z' = 0$, $y' = w' = 0$ e quattro delle corde menzionate.

La Jacobiana delle (4) è l'insieme delle superficie (6), (7) e del piano $y' = 0$ contato due volte, e l'intersezione completa di essa Jacobiana con una qualsivoglia delle superficie (4) è costituita dalla cubica gobba (3) e dalle rette $y' = x' = 0$, $y' = w' = 0$ contate tre volte, dalla retta $y' = z' = 0$ contata quattro volte, e da altre cinque rette non fisse.

Dal modo di composizione di questa Jacobiana si cava tosto che gli enti fondamentali nello spazio $(x\,y\,z\,w)$ saranno: due rette situate in uno stesso piano e corrispondenti, l'una all'iperboloide (6), l'altra alla retta $y' = z' = 0$; una curva gobba razionale di 4.° ordine corrispondente alla superficie (7); ed un punto, corrispondente al piano $y' = 0$. Infatti le equazioni (5), risolute rispetto ad x', y', z', w', dànno

$$\begin{aligned} x' &\equiv 12\,y\,(4\,z^2 - 3\,x\,w)\,, \\ y' &\equiv 16\,y\,(x\,z - 9\,y^2)\,, \\ z' &\equiv 12\,(x^2 w - 12\,y^2 z)\,, \\ w' &\equiv 9\,w\,(x\,z - 9\,y^2)\,, \end{aligned} \tag{8}$$

vale a dire, ai piani dello spazio $(x'\,y'\,z'\,w')$ corrispondono le superficie del sistema omaloidico

$$\begin{aligned} &12\,\mathrm{A}y\,(4\,z^2 - 3\,x\,w) + 16\,\mathrm{B}y\,(x\,z - 9\,y^2) \\ &+ 12\,\mathrm{C}\,(x^2 w - 12\,y^2 z) + 9\,\mathrm{D}\,w\,(x\,z - 9\,y^2) = 0\,, \end{aligned} \tag{9}$$

le quali hanno in comune le rette

$$y = x = 0\,, \qquad y = w = 0 \tag{10}$$

e la curva gobba di 4.° ordine

$$4\,z^2 - 3\,x\,w = 0\,, \qquad x\,z - 9\,y^2 = 0\,, \tag{11}$$

ossia

$$x : y : z : w = 3\,\lambda^4 : \lambda^3 : 3\,\lambda^2 : 4\,, \tag{11'}$$

che ha una cuspide $x = y = z = 0$, colla tangente $x = y = 0$ e col piano osculatore $x = 0$; $w = 0$ è il piano stazionario ed $y = z = w = 0$ il punto di contatto.

Il punto $x = y = z = 0$ è doppio per tutte le superficie (9); esso è il punto fondamentale dello spazio $(x\,y\,z\,w)$ che corrisponde al piano $y' = 0$.

La retta $y = w = 0$ corrisponde all'iperboloide (6); infatti al punto $y = w = 0$, $z = \lambda x$ corrisponde la retta

$$x' - 3 \lambda y' = 0, \qquad 4 w' - 3 \lambda z' = 0,$$

che è una generatrice della superficie (6).

Analogamente, al punto (11)' corrisponde la retta

$$\begin{aligned} 4 \lambda^2 w' - 3 \lambda x' - 3 z' &= 0, \\ \lambda^2 x' + \lambda z' - 3 y' &= 0, \end{aligned}$$

ossia, alla curva (11) corrisponde il luogo (7).

La retta $y = x = 0$ corrisponde alla $y' = z' = 0$.

Rappresento sopra un piano Π una delle superficie ψ del sistema (9); al quale uopo, assumo una conica come imagine del punto doppio $x = y = z = 0$, ed in essa i sei punti fondamentali $1, 2, 3, 4, 5, 6$, il primo de' quali rappresenti la retta $x = y = 0$, mentre la congiungente 12 corrisponda alla $y = w = 0$. Imagine della curva (11) sarà una conica osculante in 1 e segante in 3 la conica 123456. Allora le imagini delle ulteriori intersezioni della ψ colle altre superficie del sistema (9) saranno le coniche 456; vale a dire, alle rette dello spazio $(x' y' z' w')$ corrispondono cubiche gobbe che passano pel punto fisso $x = y = z = 0$, ed incontrano altrove in quattro punti la curva (11), in due la retta $y = w = 0$, in nessuno la $y = x = 0$.

La Jacobiana del sistema (9) sega ψ secondo la curva (11), la retta $y = w = 0$ da contarsi tre volte, la retta $y = x = 0$ da contarsi quattro volte, ed altre cinque rette, le cui imagini in Π sono i punti 2, 3 e le rette 45, 46, 56. Il punto 2 rappresenta una retta passante per $x = y = z = 0$ ed incontrata dalla $y = w = 0$; il luogo di tutte le rette analoghe è il piano

$$y = 0. \tag{12}$$

Il punto 3 è l'imagine di una retta che passa per $x = y = z = 0$ ed incontra la curva (11) in un altro punto; luogo di tutte le rette analoghe è il cono

$$x z - 9 y^2 = 0 \tag{13}$$

che projetta la curva (11) dalla cuspide.

Finalmente, i tre lati del triangolo 456 rappresentano tre corde della curva (11) appoggiate alla retta $y = w = 0$; ed il luogo di tutte le corde così fatte è la superficie di 5.° grado

$$12 w (x z - 9 y^2)^2 - 4 z (x z - 9 y^2)(4 z^2 - 3 x w) + x (4 z^2 - 3 x w)^2 = 0 \tag{14}$$

per la quale le linee (10) ed (11) sono entrambe doppie.

Dunque i luoghi (12), (13) e (14) costituiscono, presi insieme, la Jacobiana delle superficie (9). Il luogo (12) corrisponde alla retta $y' = x' = 0$; infatti si corrispondono fra loro il punto $y' = x' = 0$, $z' - \lambda w' = 0$ e la retta

$$y = 0, \quad 4x - 9\lambda z = 0.$$

Il luogo (13) corrisponde alla retta $y' = w' = 0$; giacchè la retta

$$x + 9\lambda y = 0, \quad y + \lambda z = 0$$

è la corrispondente del punto $y' = w' = 0$, $z' = \lambda x'$.

Al punto rappresentato dalle (3) corrisponde la retta

$$4\lambda^3 y - w = 0, \quad \lambda^2 x + 3\lambda y + z = 0, \text{*)}$$

cioè alla cubica gobba (3) corrisponde la superficie (14).

Alla data superficie F' corrisponderà nello spazio $(x\,y\,z\,w)$ un luogo F di 5.º ordine, perchè la cubica gobba che corrisponde ad una retta arbitraria di detto spazio incontra la retta $y' = x' = 0$, epperò sega F' in altri cinque punti non situati nelle linee fondamentali (2) e (3).

La superficie F' è tangente a tutte le generatrici del luogo (7), come si riconosce dall'identità

$$y'\,J' = 4\,F'\,(12\,y'^2 w' - z'^3 + 3\,x'\,y'\,z') - x'\,(2\,z'^2 - 3\,x'\,y')^2;$$

dunque la curva (11) è *cuspidale* per la superficie F.

Ad una retta r che incontri la $y = x = 0$ corrisponde una cubica gobba spezzantesi nella retta $y' = z' = 0$ ed in una conica che incontra $y' = z' = 0$ in un punto ed F' in tre altri punti. Dunque r incontra F in tre punti fuori di $y = x = 0$, ossia questa retta è doppia per F.

Invece la retta $y = w = 0$ è semplice per F, perchè le generatrici dell'iperboloide (6), dopo aver incontrato la retta $y' = x' = 0$, segano F' in un solo nuovo punto.

Del resto, per ottenere l'equazione di F, basta fare le sostituzioni (8) nella (1); si ha così:

$$(15) \qquad F \equiv x\,(4\,z^2 - 3\,x\,w)^2 - 4\,z\,(4\,z^2 - 3\,x\,w)\,(x\,z - 9\,y^2) + 3\,w\,(x\,z - 9\,y^2)^2.$$

Di qui si scorge che la superficie F è della 3.ª classe, vale a dire, essa è la reciproca di una superficie di 3.º ordine, dotata di un punto uniplanare **).

---

*) Al cono di 2.º grado inviluppato dal piano $\lambda^2 x + 3\lambda y + z = 0$ corrisponde nello spazio $(x'\,y'\,z'\,w')$ la sviluppabile formata dalle tangenti della cubica gobba (3).

**) Vedi CAYLEY, *On cubic surfaces* (Phil. Trans., 1869), section XV, p. 311.

Ora, per rappresentare F su di un piano, basta effettuare la rappresentazione di F'. Questa si ottiene mediante le formole [101]

(16) $$x' : y' : z' : w' = 12\,\alpha\gamma : 16\,\alpha\beta : 12\,\beta\gamma : 9\,\gamma^2$$

che soddisfanno la (1). Le (5), in virtù delle (16), divengono

(17) $$\begin{aligned} x &\equiv \beta\,(4\,\alpha^2 + \beta\gamma), \\ y &\equiv \alpha\beta\gamma, \\ z &\equiv \gamma\,(\alpha^2 + \beta\gamma), \\ w &\equiv \gamma^3, \end{aligned}$$

e per tal modo F è rappresentata sul piano $(\alpha\beta\gamma)$. Le imagini delle sezioni piane di F sono cubiche

(18) $$A\beta\,(4\,\alpha^2 + \beta\gamma) + B\alpha\beta\gamma + C\gamma\,(\alpha^2 + \beta\gamma) + D\gamma^3 = 0,$$

che passano per due punti fissi $\beta = \gamma = 0$, $\alpha = \gamma = 0$, nel secondo de' quali si osculano. Alle cinque intersezioni di F con una retta arbitraria corrispondono cinque punti di una conica appartenente alla rete

(19) $$B\alpha\beta + C\,(\alpha^2 + \beta\gamma) + D\gamma^2 = 0.$$

Queste coniche sono le imagini delle sezioni piane passanti pel punto $y = z = w = 0$; donde segue che questo punto è rappresentato dalla retta $\gamma = 0$.

Il sistema (18) è determinato dalla rete (19) e dalla conica

$$4\,\alpha^2 + \beta\gamma = 0,$$

che è l'imagine di una curva di 3.° ordine, dotata di cuspide, situata nel piano $x = 0$.

La Jacobiana della rete (19) è costituita dalla retta $\gamma = 0$ e dalla conica

$$2\,\alpha^2 - \beta\gamma = 0$$

che è l'imagine della curva cuspidale (11).

Ogniqualvolta una conica della rete (19) si spezza in due rette, una di queste (imagine di una conica) passa pel punto fisso $\alpha = \gamma = 0$; l'altra (imagine di una curva piana di 3.° ordine) tocca la conica fissa

$$\alpha^2 + 4\,\beta\gamma = 0,$$

imagine di una curva gobba di 4.° ordine, comune ad F ed al cono cubico

$$4\,z^3 - 27\,y^2\,w = 0,$$

che projetta la curva cuspidale dal punto $y = z = w = 0$. Questo cono è l'inviluppo dei piani $y + \lambda\,z - \lambda^3\,w = 0$ che segano F secondo linee spezzantisi in una conica ed una cubica.

La retta $\beta = 0$ rappresenta la retta doppia $y = x = 0$ ed è incontrata dalle cubiche (18) in coppie di punti conjugati di un'involuzione quadratica, i cui elementi doppi sono i punti $\beta = \alpha = 0$, $\beta = \gamma = 0$: due punti conjugati rappresentano uno stesso punto della retta doppia. Questa ha due punti cuspidali $x = y = z = 0$, $x = y = w = 0$, corrispondenti ai punti doppi dell'involuzione suddetta.

La superficie F possiede due rette semplici: l'una $w = y = 0$ è rappresentata dal punto $\beta = \gamma = 0$; l'altra $w = z = 0$ dal punto di $\gamma = 0$ che è infinitamente vicino ad $\alpha = \gamma = 0$.

2.

Se una superficie di 3.° ordine F'_3 ha due punti doppi (conici) p', q', vi è un piano che tocca la superficie lungo la retta $p'q'$. Ne segue che l'equazione di F'_3 può scriversi così

$$XS + Y^2 Z = 0,$$

ove X, Y, Z sono lineari ed S è quadratica nelle coordinate. All'equazione precedente può anche darsi la forma

$$X(S + \lambda Y^2) + Y^2 (Z - \lambda X) = 0,$$

che ha la seguente interpretazione geometrica. Il piano $X = 0$, che tocca la superficie lungo $p'q'$, sega F'_3 lungo una seconda retta, asse di un fascio $Z - \lambda X = 0$ di piani di coniche che sono curve di intersezione [102] fra F'_3 e le superficie quadriche $S + \lambda Y^2 = 0$. Queste superficie si toccano lungo una conica, comune ad F'_3 ed al piano $Y = 0$, così che fra esse vi è un cono; cioè λ ammette un valore pel quale $S + \lambda Y^2 = 0$ rappresenta un cono.

Pel vertice o' di questo cono circoscritto ad F'_3 conduco i piani $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$; dove suppongo che $z' = 0$ sia il piano $o'p'q'$; ed $x' = 0$, $y' = 0$ tocchino il cono lungo le generatrici contenute nel piano $z' = 0$. Siano poi: $w' = 0$ il piano della conica di contatto fra F'_3 ed il cono predetto; $z' + w' = 0$ il piano tangente ad F'_3 lungo $p'q'$; ed

$$u' \equiv e x' + f y' + g z' + h w' = 0$$

il piano della conica di semplice intersezione fra F'_3 ed il cono. Allora l'equazione della superficie di 3.° ordine sarà

$$F'_3 \equiv (z' + w')(z'^2 - 2x'y') - u' w'^2 = 0.$$

Per rappresentare su di un piano questa superficie, basta projettarne i punti da uno de' punti doppi; allora le imagini delle sezioni piane sono cubiche che toccano in un punto fisso e segano in altri quattro punti fissi una conica determinata dal cono che oscula la superficie nel punto doppio, scelto come centro di projezione. I quattro punti di semplice intersezione sono dati da un'equazione (ad un'incognita) di 4.° grado; risoluta la quale si può, per due di essi punti e pel punto di contatto, far passare una rete di coniche. Facendo poi corrispondere queste coniche alle rette di un altro piano rappresentativo, si verrà ad eseguire una trasformazione di 2.° grado sul sistema delle cubiche che rappresentano le sezioni di F'_3. Le imagini di queste sezioni divengono per tal modo, nel nuovo piano rappresentativo, cubiche che s'intersecano in sei punti fissi distinti 0, 1, 2, 3, 4, 5, de' quali però 012, 034 sono distribuiti su due rette, imagini dei punti doppi p', q'. La retta $p'q'$ è rappresentata dal punto 0; le altre quattro rette di F'_3 che escono da p' hanno per imagini i punti 1, 2 e le rette 35, 45; le quattro rette analoghe, uscenti da q', sono rappresentate dai punti 3, 4 e dalle rette 15, 25; la retta 05 è l'imagine della retta $u' = z' + w' = 0$; e le altre sei rette della superficie corrispondono al punto 5, alla conica 12345 ed alle rette 13, 14, 23, 24.

Una retta R passante per 5 ed una conica C descritta per 1 2 3 4 sono le imagini rispettive delle coniche

$$w' = z'^2 - 2\,x'\,y' = 0, \qquad u' = z'^2 - 2\,x'\,y' = 0.$$

Imagino ora F'_3 segata dal sistema omaloidico delle superficie φ di 2.° grado, che passano pel punto o' e per la conica $u' = z'^2 - 2\,x'\,y' = 0$. Ciascuna di queste superficie determinerà su F'_3 una curva gobba di 4.° ordine (e 1.ª specie), la cui imagine sarà una curva di 4.° ordine, $0^2 12345^2$. Siccome il sistema delle φ comprende il cono $z'^2 - 2\,x'\,y' = 0$ ed inoltre una rete di quadriche, ciascuna composta del piano fisso $u' = 0$ e di un piano per o', così il sistema delle curve di 4.° ordine $0^2 12345^2$ sarà determinato dalla curva composta delle quattro rette 012. 034. R. R, e da una rete di cubiche 012345, da associarsi alla retta fissa 05.

Il sistema omaloidico delle φ può servire di base ad una trasformazione di 2.° grado le formole della quale sarebbero

$$x' : y' : z' : u' = x\,u : y\,u : z\,u : z^2 - 2\,x\,y,$$

ovvero viceversa

$$x : y : z : u = x'\,u' : y'\,u' : z'\,u' : z'^2 - 2\,x'\,y'.$$

In virtù di questa trasformazione, dalla superficie data si ottiene la seguente

$$F \equiv (z^2 - 2\,xy)^2 - u\,(z^2 - 2xy)\;(2\,t + hu) + u^2\Big(t^2 + hu\,(t - hz)\Big) = 0,$$

dove per brevità si è posto

$$t = e\,x + f\,y + g\,z.$$

La superficie F è di 4.° ordine, e per essa la conica

$$u=0,\quad z^2-2\,x\,y=0$$

è cuspidale: infatti a questa conica, che è fondamentale nello spazio $(x\,y\,z\,w)$, corrisponde il cono

$$z'^2-2\,x'\,y'=0$$

circoscritto ad F'_3.

Siccome le superficie F_4, F'_3 si corrispondono punto per punto, così la rappresentazione piana ottenuta per F'_3 serve ad un tempo per F_4. Imagini delle sezioni piane di questa superficie sono le curve di 4.° ordine $0^2 12345^2$ di quel sistema che sopra ho determinato.

La retta 05 rappresenta il punto $x=y=z=0$ di F_4, corrispondente alla retta che F'_3 possiede nel piano $u'=0$. Le rette 012, 034 rappresentano due punti particolari p,q della conica cuspidale, che corrispondono ai due punti doppi p',q' di F'_3. Alle otto rette di F'_3 che concorrono a quattro a quattro ne' punti doppi p', q' corrispondono altrettante rette di F_4, che concorrono del pari nei punti p, q. Le rette di F_4 hanno dunque per imagini i punti 1, 2, 3, 4 e le rette 51, 52, 53, 54.

Eccettuati i punti p, q, imagine della conica cuspidale di F_4 è la retta R.

Le coniche di F_4 corrispondono: 1.° alle rette di F'_3 che non incontrano la conica fondamentale $u'=z'^2-2\,x'\,y'=0$; 2.° alle coniche di F'_3 che incontrano in due punti la conica fondamentale, cioè alle coniche che non incontrano la retta situata nel piano $u'=0$. Di queste coniche vi sono sette serie, poste nei piani che passano per le sette rette incontrate dalla $u'=z'+w'=0$, cioè per le sette rette le cui imagini sono

le rette 13,	24
» 14,	23
il punto 5,	la conica 12345
il punto 0.	

Le sette serie di coniche di F_4 hanno dunque per imagini

le coniche 0524,	le coniche 0513,
» 0523,	» 0514,
le cubiche 012345^2,	le rette 0,
le rette 5.	

Le prime sei serie sono conjugate a due a due: due serie conjugate corrispondendo a due fasci di piani i cui assi in F_3 giacciono in uno stesso piano con $u'=z'+w'=0$. Due coniche di F_4, appartenenti a due serie coniugate, giacciono in uno stesso piano, che tocca un cono quadrico fisso. Per tal modo le coniche delle prime sei serie giacciono nei piani tangenti di tre coni quadrici, i quali fanno parte del sistema di superficie quadriche

$$(1-2\lambda)(z^2-2xy-tu)+hu(z+\lambda^2 u)=0$$

avente per inviluppo la F_4.

Quanto alla settima serie, le coniche che ne fanno parte giacciono tutte, a due a due, in piani passanti per la retta pq. Due coniche poste in uno stesso piano hanno per imagini due rette per 5, conjugate armoniche con due rette fisse, una delle quali è R, mentre l'altra è imagine della conica di contatto fra F_4 ed il piano $u+4z=0$ *).

---

*) Per la teoria generale delle trasformazioni razionali nello spazio, veggasi la mia Memoria nel Tomo V degli Annali di Matematica (pag. 131) [Queste Opere, n.º 96].