88.

SULLA SUPERFICIE DI QUART' ORDINE DOTATA DI UNA CONICA DOPPIA.

PRIMA NOTA.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, volume IV (1871), pp. 140-144.

I geometri conoscono assai bene questa superficie, le cui più importanti proprietà furono messe in luce dal prof. CLEBSCH *) mediante la rappresentazione della medesima, punto per punto, sopra un piano. Ora, avendola io presa ad esempio, nelle mie lezioni del corso normale presso il R. Istituto Tecnico Superiore, per l'applicazione del metodo proposto dal sig. NÖTHER **), m'è occorso di notare che essa si ricava immediatamente da una superficie generale di 3.º ordine, alla quale si applichi una trasformazione di 2.º grado, espressa dalle seguenti formole:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_1 y_2 : y_1 y_3 : y_2 y_4 - y_3^2 ,$$

o dalle reciproche:

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 x_2 : x_2^2 : x_2 x_3 : x_1 x_4 + x_3^2 .$$

Qui $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$, $y_1 : y_2 : y_3 : y_4$ sono due punti corrispondenti di due spazj, che

*) *Ueber die Flächen vierter Ordnung welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen* (Giornale CRELLE-BORCHARDT, t. 69). Veggasi inoltre: KUMMER nel Monatsbericht 16 luglio 1863 dell'Acad. d. s. di Berlino; LA GOURNERIE nel Journal de l'École Polytechnique, 40ᵉ cahier; CAYLEY nel Quarterly Journal of Mathematics t. 10 e 11; KORNDÖRFER nei Mathematische Annalen, t. 1 e 2.

**) *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen* (Math. Annalen, t. 3). Il metodo cui si allude, ha per iscopo la rappresentazione, punto per punto sopra un piano, di una superficie che possegga una serie di curve razionali, ciascuna delle quali nasca dall'intersezione di quella con una superficie di un fascio; e consiste nel trasformare da prima la data superficie in un'altra d'ordine n, fornita di una retta multipla secondo $n-2$.

tuttavia riguardansi come sovrapposti l'uno all'altro; così che, a cagion d'esempio, il punto $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = a_1 : a_2 : a_3 : a_4$ coincida col punto $y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = a_1 : a_2 : a_3 : a_4$.

Due punti corrispondenti sono sempre in linea retta col punto o, le cui prime tre coordinate sono nulle. Il punto o è un *punto fondamentale*, o *principale* *) per entrambi gli spazj; inoltre la conica ($y_1 = 0$, $y_2 y_4 - y_3^2 = 0$) e il suo piano sono *fondamentali* per lo spazio (y), mentre la conica ($x_2 = 0$, $x_1 x_4 + x_3^2 = 0$) e il suo piano sono *fondamentali* per lo spazio (x). Al punto fondamentale di uno spazio corrisponde tutto il piano fondamentale dell'altro; e ad un punto della conica fondamentale di uno spazio corrisponde la retta che unisce questo punto al punto o. Ai piani di uno spazio corrispondono, nell'altro, superficie di 2.° grado passanti per la conica fondamentale del secondo spazio e toccanti in o il piano fondamentale del primo. Ma ai piani passanti per o corrispondono di nuovo i medesimi piani, ecc. ecc. **).

Nello spazio (x) sia data una superficie generale f di 3.° ordine, passante per la conica fondamentale di detto spazio, ma non toccata in o dal piano fondamentale dell'altro. Applicando a questa superficie la trasformazione in discorso, si ottiene una *superficie generale* F *di* 4.° *ordine, dotata di conica doppia;* per essa la conica doppia è $y_1 = 0$, $y_2 y_4 - y_3^2 = 0$; e i piani tangenti in o sono il piano $y_2 = 0$ e quello che ivi tocca f. Alle sezioni di F fatte con piani passanti per o corrispondono sezioni di f fatte coi medesimi piani; e in particolare alla conica doppia di F corrisponde la cubica comune ad f e al piano $y_1 = 0$, in modo che due punti di questa cubica allineati col punto o rappresentano un solo e medesimo punto della conica doppia di F.

Cerchiamo ora le rette di F. Evidentemente esse non possono corrispondere che a rette di f, appoggiate alla conica

$$(x_2 = 0,\ x_1 x_4 + x_3^2 = 0).$$

Diciamo a la retta di f posta nel piano $x_2 = 0$; e $(b_1, c_1), (b_2, c_2), (b_3, c_3), (b_4, c_4), (b_5, c_5)$ le dieci rette di f, incontrate da a, cioè situate a due a due nei cinque piani tritangenti che passano per a.

È noto che f possiede altre sedici rette, nessuna delle quali incontra a, che per conseguenza incontrano tutte la conica

$$(x_2 = 0,\ x_1 x_4 + x_3^2 = 0).$$

*) Cayley, *On the rational transformation between two spaces* (Proceed. London Math. Soc., 1870).

**) Malgrado la grande analogia di questa trasformazione con quella notissima che è la risultante di una trasformazione lineare colla trasformazione per raggi vettori reciproci, pure non credo ch'essa sia stata mai osservata o impiegata.

Esse possono indicarsi come segue:

a_1	che sega	$c_1 b_2 b_3 b_4 b_5$
a_2	»	$b_1 c_2 b_3 b_4 b_5$
a_3	»	$b_1 b_2 c_3 b_4 b_5$
a_4	»	$b_1 b_2 b_3 c_4 b_5$
a_5	»	$b_1 b_2 b_3 b_4 c_5$
b	»	$c_1 c_2 c_3 c_4 c_5$
c_{12}	»	$b_1 b_2 c_3 c_4 c_5$
c_{13}	»	$b_1 c_2 b_3 c_4 c_5$
c_{14}	»	$b_1 c_2 c_3 b_4 c_5$
c_{15}	»	$b_1 c_2 c_3 c_4 b_5$
c_{23}	»	$c_1 b_2 b_3 c_4 c_5$
c_{24}	»	$c_1 b_2 c_3 b_4 c_5$
c_{25}	»	$c_1 b_2 c_3 c_4 b_5$
c_{34}	»	$c_1 c_2 b_3 b_4 c_5$
c_{35}	»	$c_1 c_2 b_3 c_4 b_5$
c_{45}	»	$c_1 c_2 c_3 b_4 b_5$ *).

Soltanto a queste ultime rette corrispondono rette di F; questa superficie ha dunque *sedici rette*, situate a due a due in *quaranta piani*. Alla retta a corrisponde in F il punto o; più precisamente, ai punti di a corrispondono i punti di F infinitamente vicini ad o e situati nel piano $x_2 = 0$. Alle dieci rette (b_i, c_i) corrispondono in F altrettante coniche, tutte passanti per o ed ivi toccate dal piano $x_2 = 0$. Per o passano altre dieci coniche di F (toccate in o dal secondo piano tangente), imagini delle coniche intersezioni di f coi piani condotti per o e rispettivamente per le dieci rette (b_i, c_i).

---

*) Questa notazione è ricavata da quella che si usa comunemente per le 27 rette della superficie di 3° ordine (cfr. Rendiconti Ist. Lomb. 24 marzo 1870) [Queste Opere, n. **84**], col tralasciare l'indice 6. La notazione medesima fa subito evidente che, se dai trentasei *Doppelsechse* di SCHAEFLI formati colle 27 rette della superficie di 3.° ordine (veggasene il quadro a pag. 78 del mio *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du 3e ordre*, Giornale CRELLE-BORCHARDT, t. 68 [Queste Opere, n. **79**]) si tolgono i sedici *Doppelsechse* ne' quali entra la retta a_6 ossia a, rimangono i venti *Doppelvieren* che CLEBSCH ha mostrato potersi formare colle sedici rette della superficie di 4° ordine.

La superficie F possiede *dieci serie di coniche*, corrispondenti a quelle che si ottengono segando f coi dieci fasci di piani aventi per assi le rette (b_i, c_i). Diciamo *conjugate* le due serie corrispondenti a fasci i cui assi b_i c_i siano in uno stesso piano tritangente condotto per a. Due coniche appartenenti a serie conjugate sono sempre situate in una medesima superficie di 2.° grado, passante per la conica doppia; e il piano di una conica contiene un'altra conica della serie conjugata. Tutti i piani contenenti le coppie di coniche appartenenti a due serie conjugate sono tangenti ad uno stesso cono di 2.° grado: si hanno così *i cinque coni quàdrici* di KUMMER, *circoscritti* ad F, i quali sono individuati dalle cinque radici dell'equazione di 5.° grado, che dà i cinque piani tritangenti di f, passanti per la retta a.

Quando suppongansi note le cinque radici, la risoluzione di quattro equazioni quadratiche farà conoscere le coppie di rette (b_1, c_1), (b_2, c_2), (b_3, c_3), (b_4, c_4) situate in quattro piani tritangenti. Indi, se prendiamo una retta da ciascuna delle predette quattro coppie, p. es. $b_1\, c_2\, b_3\, b_4$, queste quattro rette, avendo già la trasversale comune a, saranno incontrate simultaneamente da un'altra retta, a_2, unica e individuata: la quale, avendo così quattro punti comuni con f, giacerà per intero su questa superficie. Le sedici quaterne analoghe a $b_1\, c_2\, b_3\, b_4$ daranno adunque senz'alcuna nuova irrazionalità le sedici rette di f, e per conseguenza le sedici di F: il che coincide coi risultati ottenuti per altra via dal sig. CLEBSCH.

Rappresentando f sopra un piano Π, avremo a un tempo rappresentata anche F. Scegliamo $a, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ come quelle rette di f che sono rappresentate dai sei punti fondamentali $0, 1, 2, 3, 4, 5$ di Π; allora i cinque punti $1, 2, \ldots, 5$, le dieci rette $12, 13, \ldots, 45$ e la conica 12345 saranno le imagini delle sedici rette di F, che indicheremo con $(a_1), (a_2), \ldots, (a_5), (c_{12}), (c_{13}), \ldots, (c_{45}), (b)$. Il punto 0, imagine della retta a di f, rappresenterà i punti di F, prossimi ad o, e situati nel primo piano tangente $x_2 = 0$; se poi sia $0'$ il punto di Π corrispondente al punto o di f, sarà $0'$ il rappresentante dei punti di F, prossimi ad o e situati nel secondo piano tangente, che è anche il piano da cui è toccata f nello stesso punto. Ne segue che il punto o di F sarà rappresentato in Π dalla coppia di punti $0, 0'$.

L'imagine della conica doppia, dovendo corrispondere alla sezione fatta in f dal piano $x_1 = 0$, sarà una cubica S passante pei punti $0 0' 1 2 3 4 5$; nella quale ogni punto m della conica doppia sarà rappresentato da due punti m m' che diremo *conjugati*. La retta mm' rappresenterà una cubica di F, avente un punto doppio in m e situata in un piano passante per la retta (b). Sia q la terza intersezione di S colla retta mm'; e q' la sesta intersezione di S colla conica 12345; la coppia qq' sarà l'imagine del punto q in cui la conica doppia è simultaneamente incontrata dalla retta (b) e dalla cubica predetta. Variando mm', varia la cubica il cui piano girerà intorno alla retta (b); dunque q, epperò anche q, rimane fisso, cioè la retta mm' passa per un punto fisso di S, che è il conjugato della sesta intersezione di questa cubica colla conica 12345. Ne segue inoltre che la retta qq' è tangente in q alla cubica S.

Di qui si ricava subito che le imagini delle sezioni piane di F sono le cubiche che, oltre al passare pei cinque punti fondamentali 12345, segano la cubica S in due punti conjugati mm'; che le dieci serie di coniche in F sono rappresentate dai cinque fasci di rette uscenti da uno dei cinque punti fondamentali, e dai cinque fasci di coniche aventi per base quattro punti fondamentali; ecc., ecc.

Siccome la teoria delle superficie di 3.° ordine è ormai molto divulgata, mi pare di poter ragionevolmente asserire, che il metodo qui proposto per lo studio della superficie di 4.° ordine, dotata di una conica doppia, sia il più semplice che si possa desiderare.

89.

SULLA SUPERFICIE DI QUART'ORDINE DOTATA DI UNA CONICA DOPPIA.

SECONDA NOTA.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, volume IV (1871), pp. 159-162.

Nella precedente comunicazione ho indicata una trasformazione razionale di 2.° grado che, applicata ad una superficie generale di 3.° ordine, conduce alla superficie generale di 4.° ordine dotata di una conica doppia. Invece, se si applica la medesima trasformazione ad una superficie di 2.° grado, comunque situata rispetto agli *elementi fondamentali*, si giunge ad un caso speciale, assai interessante, della superficie di 4.° ordine dotata di una conica doppia; caso ch'io credo non ancora osservato, e che qui mi propongo di esplicare *). La superficie F di cui si tratta, è rappresentata dall'equazione:

$$y_1^2\varphi+2y_1\mathrm{KP}+a_{44}\mathrm{K}^2=0 \tag{1}$$

dove per brevità si è posto

$$\varphi=\varphi(y)=a_{11}y_1^2+a_{22}y_2^2+a_{33}y_3^2+2a_{23}y_2y_3+2a_{31}y_3y_1+2a_{12}y_1y_2,$$
$$\mathrm{P}=\mathrm{P}(y)=a_{14}y_1+a_{24}y_2+a_{34}y_3,$$
$$\mathrm{K}=\mathrm{K}(y)=y_2y_4-y_3^2,$$

essendo

$$\varphi(x)+2x_4\mathrm{P}(x)+a_{44}x_4^2=0 \tag{2}$$

la superfie di 2.° grado sulla quale si è operata la trasformazione.

---

*) Il sig. KORNDÖRFER ha esposto con molti particolari (*Math. Annalen*, t. I, p. 592) la teoria della superficie di 4° ordine che, oltre alla conica doppia, possiede un punto conico *situato fuori della conica*. Se s'imagina che questo punto s'accosti indefinitamente alla conica fino a cadere in essa, si ottiene la superficie che io considero in questa Nota, preferendo di ricavarne le proprietà immediatamente da quelle della superficie di 2.° grado.

La superficie F *ha la conica doppia*

$$y_1=0, \quad K=0$$

e in essa il punto singolare $y_1=y_2=y_3=0$, *che rappresenta due punti doppj infinitamente vicini per la curva di* 4.° *ordine risultante dal segare* F *con un piano condotto ad arbitrio pel detto punto:* donde segue che *questa curva è razionale.* La superficie ha nel punto singolare un solo piano tangente $y_2=0$, il quale sega F lungo *quattro rette* a_1, a_2, a_3, a_4, tutte uscenti dal punto singolare e dirette ai quattro punti dati dal sistema:

$$y_2=0, \quad y_1y_4+y_3^2=0, \quad \varphi+2y_4P+a_{44}y_4^2=0.$$

Questi quattro punti sono i vertici di un quadrangolo completo, i cui punti diagonali uniti al punto singolare dànno tre rette, che dirò α_1, α_2, α_3.

La superficie ha *due altri punti cuspidali*; essi sono le intersezioni della conica doppia colle tangenti condotte dal punto $y_1=y_2=y_3=0$ alla conica

$$y_1=0, \quad \varphi+2y_4P+a_{44}y_4^2=0.$$

La superficie F *è l'inviluppo della serie di superficie di* 2.° *grado* (toccate nel punto singolare dal piano $y_2=0$)

$$a_{44}(\varphi+2\omega K)-(P-\omega y_1)^2=0, \tag{3}$$

che, oltre al cono

$$a_{44}\varphi-P^2=0$$

avente il vertice in $y_1=y_2=y_3=0$, *contiene altri tre coni circoscritti* ad F. I vertici di questi coni sono situati rispettivamente nelle tre rette α.

Di qui segue che F *possiede otto serie, conjugate a due a due, di coniche;* le coniche di due serie conjugate giacciono nei piani tangenti di uno stesso cono quadrico circoscritto.

Oltre le quattro rette a_1, a_2, a_3, a_4, *la superficie contiene otto rette*

$$b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad b_4,$$
$$c_1, \quad c_2, \quad c_3, \quad c_4,$$

formanti un così detto *Doppelvier;* cioè due rette b, c si segano se hanno indici diversi; mentre due rette b, nè due rette c, non s'incontrano. Inoltre una retta a incontra la b e la c dello stesso indice.

Dirò *1.°*, *2.°* e *3.° cono* i tre coni circoscritti ad F, i cui vertici sono nelle tre rette α; e *4.° cono* quello il cui vertice è il punto $y_1=y_2=y_3=0$. Le dodici rette di F formano venti paja, situate in altrettanti piani tritangenti, e costituenti altrettante coniche che appartengono alle otto serie suaccennate. Giacciono nei piani tangenti al 1.° cono, epperò appartengono alle prime due serie conjugate le paja

$$\left(b_2c_3,\ b_3c_2\right),\quad \left(b_1c_4,\ b_4c_1\right);$$

così pel 2.° cono

$$\left(b_3c_1,\ b_1c_3\right),\quad \left(b_2c_4,\ b_4c_2\right),$$

e pel 3.°

$$\left(b_1c_2,\ b_2c_1\right),\quad \left(b_3c_4,\ b_4c_3\right).$$

Da ultimo, pel 4.°

$$\left(a_1b_1,\ a_2b_2,\ a_3b_3,\ a_4b_4\right),$$

$$\left(a_1c_1,\ a_2c_2,\ a_3c_3,\ a_4c_4\right).$$

Di qui segue che, se s'indicano cogli stessi simboli b, c i punti in cui queste rette incontrano il piano $y_2 = 0$ (così che la retta a_r passerà pei punti b_r e c_r), le rette

$$b_2c_3,\ b_3c_2,\ b_1c_4,\ b_4c_1$$

si segheranno in uno stesso punto di α_1, cioè nel vertice del 1.° cono; così le rette

$$b_3c_1,\ b_1c_3,\ b_2c_4,\ b_4c_2$$

passeranno per uno stesso punto di α_2, cioè pel vertice del 2.° cono; e le rette

$$b_1c_2,\ b_2c_1,\ b_3c_4,\ b_4c_3$$

avranno in comune un punto di α_3, cioè il vertice del 3.° cono *).

Per conseguenza, la risoluzione dell'equazione di 8.° grado che dà le otto rette b, c (ossia gli otto punti b, c), è ridotta a risolvere: 1.° l'equazione biquadratica delle rette b (ovvero l'equazione cubica delle tre rette α); 2.° l'equazione quadratica che dà le due rette b, c che incontrano la retta a, corrispondente ad una radice dell'equazione biquadratica.

La rappresentazione della superficie F sopra un piano Π si ottiene assai facilmente projettando la superficie (2) di 2.° grado, di cui quella è la trasformata, da un suo punto e quindi operando su questa projezione un'ordinaria trasformazione di 2.° grado. Nella rappresentazione così ottenuta, si hanno cinque punti fondamentali, 1, 2, 3, 4, 5, de' quali gli ultimi tre in linea retta: le rette a sono rappresentate dalla retta 12 e dai punti 3, 4, 5; le rette b, c dai punti 1, 2 e dalle rette che li uniscono agli altri tre. La retta 345 è l'imagine del punto singolare $y_1 = y_2 = y_3 = 0$; mentre la conica doppia è rappresentata da

*) Detti v_1, v_2, v_3, v_4 i vertici dei quattro coni, i tre gruppi di punti $v_1v_2v_3v_4$, $b_1b_2b_3b_4$, $c_1c_2c_3c_4$, formano un sistema identico a quello dei dodici punti di contatto delle tangenti di una cubica, uscenti da tre punti di essa allineati in una retta (vedasi la mia *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, n.° 149) [Queste Opere, n. **29** (t. 1.°)].

una conica S passante per i punti 1, 2: ad ogni punto della conica doppia corrispondono due punti di S, che diremo *conjugati*, allineati con un punto fisso O, posto nella retta 345; così che le intersezioni di S colla retta polare di O sono le imagini dei due punti cuspidali. Le sezioni fatte in F dai piani passanti pel punto singolare $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ sono rappresentate dalle coniche di una rete della quale fanno parte anche S e il sistema (12, 345). Invece alle altre sezioni piane di F corrispondono le cubiche passanti pei cinque punti fondamentali e seganti S in due paja di punti conjugati. Le coniche passanti per 1, 2 e per le imagini de' due punti cuspidali rappresentano le curve di contatto di F colle superficie di 2.° grado della serie (3); le quali curve hanno tutte un punto doppio in $y_1 = y_2 = y_3 = 0$. Fra esse vi è anche la conica doppia; ed altre due si risolvono, ciascuna, in due coniche passanti pel punto suddetto.

Le due serie di coniche relative al 1.° cono circoscritto sono rappresentate dalle rette passanti pel punto 3 e dalle coniche del fascio (1 2 4 5); così le rette (4) e le coniche (1 2 5 3) rappresentano le coniche delle due serie conjugate relative al 2.° cono; e le rette (5) e le coniche (1 2 3 4) sono le imagini delle coniche delle serie relative al 3.° cono. Finalmente, i fasci di rette uscenti dai punti 1, 2 rappresentano le coniche poste nei piani tangenti al 4.° cono, cioè a quello il cui vertice è il punto $y_1 = y_2 = y_3 = 0$.