91.

SULLE TRASFORMAZIONI RAZIONALI NELLO SPAZIO *).

NOTA 1.ª

Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, volume IV (1871), pp. 269-279.

Quattro variabili omogenee indipendenti $x_1 x_2 x_3 x_4$ siano legate ad altre quattro variabili analoghe $y_1 y_2 y_3 y_4$ mediante le relazioni:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4 \tag{1}$$

dove le φ siano funzioni (algebriche razionali) intere omogenee di uno stesso grado n delle y.

Considerando le x e le y come coordinate di due punti corrispondenti in due spazj a tre dimensioni, le (1) esprimono che ad un punto qualsivoglia dello spazio (y), purchè non comune alle quattro superficie $\varphi = 0$, corrisponde un solo e determinato punto dello spazio (x), e che ai piani

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0 \tag{2}$$

dello spazio (x) corrispondono le superficie d'ordine n

$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 + \alpha_4 \varphi_4 = 0 \tag{3}$$

formanti un sistema lineare triplamente infinito.

Suppongasi ora che dalle (1) si possano desumere le y espresse razionalmente colle x, cioè le formole inverse delle (1) siano

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \psi_1 : \psi_2 : \psi_3 : \psi_4 \tag{4}$$

essendo le ψ funzioni intere omogenee delle x, di un medesimo grado m.

*) Veggasi intorno a questo argomento la Memoria del prof. CAYLEY, *On the rational transformation between two spaces* nel t. 3 dei Proceedings of the London Math. Society. Cfr. anche NÖTHER, *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen* (Math. Annalen, t. 2). La medesima quistione per le figure piane è stata trattata da me (Memorie dell'Accademia di Bologna, 2.ª serie, t. 2, 1863 e t. 5, 1865; ovvero Giornale di Matematiche di Napoli, t. 1 e 3) [Queste Opere, n. **40**, **62** (t. 2.°)], da CLIFFORD e CAYLEY (loco citato) da NÖTHER (Math. Annalen, t. 3, p. 164) e da ROSANES (Giornale CRELLE-BORCHARDT, t. 73).

Ciò equivale a supporre il sistema (3) tale che tre superficie prese *arbitrariamente* da esso abbiano un unico punto comune, che non appartenga a tutte le superficie del sistema medesimo: così che anche ad un punto qualsivoglia dello spazio (x), purchè non comune a tutte le superficie $\psi = 0$, corrisponde un solo e determinato punto dello spazio (y). Dalle (4) segue inoltre che ai piani

$$(5) \qquad \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3 + \beta_4 y_4 = 0$$

corrispondono le superficie

$$(6) \qquad \beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2 + \beta_3 \psi_3 + \beta_4 \psi_4 = 0$$

formanti un sistema lineare triplamente infinito; tre qualunque delle quali, in virtù delle (1), si segano in un solo punto non comune a tutto il sistema. Le (1), (2) significano eziandio che ciascuna superficie dei sistemi (3) e (6) è rappresentabile punto per punto sopra un piano.

Analogamente a ciò che accade per le trasformazioni nel piano *), ai punti ed alle linee *fondamentali* o *principali* d'uno spazio, p. e. dello spazio (y), vale a dire ai punti ed alle linee comuni a tutte le superficie φ, corrispondono superficie costituenti la *Jacobiana* delle superficie ψ. In particolare ai punti di una curva r-pla comune alle φ corrispondono curve razionali d'ordine r, il luogo delle quali fa parte della Jacobiana delle ψ. La stessa curva che è r-pla per tutte le φ è $(4r-1)$-pla per la Jacobiana di queste superficie; ecc.**).

Per brevità di discorso diremo *omaloide* ***) una superficie quando sia rappresentabile punto per punto sopra un piano; e *omaloidale* un sistema di superficie algebriche il quale, come i sistemi (3) e (4), sodisfaccia alle due condizioni: 1.° d'essere lineare e triplamente infinito, 2.° che tre superficie prese ad arbitrio nel sistema si seghino in un solo punto non comune a tutto il sistema medesimo. Le superficie di un sistema omaloidale sono necessariamente omaloidi.

Queste denominazioni possono valere anche per le figure piane (e per le figure descritte in una superficie omaloide); così che una curva omaloide sarà una curva razionale cioè una curva di genere zero; ed una rete omaloidale di curve sarà un sistema lineare doppiamente infinito di curve (razionali), due qualunque delle quali si seghino in un solo punto non comune a tutte.

Sia ora φ_4 una superficie omaloide di grado n, della quale si conosca una rappresentazione (punto per punto) sopra un piano Π. Tutte le altre superficie omaloidi d'ordine n,

---

*) Vedi la Nota 2.ª, già citata, *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* (Bologna, 1865).

**) Vedi la citata Memoria di NÖTHER nei Math. Annalen, t. 2, p. 293.

***) Cfr. SYLVESTER nel Cambridge and Dublin Math. Journal, t. 6. pag. 12.

aventi gli stessi punti multipli e le stesse linee multiple di φ_4, segheranno inoltre φ secondo curve le cui imagini su Π formeranno un certo sistema Σ. Ora assumasi in Π una rete omaloidale di curve K, in modo che ciascuna di queste insieme con un luogo fisso L (un complesso di linee, anche prese più volte) costituisca una curva del sistema Σ. Una curva K_1, formando insieme con L l'imagine dell'intersezione di φ_4 con un'altra superficie analoga φ_1, individua un fascio $\varphi_4 + \alpha_1 \varphi_1$; analogamente, se K_2, K_3 sono due altre curve della rete, non appartenenti con K_1 ad uno stesso fascio, saranno individuati i fasci $\varphi_4 + \alpha_2\varphi_2, \varphi_4 + \alpha_3\varphi_3$; e siccome i tre fasci hanno una superficie comune φ_4, così essi individuano e costituiscono un sistema lineare triplamente infinito

$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 + \alpha_4 \varphi_4 = 0.$$

Questo sistema è omaloidale, epperò può servire di base ad una trasformazione razionale d'ordine n; cioè le superficie del sistema, considerate nello spazio (y), si possono far corrispondere [65] ai piani d'un altro spazio (x) punteggiato projettivamente [66] al primo, e ciò col porre le formole (1), dalle quali seguiranno le (4). Il grado delle ψ, ossia il grado della trasformazione inversa, non è altro che l'ordine delle curve di φ_4 aventi per imagini le K.

La Jacobiana della rete K è, come si sa *), composta di più linee k; e queste sono appunto le imagini delle curve che, insieme colle curve fondamentali dello spazio (y), costituiscono l'intersezione di φ_4 colla Jacobiana delle superficie φ [67]. Vale a dire, le k sono le imagini delle curve dello spazio (y) corrispondenti ai punti ne' quali le curve fondamentali dello spazio (x) sono incontrate dal piano che corrisponde a φ_4 [68]. Se le φ hanno in comune una curva semplice, una curva doppia, una curva tripla,..., queste prese ordinatamente $1 . 3$, $2 . 7$, $3 . 11$,... volte fanno parte della intersezione di φ_4 colla Jacobiana delle φ; e la residua intersezione di queste due superficie è esclusivamente rappresentata dalle curve k costituenti la Jacobiana delle K (tenuto conto di quelle linee di φ_4 che corrispondono a punti di Π) [68]. Perciò, se le k sono le imagini di l_1 rette, l_2 coniche, l_3 cubiche (razionali),..., le superficie ψ avranno in comune una curva semplice d'ordine l_1, una curva doppia d'ordine l_2, una curva tripla d'ordine l_3,... [68]. E dall'esame delle relazioni fra i diversi elementi della data rappresentazione di φ_4 si potranno senza difficoltà desumere eziandio le relazioni fra le curve fondamentali dello spazio (x), cioè il genere di ciascuna, i punti in cui s'incontrano a due a due, ecc., non che le proprietà della Jacobiana delle ψ, la quale del resto si compone delle superficie che corrispondono ai punti e alle linee fondamentali dello spazio (y). Così il sistema delle superficie ψ (e con esso la trasformazione inversa) verrà ad essere completamente conosciuto.

Ogni rete in Π analoga a quella delle curve K, condurrà per tal modo ad una trasformazione nella quale è impiegata la data superficie φ_4.

*) Vedi la citata Nota 2.ª, *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane.*

Ora mi sta a cuore di porre in chiaro *la facilità e la fecondità del metodo* che propongo; a questo intento gioveranno alcuni esempi.

1.° Sia φ_4 una superficie di 2.° grado, rappresentata mediante projezione da un suo punto sopra il piano Π: così che il sistema Σ sarà formato dalle curve di 4.° ordine dotate di due punti doppj fissi 1, 2. Allora le K possono essere:

a) Le rette del piano Π; il luogo L è composto della retta 12 e di una conica per 1 2; il sistema omaloidale è dunque costituito dalle superficie di 2.° grado aventi in comune una conica ed un punto, e la trasformazione inversa è di 2.° grado *). La Jacobiana delle K rappresenta [69] due rette; dunque le ψ, oltre ad avere un punto comune (corrispondente al piano della conica comune alle φ) passeranno per una conica fissa. Si ottiene la medesima trasformazione assumendo per le K le coniche descritte per 1 2 e per un altro punto fisso o; nel qual caso L sarà una conica per 1 2. Se anche L passa per o, si ottiene una trasformazione speciale, della quale io ho già trattato altra volta **).

b) Le coniche per 1 e per due altri punti fissi $o\,o_1$; il luogo L è composto dalla retta 12 e di un'altra retta per 2. Il sistema omaloidale è costituito dalle superficie di 2.° grado aventi in comune una retta e tre punti, e la trasformazione inversa è di 3.° grado ***). La Jacobiana delle K [70] rappresenta una conica e tre rette; dunque le ψ hanno in comune una retta doppia ed una linea semplice di 3.° ordine (il sistema di tre rette semplici). Si ottiene la medesima trasformazione se le K sono cubiche $1^2\,2$ passanti per altri tre punti fissi $o\,o_1\,o_2$; se poi a questi punti si danno posizioni speciali, p. e. assumendoli in linea retta [71], ovvero infinitamente vicini, si giunge a trasformazioni particolari.

c) Le coniche per tre punti fissi $o\,o_1\,o_2$; il luogo L riducesi allora alla retta 12 contata due volte. Le superficie del sistema omaloidale sono circoscritte ad un tetraedro fisso, in un vertice del quale hanno un piano tangente fisso. La trasformazione inversa è del 4.° grado †). La Jacobiana delle K [72] rappresenta tre coniche e due rette; dunque

*) È questa l'*ordinaria* trasformazione conica, stata studiata dal prof. SCHIAPARELLI, (*Sulla trasformazione geometrica delle figure* nelle Memorie dell'Accademia di Torino, 1862) e da altri. Il prof. GEISER nel Giornale CRELLE-BORCHARDT (t. 70, p. 249) l'ha adoperata per dedurre la superficie di 4.° ordine con una conica doppia dalla superficie generale di 3.° ordine. Faccio qui questa citazione espressamente per riparare ad una involontaria ma poco scusabile omissione, nella quale sono incorso quando ho trattato il medesimo argomento con un metodo assai somigliante, benchè non identico (Rendiconti di questo R. Istituto, 9 marzo 1871) [Queste Opere, n. **88**].

) Rendiconti di questo R. Istituto, 9 e 23 marzo 1871 [Queste Opere, n. **88, 89].

***) Questa trasformazione è già stata indicata dal sig. CAYLEY (l. c.).

†) Le superficie ψ sono superficie di STEINER (4.° ordine e 3.ª classe) aventi in comune le tre rette doppie e una conica. Se si parte dalla rappresentazione di una superficie di STEINER (Rendiconti di questo R. Istituto, 24 gennajo 1867) [Queste Opere, n. **71** (t. 2.°)], per ottenere l'attuale trasformazione basta assumere come linee K le rette del piano rappresentativo: il

le ϕ hanno in comune un luogo doppio di 3.° ordine (tre rette doppie) e una conica semplice. Si perviene al medesimo risultato se le K sono curve di 4.° ordine $1^2\,2^2$ aventi un altro punto doppio fisso o e tre punti semplici pure fissi $o_1\,o_2\,o_3$; e anche qui si possono di nuovo fare ipotesi speciali sulla giacitura scambievole di questi punti.

2.° Sia φ_4 una superficie generale di 3.° ordine, rappresentata in Π nel modo consueto, così che il sistema Σ sarà formato dalle curve di 9.° ordine $1^3\,2^3\,3^3\,4^3\,5^3\,6^3$ dotate di sei punti tripli fissi.

a) Le K siano le rette del piano Π, ovvero le coniche $1\,2\,3$, ovvero le cubiche $1^2\,2\,3\,4\,5$, ovvero le curve di 4.° ordine $1^2\,2^2\,3^2\,4\,5\,6$, o quelle del 5.° ordine $1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2$; le quali tutte rappresentano cubiche gobbe. Il luogo L sarà l'imagine di una curva Λ di 6.° ordine, tutt'al più del genere 3. Le superficie di 3.° ordine passanti per Λ formano adunque il sistema omaloidale, e la trasformazione inversa è di nuovo del 3.° grado, cioè le superficie ϕ sono pur esse di 3.° ordine e tutte passanti per una curva fissa Λ', analoga a Λ; infatti, la Jacobiana delle K [73] rappresenta sei rette. Questa trasformazione finchè si supponga Λ affatto generale, è quella notissima che serve alla rappresentazione piana delle superficie di 3.° ordine; ma essa comprende sotto di sè un gran numero di trasformazioni speciali, corrispondenti a casi particolari della curva Λ e a spezzamenti della medesima in linee distinte; delle quali trasformazioni speciali alcune soltanto vennero sin qui prese in considerazione *). Tali trasformazioni speciali sono assai importanti e possono offrire anche maggiori vantaggi che non la trasformazione generale, quando si tratti di applicarle alla rappresentazione di una superficie su di un'altra **). Questa applicazione conduce a riconoscere l'esistenza e le proprietà di un'estesissima serie di superficie omaloidi: e ciò s'intenda detto anche dei casi compresi in tutte le altre trasformazioni generali, sia

---

luogo L (del 7.° ordine) sarà composto delle tre rette imagini delle rette doppie, contate due volte, e di un'altra retta. Di questa trasformazione, la quale si trova già accennata in una mia comunicazione alla R. Società delle scienze di Gottinga (Nachrichten 3 maggio 1871) [Queste Opere n. **93**], ho anche fatto applicazione allo studio ed alla rappresentazione piana di una certa superficie di 4.° ordine dotata di 4 punti doppj, in una Memoria presentata all'Accademia di Bologna [Queste Opere, n. **94**]. Cfr. Reye, *Geometrie der Lage*, 2. Abth. pp. 246 e seg., dove la rappresentazione della superficie di Steiner e di alcune altre è ricavata da una corrispondenza fra due spazj, della quale è un caso particolare la trasformazione nostra attuale. Però la corrispondenza imaginata dal sig. Reye non conduce ad una trasformazione la cui inversa sia razionale, giacchè le superficie delle quali egli fa uso non formano un sistema omaloidale.

*) Vedi per es. Geiser, *Zur theorie der Flächen zweiten und dritten Grades* (Giornale Crelle-Borchardt, t. 69), Sturm, *Ueber das Flächennetz zweiter Ordnung* (d. G. t. 70), Cayley l. c.

**) E ciò perchè quando Λ consta di varie linee, si può far passare anche soltanto per alcune di queste la superficie che si vuol trasformare. Per le applicazioni delle quali qui si discorre, veggasi la menzionata comunicazione nelle Nachrichten di Gottinga.

del 3.° grado, sia de' gradi superiori. Le medesime trasformazioni speciali hanno anche la notevole proprietà che non in tutte lo spezzamento della curva Λ' è analogo a quello di Λ.

b) Le K siano coniche $1\,2\,o$ (dove o indica un punto fisso, diverso dai punti fondamentali), o cubiche $1^2\,2\,3\,4\,o$, o curve di 4.° ordine $1^3\,2\,3\,4\,5\,6\,o$, o curve di 4.° ordine $1^2\,2^2\,3^2\,4\,5\,o$, o curve di 5.° ordine $1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5\,6\,o$, o curve di 6.° ordine $1^3\,2^3\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,o$, tutte rappresentanti curve gobbe di 4.° ordine e 2.ª specie. Il luogo complementare L sarà [l'imagine di] una curva Λ gobba di 5.° ordine, in generale del genere 1, incontrante in 10 punti ciascuna delle predette curve gobbe di 4.° ordine. Il sistema omaloidale è dunque costituito dalle superficie di 3.° ordine che passano per Λ e per un punto fisso O dello spazio. La trasformazione inversa è di 4.° grado. La Jacobiana delle K [73] rappresenta due coniche e cinque rette; dunque le ψ sono superficie di 4.° ordine aventi in comune una conica doppia ed una curva semplice di 5.° ordine ($p=1$). La Jacobiana delle φ è composta della superficie di 3.° ordine (per la quale O è un punto doppio) luogo delle coniche passanti per O e seganti in cinque punti la curva Λ, e della superficie di 5.° grado formata dalle rette trisecanti Λ. La Jacobiana delle ψ è composta del piano della conica doppia, contato due volte, e della superficie di 10.° grado formata dalle corde della curva di 5.° ordine che incontrano la conica doppia.

c) Le K siano coniche $1\,o\,o_1$, o cubiche $1^2\,2\,3\,o\,o_1$, o curve di 4.° ordine $1^3\,2\,3\,4\,5\,o\,o_1$, o curve di 4.° ordine $1^2\,2^2\,3^2\,4\,o\,o_1$, o curve di 5.° ordine $1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5\,o\,o_1$, o curve di 6.° ordine $1^3\,2^3\,3^3\,4^2\,5\,6\,o\,o_1$, o curve di 6.° ordine $1^4\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6\,o\,o_1$, o curve di 7.° ordine $1^4\,2^3\,3^3\,4^2\,5^2\,6^2\,o\,o_1$, o curve di 8.° ordine $1^4\,2^3\,3^3\,4^3\,5^3\,6^3\,o\,o_1$, che rappresentano curve gobbe razionali del 5.° ordine. Il luogo L [74] è l'imagine d'un luogo di 4.° ordine composto di una retta e di una cubica gobba, o di due rette e di una conica, o di quattro rette; e le superficie di 3.° ordine passanti per questo luogo e per due punti fissi sono gli elementi del sistema omaloidale. La trasformazione inversa è del 5.° grado. Nel caso più generale di questa trasformazione, cioè quando le φ hanno in comune una retta ed una cubica gobba, non segantisi in alcun punto, la loro Jacobiana è composta dei due piani passanti per la retta fissa e risp. pei punti fissi, dell'iperboloide passante per la cubica gobba e pei due punti fissi, e della superficie di 4.° grado formata dalle corde della cubica gobba incontrate dalla retta fissa. La Jacobiana delle curve K [73] rappresenta una cubica gobba, due coniche e cinque rette; epperò le ψ sono superficie di 5.° ordine aventi in comune una retta tripla A, due rette doppie B, C non segantisi fra loro ma segate entrambe da A, e una curva semplice D di 5.° ordine ($p=0$) che incontra A in due punti, B e C in tre punti *). La Jacobiana delle ψ è composta dei piani A B, A C contati due volte, della su-

*) Non credo sia ancora stata studiata questa interessante superficie F_5 di 5.° ordine, dotata di una retta tripla A e di due rette doppie B e C. Essa può dedursi da una superficie F'_4 di 4.° ordine dotata di un punto triplo O', mediante una trasformazione di 3.° grado, nella

perficie di 4.° grado formata dalle rette che incontrano B, C e D, e della superficie di 8.° grado, luogo delle corde di D incontrate da A.

d) Le K siano cubiche $1\,2\,3\,4\,o^2$, o curve di 4.° ordine $1^2\,2^2\,3\,4\,5\,o^2$, o curve di 5.° ordine $1^3\,2^2\,3^2\,4\,5\,6\,o^2$, o curve di 5.° ordine $1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,o^2$, o curve di 6.° ordine $1^3\,2^3\,3^2\,4^2\,5^2\,6\,o^2$, o curve di 7.° ordine $1^3\,2^3\,3^3\,4^3\,5^2\,6^2\,o^2$, rappresentanti curve gobbe razionali di 5.° ordine, dotate di un punto doppio fisso. Il luogo L rappresenterà una curva gobba Λ di 4.° ordine e 2.ª specie, incontrante in 10 punti ciascuna delle curve predette. Il sistema omaloidale sarà formato dalle superficie di 3.° ordine che passano per Λ ed inoltre hanno fra loro un contatto di 1.° ordine in un punto fisso O. La trasformazione inversa è di 5.° grado. La Jacobiana delle φ è costituita dall'iperboloide passante per Λ e dalla superficie di 6.° ordine luogo delle coniche che toccano in O le φ e incontrano Λ quattro volte. La Jacobiana delle curve K [73] rappresenta cinque coniche e due rette; dunque le ψ sono superficie di 5.° ordine aventi in comune una curva doppia (razionale e dotata di un punto triplo) di 5.° ordine e una conica semplice (che incontra la curva doppia in quattro punti). Il punto triplo della curva doppia è triplo per tutte le ψ. La Jacobiana delle ψ comprende la superficie di 10.° grado, luogo delle corde della curva doppia segate dalla conica semplice, e il cono di 2.° grado (contato tre volte) che projetta la curva doppia dal punto triplo.

e) Le K siano cubiche $1^2\,2\,o\,o_1\,o_2$, o curve di 4.° ordine $1^3\,2\,3\,4\,o\,o_1\,o_2$, o curve di 5.° ordine $1^4\,2\,3\,4\,5\,6\,o\,o_1\,o_2$, o curve di 6.° ordine $1^3\,2^3\,3^3\,4^2\,5\,o\,o_1\,o_2$, o curve di 7.° ordine $1^5\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,o\,o_1\,o_2$, o curve di 7.° ordine $1^4\,2^3\,3^3\,4^3\,5\,6\,o\,o_1\,o_2$, o curve di 8.° ordine $1^5\,2^3\,3^3\,4^3\,5^2\,6^2\,o\,o_1\,o_2$, rappresentanti curve gobbe razionali di 6.° ordine. Il luogo L [75] sarà l'imagine di un luogo di 3.° ordine costituito da due rette non segantisi, una delle quali contata due volte. Dunque il sistema omaloidale si compone delle superficie di 3.° ordine toccantisi lungo una retta e segantisi lungo un'altra retta (non appoggiata alla prima) e in tre punti fissi. La trasformazione inversa è di 6.° grado. Le ψ sono superficie di 6.° ordine aventi in comune una retta quadrupla, tre rette doppie e una curva semplice di 5.° ordine.

f) Le K siano curve di 4.° ordine $1\,2\,3\,4\,5\,6\,o^3$, o curve di 5.° ordine $1^2\,2^2\,3^2\,4\,5\,6\,o^3$, o curve di 6.° ordine $1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6\,o^3$, o curve di 7.° ordine $1^3\,2^3\,3^3\,4^2\,5^2\,6^2\,o^3$, o curve di 8.° ordine $1^3\,2^3\,3^3\,4^3\,5^3\,6^3\,o^3$, le quali rappresentano curve gobbe razionali di 6.° ordine

quale le superficie φ abbiano in O' un punto doppio e passino per una curva di 4.° ordine e 1.ª specie, descritta per O' su F'_4 e per due corde di questa curva, uscenti da O'. La superficie F_5 possiede 10 rette semplici, 4 delle quali incontrano B e C, mentre le altre 6 sono appoggiate ad A. Nella rappresentazione minima di F_5, la quale si ottiene projettando F'_4 da O', le imagini delle sezioni piane di quella superficie sono curve di 3.° ordine passanti per quattro punti fissi, i quali sono le intersezioni di due coniche che rappresentano le rette doppie. La retta tripla è rappresentata da una retta.

aventi tutte uno stesso punto triplo. Il luogo L rappresenta ora una cubica gobba Λ; e le superficie del sistema omaloidale passano per Λ e hanno tutte fra loro un contatto di 2.° ordine in un punto fisso. La trasformazione inversa è di 6.° grado. Le ψ sono superficie di 6.° ordine aventi in comune una retta tripla ed una curva doppia di 6.° ordine.

3.° Sia ora φ_4 una superficie di 3.° ordine, dotata di un punto doppio O; rappresentandola su Π mediante projezione dal detto punto, l'imagine dell'intersezione con un'altra superficie di 3.° ordine, che abbia lo stesso punto doppio, sarà una curva di 5.° ordine segante in sei punti fissi 123456 la conica dalla quale è rappresentato il punto O.

a) Siano le K coniche $1\,o_1\,o_2$, che rappresentano curve gobbe razionali di 5.° ordine con un punto triplo in O. Il luogo L sarà una cubica 23456, che rappresenta una curva gobba Λ di 4.° ordine e 1.ª specie, passante per O e segante ciascuna delle predette curve di 5.° ordine in altri sei punti. Il sistema omaloidale sarà perciò formato dalle superficie di 3.° ordine che passano per Λ, hanno in O un punto doppio ed inoltre due punti semplici fissi comuni O_1, O_2. La trasformazione inversa è del 5.° grado. La Jacobiana delle φ è costituita dalle superficie di 2.° grado $O_1\Lambda$, $O_2\Lambda$, dal piano OO_1O_2 e dal cono cubico $O\Lambda$. Le ψ sono di nuovo (come nel caso 2.°, *c*) superficie di 5.° ordine aventi in comune una retta tripla A e due rette doppie B, C (non segantisi queste ultime fra loro, ma segate entrambe da A); ma oltre a ciò le ψ passano per una curva fissa D di 5.° ordine ($p=1$) che sega A in tre punti, B e C in due punti. La Jacobiana delle ψ è formata dalla superficie di 6.° grado, luogo delle rette appoggiate a B, C, D, dai piani AB, AC contati due volte, e dalla superficie di 3.° grado, pur contata due volte, che è il luogo delle corde di D incontrate da A.

b) Le K siano coniche $o_1\,o_2\,o_3$, epperò rappresentino curve gobbe razionali di 6.° ordine, con un punto quadruplo in O. Il luogo L sarà una cubica 123456 che rappresenta una curva piana Λ di 3.° ordine. Le superficie di 3.° ordine costituenti il sistema omaloidale passano per Λ ed hanno tutte in comune il punto doppio O e tre punti semplici O_1, O_2, O_3. La trasformazione inversa è del 6.° grado. La Jacobiana delle φ comprende il piano di Λ, da contarsi due volte, i piani OO_2O_3, OO_3O_1, OO_1O_2, ed il cono cubico $O\Lambda$. Le ψ sono superficie di 6.° ordine, aventi in comune tre rette triple (concorrenti in un punto) e una curva semplice di 6.° ordine ($p=1$) che sega ciascuna retta tripla in tre punti.

c) Le K siano cubiche $o^2 o_1 o_2 12$, che rappresentano curve gobbe razionali di 7.° ordine, aventi un punto quadruplo in O ed inoltre un punto doppio e due punti semplici fissi. Il luogo L sarà una conica 3456, che rappresenta una conica appoggiata in sei punti a ciascuna delle curve gobbe di 7.° ordine. Il sistema omaloidale è ora formato dalle superficie di 3.° ordine passanti per la detta conica ed aventi il punto doppio O, le quali inoltre abbiano tre punti semplici comuni, e in uno di questi siano toccate da un piano fisso. La trasformazione inversa è del 7.° grado. Le superficie ψ hanno in comune una retta quadrupla, due rette triple, una conica doppia ed una curva semplice di 4.° ordine.

d) Le K siano curve di 4.° ordine $o^3 12345 o_1$, che rappresentano curve gobbe razionali di 7.° ordine, aventi due punti tripli ed un punto semplice fisso. Il luogo L sarà una retta pel punto 6 e rappresenterà una conica passante per O ed incontrante in altri quattro punti ciascuna delle curve di 7.° ordine. Il sistema omaloidale si compone delle superficie di 3.° ordine che, oltre al passare per questa conica e ad avere il punto doppio O, posseggono due punti semplici comuni, in uno de' quali hanno fra loro un contatto di 2.° ordine. La trasformazione inversa è del 7.° grado. Le superficie ψ hanno in comune una retta quadrupla, una retta tripla, una curva doppia di 5.° ordine e una retta semplice.

e) Le K siano curve di 4.° ordine $o^2 o_1^2 1^2 234$, alle quali corrispondono curve gobbe di 7.° ordine con un punto triplo e due punti doppi fissi. Qui il sistema omaloidale è costituito dalle superficie di 3.° ordine che hanno il punto doppio O, passano per due rette fisse (l'una rappresentata dal punto 1, l'altra dalla retta 56) che non si segano, ed inoltre si toccano in due punti dati. La trasformazione inversa è del 7.° grado. Le superficie ψ hanno in comune una cubica tripla, [una retta tripla], due rette doppie ed una conica semplice.

f) Le K siano curve di 4.° ordine $o^3 o_1 o_2 1234$, che rappresentano curve gobbe razionali di 8.° ordine, dotate di un punto quadruplo O e di un punto triplo. Il luogo L riducesi qui alla retta 56 che rappresenta una retta appoggiata in quattro punti a ciascuna delle curve gobbe di 8.° ordine. Il sistema omaloidale è costituito dalle superficie di 3.° ordine passanti per questa retta, aventi in O un punto doppio, ed inoltre tre punti semplici comuni, con un contatto di 2.° ordine in uno di questi. La trasformazione inversa è dell'8.° grado. Le ψ hanno in comune una retta quintupla, due rette triple, una curva doppia di 4.° ordine e una conica semplice.

g) Siano le K curve di 5.° ordine $o^4 o_1 o_2 123456$, alle quali corrispondono curve gobbe razionali di 9.° ordine, aventi due punti quadrupli e due punti semplici fissi. Il luogo L qui scompare affatto. Le superficie di 3.° ordine costituenti il sistema omaloidale hanno in comune il punto doppio e tre punti semplici, con un contatto di 3.° ordine in uno di questi. La trasformazione inversa è del 9.° grado. Le ψ hanno in comune una retta sestupla, due rette triple, una curva doppia del 6.° ordine.

4.° Sia φ_4 una superficie gobba di 3.° grado, la cui retta doppia indicherò con D. È noto *) che essa può essere rappresentata in un piano Π, in modo che le imagini delle sue sezioni piane siano coniche passanti per un punto fisso 1 e seganti armonicamente un dato segmento. L'imagine dell'intersezione con un'altra superficie gobba di 3.° ordine, dotata della medesima retta doppia D, sarà una curva di 4.° ordine con un punto triplo in 1. Secondo che si assumono per le K le rette del piano Π, o le coniche $1 o o_1$, o le cubiche $1^2 o o_1 o_2 o_3$, o le curve di 4.° ordine $1^3 o o_1 \ldots o_5$, si ottengono trasformazioni le cui inverse sono ordinatamente di 2.° 3.° 4.° 5.° grado. Il sistema omaloidale è formato da superficie gobbe

*) Rendiconti di questo R. Istituto, 24 gennajo 1867 [Queste opere, n. 71 (t. 2.°)].

di 3.° grado che hanno in comune la retta doppia D ed inoltre: nel 1.° caso tre generatrici *); nel 2.° due generatrici e due punti; nel 3.° una generatrice e quattro punti; nell'ultimo sei punti fissi. In tutti questi casi le ϕ sono pur esse superficie gobbe dotate di una comune retta, multipla ordinatamente secondo i numeri 1, 2, 3, 4; le quali hanno dippiù, in comune, nel 1.° caso tre punti; nel 2.° due generatrici e due punti; nel 3.° quattro generatrici ed un punto; nell'ultimo sei generatrici.

*) È questa la trasformazione già ottenuta (1.°, *b*).

92.

SULLE TRASFORMAZIONI RAZIONALI NELLO SPAZIO.

NOTA 2.ª

Rendiconti del R. Istituto Lombardo, Serie II, volume IV (1871), pp. 315-324.

5.° Sia φ_4 una superficie di 3.° ordine con due punti doppj (conici) P_1, P_2; essa può essere rappresentata sul piano Π in modo che de' sei punti fondamentali 123456, ciascuno de' gruppi 123, 145 sia in linea retta. L'imagine dell'intersezione con un'altra superficie di 3.° ordine, dotata dei medesimi punti doppj P_1, P_2, sarà una curva di 5.° ordine 23456^3.

a) Le K siano rette, ovvero coniche 246, ovvero cubiche 23456^2, che rappresentano cubiche gobbe per P_1, P_2. Il luogo L sarà l'imagine di una curva gobba razionale di 5.° ordine Λ, che ha due punti doppj in P_1, P_2, e incontra ciascuna cubica gobba in altri quattro punti. Il sistema omaloidale è dunque formato dalle superficie di 3.° ordine φ che hanno in comune i punti doppi P_1, P_2 (epperò la retta P_1P_2) e la curva Λ. La trasformazione inversa è di 3.° ordine; cioè le ψ sono superficie di 3.° ordine, passanti per due coniche C, C' (non aventi punti comuni), per la retta comune ai loro piani e per un'altra retta R appoggiata in un punto sì a C sì a C'. La Jacobiana delle φ è composta dei due coni cubici $P_1\Lambda$, $P_2\Lambda$ e della superficie di 2.° grado, luogo delle rette trisecanti Λ. La Jacobiana delle ψ è composta dei piani di C, C', contati due volte e della superficie di 4.° grado, luogo delle rette appoggiate a C, C', R. Le cubiche gobbe corrispondenti alle rette dello spazio (y) incontrano in tre punti C, in tre C', in due R.

b) Le K siano coniche 236, che rappresentano cubiche piane con un punto doppio in P_2; il luogo L sarà una cubica 456^2 e rappresenterà una curva gobba razionale Λ di 5.° ordine che ha in P_1 un punto triplo, passa semplicemente per P_2 e incontra in altri quattro punti ciascuna di quelle cubiche piane. Le φ sono adunque le superficie di 3.° ordine dotate de' punti doppj P_1, P_2, che hanno in comune, oltre la retta P_1P_2, la curva Λ; e la loro Jacobiana è costituita dal cono quadrico $P_1\Lambda$ preso due volte e dal cono di 4.° ordine $P_2\Lambda$. La trasformazione inversa è di 3.° ordine. Le superficie cubiche ψ hanno un punto doppio Q, si toccano lungo una retta che passa per Q, e si segano secondo una curva Λ' di 4.° ordine e 2.ª specie, appoggiata alla retta nominata in tre punti. La Jacobiana delle ψ è formata dal cono di 4.° ordine $Q\Lambda'$ e dalla superficie di 2.° grado (contata due volte) che passa per Λ'. Alle rette dello spazio (y) corrispondono cubiche piane per le quali Q è un punto doppio.

c) Le K siano coniche $26o$, ovvero cubiche 2346^2o, che rappresentano curve gobbe di 4.° ordine passanti per due punti fissi P_1, O ed aventi un punto doppio pure fisso, P_2. La curva gobba Λ, corrispondente al luogo L, è anch'essa di 4.° ordine, passa per P_2, ha un punto doppio in P_1 e incontra in altri quattro punti ciascuna delle anzidette curve rappresentate dalle K. Ne segue che il sistema omaloidale è costituito dalle superficie di 3.° ordine che hanno in comune i punti doppj P_1, P_2, il punto semplice O, la retta P_1P_2 e la curva Λ; la Jacobiana delle quali comprende la superficie di 2.° grado $O\Lambda$, il piano OP_1P_2, il cono quadrico $P_1\Lambda$ ed il cono cubico $P_2\Lambda$. La trasformazione inversa è del 4.° ordine; e le superficie ψ hanno in comune due rette doppie D, D' che si segano, due rette semplici R, R' poste in uno stesso piano con D', ed una cubica gobba Λ' che incontra D ed R' in due punti, D' in un punto. La Jacobiana delle ψ è composta della superficie di 4.° grado $D^3D'\Lambda'R$ (luogo delle rette appoggiate a D, R, Λ'), della superficie di 2.° grado $DD'\Lambda R'$ (luogo delle rette che incontrano D, Λ, R'), e dei piani DD', D'RR': dove le ultime tre superficie sono da contarsi due volte. Alle rette dello spazio (y) corrispondono cubiche gobbe che incontrano Λ' in tre punti, R e D in due, D' in un solo.

d) Le K siano coniche $6o_1o_2$, o cubiche $246^2o_1o_2$, o curve di 4.° ordine $23456^3o_1o_2$, alle quali corrispondono nello spazio curve gobbe di 5.° ordine con due punti doppj P_1, P_2 e due punti semplici pure fissi O_1, O_2. Le φ sono in questo caso le superficie di 3.° ordine, aventi in comune i punti doppj P_1, P_2, i punti semplici O_1, O_2, la retta P_1P_2 e una cubica gobba Λ che passa per P_1, P_2, e incontra in altri quattro punti ciascuna delle accennate curve di 5.° ordine. La Jacobiana delle φ comprende la superficie di 2.° ordine $O_1O_2\Lambda$, i piani $O_1P_1P_2$, $O_2P_1P_2$, ed i coni quadrici $P_1\Lambda$, $P_2\Lambda$. La trasformazione inversa è di 5.° grado; e le ψ sono superficie di 5.° ordine aventi in comune una retta tripla A, due rette doppie B_1, B_2 (appoggiate ad A, ma non segantisi fra loro), due coniche H, K (che fra loro non s'incontrano, ma ciascuna delle quali ha un punto comune con A, B_1, B_2) ed una retta semplice R, appoggiata alle B_1, B_2, H, K. La Jacobiana delle ψ è composta della superficie di 4.° grado, luogo delle rette appoggiate ad A, H, K; dei piani AB_1, AB_2; e delle superficie di 2.° grado B_1B_2H, B_1B_2K: gli ultimi quattro luoghi essendo da contarsi due volte. Alle rette dello spazio (y) corrispondono cubiche gobbe che incontrano A in due punti, H e K in due, B_1 e B_2 in uno solo *).

e) Le K siano cubiche $26^2o_1o_2o_3$, ovvero curve di 4.° ordine $2346^3o_1o_2o_3$, rappre-

*) Questa trasformazione è un caso particolare di quella già considerata, 3.°, *a*).

sentanti curve gobbe di 6.° ordine, per le quali il punto triplo P_2, il punto doppio P_1 ed i punti semplici $O_1 O_2 O_3$ sono fissi. Le φ sono superficie di 3.° ordine, dotate de' punti doppj P_1, P_2 e segantisi ne' punti (semplici) fissi $O_1 O_2 O_3$ ed in una conica Λ, parimente data, che passa per P_1 ed incontra in quattro altri punti ciascuna delle predette curve di 6.° ordine. La Jacobiana delle φ è costituita dal piano di Λ, dai tre piani $O_1P_1P_2$, $O_2P_1P_2$, $O_3P_1P_2$, dalla superficie di 2.° grado $O_1O_2O_3P_2\Lambda$ e dal cono quadrico $P_2\Lambda$. La trasformazione inversa è di 6.° grado; cioè le ψ sono superficie di 6.° ordine, che hanno in comune una retta quadrupla A, tre rette doppie $B_1 B_2 B_3$, una cubica gobba C e due altre rette (semplici) D, R. Le rette $B_1 B_2 B_3$ a due a due non s'incontrano, ma sono segate tutte e tre dalle A, D, R. La cubica gobba C ha due punti comuni con A, ed uno con ciascuna delle B_1, B_2, B_3, R. La Jacobiana delle ψ è composta della superficie di 4.° ordine, luogo delle rette appoggiate ad A, D, C; della superficie di 3.° ordine luogo di coniche che incontrano due volte C ed una volta A, B_1, B_2, B_3; della superficie di 2.° ordine, luogo delle rette appoggiate a B_1, B_2, B_3; e de' tre piani AB_1, AB_2, AB_3: ove questi luoghi, ad eccezione del primo, siano contati due volte. Alle rette dello spazio (y) corrispondono cubiche gobbe che incontrano A e C due volte, le B e D una volta *).

f) Le K siano cubiche $6^2 o_1 o_2 o_3 o$, o curve di 4.° ordine $246^3 o_1 o_2 o_3 o$, o curve di 5.° ordine $23456^4 o_1 o_2 o_3 o$, imagini di curve gobbe del 7.° ordine, che hanno in comune i punti tripli $P_1 P_2$ e i punti semplici $O_1 O_2 O_3 O$. Le superficie di 3.° ordine φ, oltre ai punti doppj $P_1 P_2$, ai punti semplici $O_1 O_2 O_3 O$ ed alla retta P_1P_2, hanno ancora un'altra retta comune Λ, alla quale le predette curve gobbe si appoggiano tutte in quattro punti. La Jacobiana delle φ consta de' sei piani $P_1 P_2 O_1$, $P_1 P_2 O_2$, $P_1 P_2 O_3$, $P_1 P_2 O$, $P_1 \Lambda$, $P_2 \Lambda$ e della superficie di 2.° grado $O_1 O_2 O_3 O P_1 P_2 \Lambda$. La trasformazione inversa è di 7.° grado, e le superficie (di 7.° ordine) ψ hanno in comune una retta quintupla A, quattro rette doppie $B_1 B_2 B_3 B$ (che a due a due non si segano, ma che sono tutte incontrate da A), una retta semplice R (seconda trasversale comune alle B) e due coniche semplici C_1, C_2 (che tra loro non si segano, ma ciascuna delle quali incontra in un punto ciascuna delle A, B). La Jacobiana delle ψ è composta della superficie di 4.° ordine, luogo delle rette che incontrano A, C_1, C_2; de' quattro piani AB_1, AB_2, AB_3, AB, e di due superficie gobbe di 3.° ordine, la prima luogo di coniche che incontrano $AB_1 B_2 B_3 B C_1$,

*) Di qui si cava una rappresentazione piana assai semplice della superficie di 6.° ordine, dotata di una retta quadrupla A e di tre rette doppie B, situate com'è detto sopra. Nel piano rappresentativo si tracci una conica A, come imagine della retta quadrupla; in essa prendansi due punti 1, 2, e fuori di essa quattro punti *o, a, b, c*. Le coniche descritte per *o a b c* determinano su A un'involuzione di 4.° grado. Le imagini delle sezioni piane saranno allora le cubiche passanti per *o* 1 2 e per quattro altri punti di A formanti un grupppo dell'involuzione. Alle tre rette doppie corrisponderanno i raggi *oa, ob, oc*.

l'altra luogo di coniche che incontrano $A\ B_1\ B_2\ B_3\ B\ C_2$: ove queste superficie, ad eccezione della prima, siano contate due volte. Alle rette dello spazio (y) corrispondono cubiche gobbe che incontrano due volte A, ed una volta ciascuna delle B, C.

6.° Sia φ_4 una superficie di 3.° ordine con tre punti doppj P_1, P_2, P_3; i sei punti fondamentali della sua rappresentazione piana possono essere assunti in modo che tre di essi, 4, 5, 6 giacciano nei lati 23, 31, 12 del triangolo formato dagli altri tre. Allora l'imagine dell'intersezione di φ_4, con un'altra superficie φ, dello stesso ordine e dotata de' medesimi punti doppj, sarà una curva di 3.° ordine passante pei punti 4 5 6. Tale intersezione è una curva gobba di 6.° ordine (per la quale P_1, P_2, P_3 sono punti doppj); giacchè le due superficie hanno necessariamente in comune le rette P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2. Di qui consegue che, partendo dalla superficie φ_4, si giungerà a trasformazioni le cui inverse saranno tutt'al più di 6.° grado.

a) Le K siano rette, ovvero coniche 456, che rappresentano cubiche gobbe passanti pei punti $P_1\ P_2\ P_3$ e seganti in altri due punti una cubica gobba fissa Λ, che contiene pur essa i tre punti dati. Questa cubica gobba Λ è comune alle φ del sistema omaloidale; la cui Jacobiana comprende i coni quadrici $P_1\Lambda$, $P_2\Lambda$, $P_3\Lambda$ e due volte il piano $P_1P_2P_3$. La trasformazione inversa è del 3.° grado; e le superficie cubiche ψ hanno in comune un punto doppio Q, tre rette A_1, A_2, A_3 uscenti da Q e tre altre rette B_1, B_2, B_3, che a due a due non si segano, ma ciascuna delle quali incontra due rette A. I piani $A_2A_3B_1$, $A_3A_1B_2$, $A_1A_2B_3$, presi due volte, e l'iperboloide $B_1B_2B_3$ costituiscono la Jacobiana delle ψ. Le cubiche gobbe corrispondenti alle rette dello spazio (y) passano per Q e incontrano in due punti ciascuna delle rette B.

b) Le K siano coniche $45o$, che rappresentano curve gobbe di 4.° ordine, passanti per tre punti fissi O, P_2, P_3 ed aventi un punto doppio in P_1. La curva Λ comune alle superficie φ è in questo caso una conica che passa per P_2, P_3 e incontra in altri due punti ciascuna di quelle curve gobbe. La Jacobiana delle φ comprende i piani P_1P_2O, P_1P_3O, il cono quadrico $P_1\Lambda$, e due volte il piano $P_1P_2P_3$ e quello di Λ. La trasformazione inversa è di 4.° grado; e le superficie ψ hanno in comune un punto triplo Q, un punto doppio Q', due rette doppie A_1, A_2 (concorrenti in Q), la retta QQ', due altre rette R_1, R_2 (concorrenti in Q', l'una nel piano A_1QQ', l'altra nel piano A_2QQ') e una conica C incontrata dalle rette $A_1\ A_2\ R_1\ R_2$. La Jacobiana delle ψ è composta del cono QC, della superficie di 2.° grado $A_1A_2R_1R_2C$ e dei piani A_1A_2, A_1R_1, A_2R_2: dove gli ultimi quattro luoghi siano presi due volte. Le cubiche gobbe corrispondenti alle rette dello spazio (y) passano per Q e Q', incontrano in un altro punto ciascuna delle rette A_1, A_2 e in due punti la conica C.

c) Le K siano coniche $6o_1o_2$, imagini di curve gobbe del 5.° ordine, per le quali P_1, P_2 sono punti doppj e P_3, O_1, O_2 punti semplici fissi; esse segano poi in altri due punti una retta fissa A, che passa per P_3 e che è comune a tutte le superficie φ del sistema omaloidale. La Jacobiana delle quali comprende il cono quadrico che ha il vertice in P_3 e passa per $O_1\,O_2\,P_1\,P_2\,A$, i piani $O_1P_1P_2$, $O_2P_1P_2$, P_1A, P_2A e due volte il piano $P_1P_2P_3$. La trasformazione inversa è del 5.° grado. Le superficie (di 5.° ordine) ψ hanno in comune un punto doppio Q, una retta tripla A, due rette doppie B_1 e B_2 (segate da A, ma non situate in uno stesso piano), due rette semplici C_1 e C_2 appoggiate alle $B_1\,B_2$, e tre altre rette semplici uscenti da Q (l'una R appoggiata alle $B_1\,B_2$, la seconda R_1 alle $A\,C_1$, la terza R_2 alle $A\,C_2$). La Jacobiana delle ψ è costituita dalla superficie di 2.° grado $AC_1C_2B_1B_2$ e da altri cinque luoghi da contarsi due volte, i quali sono i tre piani AB_1, AB_2, AR_1R_2 e le due superficie di 2.° grado $AB_1B_2C_1RR_1$, $AB_1B_2C_2RR_2$. Alle rette dello spazio (y) corrispondono cubiche gobbe che passano per Q e segano due volte A ed una volta ciascuna delle rette $B_1\,B_2\,C_1\,C_2$.

d) Da ultimo le K siano cubiche $o^2 456\, o_1$, alle quali corrispondono curve gobbe di 6.° ordine dotate di quattro punti doppj O, P_1, P_2, P_3 e passanti per un altro punto fisso O_1. In questo caso le superficie φ del sistema omaloidale, oltre ai punti doppj P_1, P_2, P_3, hanno due punti semplici comuni O, O_1, nel primo de' quali toccano un piano dato; ma, oltre alle rette che congiungono fra loro i punti doppj, non hanno alcuna linea comune. La Jacobiana delle φ comprende quella superficie del sistema che ha un punto doppio anche in O_1, i piani OP_2P_3, OP_3P_1, OP_1P_2 e due volte il piano $P_1P_2P_3$. La trasformazione inversa è del 6.° grado. Le superficie di 6.° ordine ψ hanno in comune un punto doppio Q e un punto triplo Q', una conica tripla A, tre rette doppie B_1, B_2, B_3 (che concorrono in Q' e segano A), e tre rette semplici R_1, R_2, R_3 uscenti da Q, appoggiate tutte ad A ed inoltre rispettivamente segate da B_1, B_2, B_3. La Jacobiana delle ψ comprende tre volte il cono quadrico Q'A, e due volte il piano A e le superficie di 2.° grado $AB_2B_3R_2R_3$, $AB_3B_1R_3R_1$, $AB_1B_2R_1R_2$. Le cubiche gobbe corrispondenti alle rette dello spazio (y) passano per Q e incontrano tre volte A, ed una volta ciascuna delle rette B.

7.° Suppongasi che φ_4 sia una superficie di 3.° ordine con un punto uniplanare P; la rappresentazione piana che si ottiene dalla projezione centrale ha tre punti fondamentali 1, 2, 3 in linea retta. Qualunque altra superficie di 3.° ordine, dotata del punto uniplanare P collo stesso piano tangente U, interseca φ_4 secondo una curva di 9.° ordine, per la quale P è un punto sestuplo, e la cui imagine è una cubica descritta ad arbitrio nel piano rappresentativo.

Se le K sono rette, imagini di cubiche piane con un punto doppio in P, le superficie φ del sistema omaloidale hanno in comune una curva gobba (razionale) A di 6.° ordine, per la quale P è quadruplo. Il piano U, contato due volte, e il cono quadrico che projetta A da P, contato tre volte, costituiscono la Jacobiana delle φ. La trasformazione inversa è del 3.° grado; e le ψ sono superficie di 3.° ordine, dotate di un punto doppio Q, con uno stesso cono osculatore C, le quali si toccano lungo una sezione piana comune, passante per Q. La Jacobiana delle ψ è costituita dal piano della curva di contatto, preso sei volte, e dal cono C. Alle rette dello spazio (y) corrispondono cubiche piane con un punto doppio in Q.

Partendo dalla medesima superficie φ_4 di 3.° ordine col punto uniplanare P, si possono ottenere altre trasformazioni, le cui inverse sono del 4.°, 5.°,..., 9.° grado.

8.° Sia φ_4 una superficie (di Steiner) di 4.° ordine con tre rette doppie concorrenti nel punto triplo O. Adottando il noto metodo di rappresentazione, secondo il quale le sezioni piane hanno per imagini le coniche coniugate ad un quadrilatero fisso, una conica descritta ad arbitrio nel piano Π corrisponderà all'intersezione di φ_4 con un'altra superficie di Steiner, dotata delle medesime rette doppie.

Assumendo per le K le rette del piano Π si ottiene, come ho già detto sopra, una trasformazione di 4.° grado (1.°, c), la cui inversa è del 2.°. Se invece le K sono coniche $o_1 o_2 o_3$, il sistema omaloidale sarà formato da superficie di Steiner che (oltre al possedere le medesime rette doppie) passano per tre punti fissi O_1, O_2, O_3; la Jacobiana delle quali comprende due volte i piani determinati dalle rette doppie prese a due a due, ed inoltre i tre coni quadrici che passano per le rette doppie e pei punti fissi, combinati a due a due. Alle rette dello spazio (x) corrispondono le curve gobbe di 4.° ordine e 2.ª specie passanti pei tre punti O_1 O_2 O_3 e segate due [76] volte da ciascuna delle rette doppie. Il sistema delle ψ è affatto analogo a quello delle φ, purchè i tre punti o_1 o_2 o_3 siano distinti. Ma se le coniche K si toccano in un punto o_1 e si segano in un altro o_2, ovvero se si osculano in un punto o_1, le ψ saranno superficie di Steiner appartenenti a quelle forme particolari *), nelle quali due rette doppie ovvero tutte e tre sono coincidenti.

9.° Se al sistema omaloidale delle φ in (5.°, f) si applica opportunamente la trasformazione (1.°, b), si ottiene un nuovo sistema omaloidale di superficie φ di 4.° ordine, aventi in comune una retta doppia D, tre rette semplici E_1 E_2 E_3 appoggiate a D, due punti doppj P_1 P_2, un punto semplice O, e per conseguenza anche la conica che passa per P_1 P_2 e incontra D E_1 E_2 E_3. Si giunge così ad una trasformazione di 4.° grado, la cui inversa è del 7.°, perchè alle rette dello spazio (x) corrispondono curve gobbe di 7.° ordine, che hanno due punti tripli P_1 P_2, un punto semplice O, e sono appoggiate a D in quattro ed a ciascuna E in due punti. La Jacobiana delle φ comprende i piani OP_1P_2, P_1D, P_2D, gli iperboloidi $DP_1P_2E_2E_3$, $DP_1P_2E_3E_1$, $DP_1P_2E_1E_2$ e la superficie di 3.° grado $D^2E_1E_2E_3OP_1P_2$. Le ψ sono superficie di 7.° ordine, aventi in comune una retta quadrupla A, una retta tripla B, tre rette doppie B_1 B_2 B_3, due coniche semplici C_1, C_2, ed un' altra retta doppia R: dove queste linee giacciono fra loro come le omonime in (5.°, f). La Jacobiana di questo sistema comprende due volte il piano AB e le

*) Rendiconti di questo R. Istituto, 24 gennaio 1867 [Queste Opere, n. **71** (t. 2.°)].

superficie cubiche $A^2BB_1B_2B_3C_1$, $A^2BB_1B_2B_3C_2$, ed una volta gli iperboloidi BB_2B_3, BB_3B_1, BB_1B_2 e la superficie di 4.º ordine $A^2B^2B_1B_2B_3C_1C_2$. Alle rette dello spazio (y) corrispondono curve gobbe di 4.º ordine e 2.ª specie, che incontrano B in tre, ciascuna delle B_1 B_2 B_3 in due, e ciascuna delle A C_1 C_2 in un solo punto.

10.º Sia φ_4 una superficie di 5.º ordine, dotata di una cubica gobba doppia $C^{(3)}$. Impiegando la rappresentazione d'ordine minimo, additata dal signor Clebsch *), l' intersezione di φ_4 con un altra superficie di 5.º ordine, dotata della medesima curva doppia, avrà per imagine una curva di 6.º ordine descritta per gli undici punti fondamentali 12345...

a) Assumendo per le K le rette del piano rappresentativo, le φ vengono ad avere in comune, oltre la curva doppia, una curva gobba A di 9.º ordine ($p=6$), che incontra $C^{(3)}$ in tredici punti. Alle rette dello spazio (x) corrispondono curve gobbe di 4.º ordine e 2.ª specie che segano $C^{(3)}$ in sette e A in cinque punti. La Jacobiana delle φ è costituita dalla superficie di 10.º grado, luogo delle corde di $C^{(3)}$ segate da A, e dalla superficie di 3.º ordine (contata due volte) luogo delle cubiche gobbe che incontrano $C^{(3)}$ in quattro e A in sette punti. La trasformazione inversa è del 4.º grado; e le superficie (di 4.º ordine) ψ hanno in comune un punto triplo Q ed una curva gobba A' dell'11.º ordine ($p=6$), per la quale Q è un punto sestuplo. Alle rette dello spazio (y) corrispondono curve gobbe di 5.º ordine, che hanno in Q un punto triplo e segano A' in dieci punti. La Jacobiana delle ψ è costituita dal cono di 5.º ordine che projetta A' da Q, e dalla superficie di 7.º ordine, luogo delle coniche che passano per Q e incontrano A' in cinque punti, per la quale A' è una curva doppia e Q un punto quintuplo.

b) Le K siano curve di 4.º ordine $1^2 2^2 3^2 456$; le superficie φ avranno allora in comune, oltre alla curva doppia $C^{(3)}$, una cubica gobba (semplice) A segante $C^{(3)}$ in quattro punti, e tre rette R_1, R_2, R_3, corde della curva doppia. Alle rette dello spazio (x) corrispondono curve gobbe di 7.º ordine, ciascuna delle quali incontra $C^{(3)}$ in dieci, A in otto e ciascuna retta R in due punti. La Jacobiana delle φ comprende le tre superficie quadriche $C^{(3)}R_2R_3$, $C^{(3)}R_3R_1$, $C^{(3)}R_1R_2$, la superficie di 4.º grado che è formata dalle corde di $C^{(3)}$ segate da A, e la superficie di 6.º ordine, luogo delle cubiche gobbe che incontrano A e $C^{(3)}$ in quattro e ciascuna R in un punto. La trasformazione inversa è adunque del 7.º grado; e le superficie (di 7.º ordine) ψ hanno in comune una cubica gobba tripla A, tre rette doppie B_1 B_2 B_3 (corde di A) ed una curva semplice (razionale) A' di 5.º ordine, che sega A in sei e ciascuna B in due punti **). La Jacobiana delle ψ è composta delle tre superficie quadriche

*) Mathem. Annalen, t. 1. p. 284.

**) Nella rappresentazione d'ordine minimo di una superficie ψ, le imagini delle sezioni piane sono curve di 4.º ordine con nove punti fissi $a_1\,a_2\,a_3\,b_1\,b_2\,b_3\,c_1\,c_2\,c_3$; alla curva tripla, alle tre rette doppie ed alla curva A' corrispondono ordinatamente una curva di 6.º ordine $a_1^2a_2^2a_3^2b_1^2b_2^2b_3^2c_1c_2c_3$, le rette c_2c_3, c_3c_1, c_1c_2 ed una conica $b_1b_2b_3$.

AB_2B_3, AB_3B_1, AB_1B_2; della superficie di 8.° grado $A^4 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \Lambda'$, luogo delle corde di A segate da Λ'; e della superficie di 10.° ordine $A^4 B_1^3 B_2^3 B_3^3 \Lambda'^2$, luogo delle coniche che incontrano A e Λ' in due e ciascuna retta B in un punto. Alle rette dello spazio (y) corrispondono curve gobbe di 5.° ordine, che incontrano la curva tripla in sei, ciascuna retta doppia in due e la curva Λ' in quattro punti.

Credo che questi esempj possano ormai bastare a dimostrare il mio assunto: cioè che la rappresentazione piana di una data superficie (omaloide) sia un mezzo singolarmente pronto ed efficace per giungere ad ottenere in tutt'i suoi particolari qualsiasi trasformazione (razionale), il cui sistema omaloidale contenga la superficie data *).

Le proprietà qui enunciate si dimostrano facilmente, quando si consideri che una curva razionale d'ordine n (nello spazio a tre dimensioni) è determinata da $4n$ condizioni; che, se essa deve passare con r rami per un punto dato, ciò assorbe $2r$ condizioni; ma che, se deve avere un punto r-plo in un punto O semplice per tutte le superficie φ del sistema omaloidale **), il numero delle condizioni assorbite sarà $r(r+1)$. Al punto O corrisponde nello spazio (x) una superficie omaloide d'ordine r (segante tutte le ψ esclusivamente in curve fisse, fondamentali, e faciente parte di ciascuna delle ψ di una rete contenuta nel sistema), la quale nel primo caso è compresa due volte nella Jacobiana delle ψ, ma nel secondo vi è compresa $r+1$ volte. Ad una curva Λ d'ordine i, la quale sia r-pla per tutte le φ, corrisponde una superficie (da contarsi una volta nella Jacobiana delle ψ), il cui ordine è uguale al numero delle intersezioni non fisse di Λ colla curva razionale che corrisponde ad una retta arbitraria dello spazio (x), e che sega qualunque ψ secondo alcune curve fisse ed i curve razionali d'ordine r.

---

*) Colgo quest'occasione per aggiungere alle citazioni già fatte al principio della 1.ª Nota [Queste Opere, n. 91] quella di una nuova Memoria del sig. NOETHER, *Ueber die eindeutigen Raumtransformationen* (Math. Annalen, t. 3, p. 547), della quale ho ricevuto un esemplare separato il dì 7 maggio. In questa Memoria del sig. NOETHER e nella mia Nota, *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen* (Nachrichten di Gottinga, 3 maggio) [Queste Opere n. 93], che trattano il medesimo argomento (l'applicazione delle trasformazioni di 3.° grado alla rappresentazione di superficie algebriche) e che sono state pubblicate precisamente negli stessi giorni, il lettore troverà le più singolari coincidenze anche in minuti particolari. La qual cosa non dee recare meraviglia ad alcuno, ed a me è cagione di compiacenza: tanto più che sono appunto le belle ricerche del sig. NOETHER, inserite ne' suoi lavori precedenti, che mi hanno invogliato a riprendere questi studj, e che, combinate coi risultati già da me ottenuti per le figure piane, mi condussero finalmente alla completa determinazione delle trasformazioni generali nello spazio: scopo di questa e della 1.ª Nota (4 maggio) comunicata al R. Istituto.

**) Le quali avranno ivi un contatto d'ordine $r - 1$, così che rappresentando una delle due superficie omaloidi che determinano la curva, l'imagine di questa avrà un punto r-plo in o, imagine di O.

Può accadere, come nei casi 5.° 6.° e 9.°, che le φ, oltre alle curve fondamentali necessarie per individuare il sistema, abbiano ancora in comune una linea R, determinata da quelle, la quale supporrò d'ordine i e multipla secondo r per le φ. Allora a tutt'i punti di R corrispondono linee coincidenti in una linea unica R' d'ordine r, che è multipla secondo i per le ψ. La linea R (e analogamente R') non è incontrata dalla curva razionale che corrisponde ad una retta arbitraria dello spazio (x), ed è multipla secondo $4r$ per la Jacobiana delle φ. Ecc., ecc.