84.

SULLE VENTISETTE RETTE DI UNA SUPERFICIE DEL TERZO ORDINE. *)

Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, volume III (1870), pp. 209-219.

Per la notazione delle 27 rette di una superficie del terz'ordine impiegherò gli stessi simboli de' quali mi sono servito nella mia Memoria inserita nel giornale matematico di CRELLE-BORCHARDT (tom. 68, pag. 75 e seg.) [Questo tomo, pag. 66 e seg.], e seguendo l'esempio del signor JORDAN chiamerò *enneaedro* il sistema di nove piani, i quali contengano insieme tutte le 27 rette. Per indicare i 45 piani tritangenti, adoprerò i numeri 1, 2, 3, ..., 44, 45, appunto come fa il signor JORDAN **); e per accordare questa notazione con quella (dovuta al signor SCHLÄFLI) delle 27 rette, porrò le seguenti equazioni:

$$
\begin{array}{r|r|r}
1 = a_1\, b_4\, c_{14} & 16 = a_5\, b_2\, c_{25} & 31 = a_5\, b_3\, c_{35} \\
2 = c_{16}\, c_{23}\, c_{45} & 17 = c_{13}\, c_{24}\, c_{56} & 32 = a_6\, b_5\, c_{56} \\
3 = a_5\, b_6\, c_{56} & 18 = c_{13}\, c_{25}\, c_{46} & 33 = a_3\, b_6\, c_{36} \\
4 = c_{15}\, c_{24}\, c_{36} & 19 = a_6\, b_3\, c_{36} & 34 = a_1\, b_6\, c_{16} \\
5 = a_6\, b_2\, c_{26} & 20 = a_3\, b_2\, c_{23} & 35 = a_5\, b_4\, c_{45} \\
6 = a_4\, b_3\, c_{34} & 21 = a_4\, b_5\, c_{45} & 36 = c_{14}\, c_{23}\, c_{56} \\
7 = a_2\, b_5\, c_{25} & 22 = c_{16}\, c_{24}\, c_{35} & 37 = a_1\, b_5\, c_{15} \\
8 = a_3\, b_1\, c_{13} & 23 = c_{12}\, c_{34}\, c_{56} & 38 = a_3\, b_4\, c_{34} \\
9 = c_{12}\, c_{35}\, c_{46} & 24 = a_2\, b_6\, c_{26} & 39 = c_{14}\, c_{26}\, c_{35} \\
10 = a_3\, b_5\, c_{35} & 25 = a_5\, b_1\, c_{15} & 40 = c_{14}\, c_{25}\, c_{36} \\
11 = c_{15}\, c_{26}\, c_{34} & 26 = a_2\, b_1\, c_{12} & 41 = a_1\, b_3\, c_{13} \\
12 = a_6\, b_1\, c_{16} & 27 = a_4\, b_2\, c_{24} & 42 = a_6\, b_4\, c_{46} \\
13 = a_2\, b_3\, c_{23} & 28 = c_{13}\, c_{26}\, c_{45} & 43 = a_2\, b_4\, c_{24} \\
14 = c_{12}\, c_{36}\, c_{45} & 29 = c_{16}\, c_{25}\, c_{34} & 44 = a_4\, b_1\, c_{14} \\
15 = a_4\, b_6\, c_{46} & 30 = c_{15}\, c_{23}\, c_{46} & 45 = a_1\, b_2\, c_{12}
\end{array}
\tag{1}
$$

*) I risultati che si espongono qui sono quelli, da me comunicati al signor JORDAN con lettera privata, ai quali egli fa allusione nella sua Nota inserita nel *Compte rendu de l'Acad. des Sciences,* 14 febbraio 1870.

**) *Compte rendu de l'Acad. des Sciences*, 12 aprile 1869. — *Traité des subs titutions et des équations algébriques*, p. 368.

e scriverò $p_1=0, p_2=0, \ldots, p_{45}=0$ come equazioni dei 45 piani tritangenti.

È noto che dalle 27 rette se ne possono scegliere 9 (in 120 maniere diverse) che siano le intersezioni di una terna di piani tritangenti con un'altra terna di piani tritangenti. Queste due terne di piani tritangenti diconsi *triedri coniugati.* Due piani tritangenti la cui intersezione non sia una delle 27 rette della superficie individuano una coppia di triedri conjugati; ed ogni coppia di triedri conjugati individua altre due coppie analoghe, in modo che i diciotto piani di questa terna di coppie di triedri conjugati contengano (due volte) tutte le 27 rette.

La distribuzione delle 27 rette nei 18 piani di una terna di coppie di triedri conjugati si può rappresentare con tre determinanti o matrici *), come per esempio:

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & c_{35} & c_{34} \\ a_3 & c_{15} & c_{14} \\ c_{26} & b_4 & b_5 \end{vmatrix} \begin{matrix} c_{13} & a_5 & a_4 \\ b_2 & c_{64} & c_{65} \\ b_6 & c_{24} & c_{25} \end{matrix} \begin{vmatrix} b_3 & b_1 & c_{45} \\ c_{21} & c_{23} & a_6 \\ c_{61} & c_{63} & a_2 \end{vmatrix}.$$

Ciascuna matrice rappresenta le rette situate nei piani di una coppia; sviluppando la matrice, per esempio la 1.ª,

$$\begin{aligned} &+ a_1 b_5 c_{15} + a_3 b_4 c_{34} + c_{14} c_{26} c_{35} \\ &- a_1 b_4 c_{14} - a_3 b_5 c_{35} - c_{15} c_{26} c_{34}, \end{aligned}$$

i termini positivi danno i piani di un triedro, i termini negativi quelli del triedro conjugato. Questa coppia di triedri, in virtù delle (1), potrà anche indicarsi così:

$$\begin{array}{ccc} 37 & 38 & 39 \\ \hline 1 & 10 & 11 \end{array}$$

ossia, come preferirò di scrivere:

$$\begin{vmatrix} 37 & 1 \\ 38 & 10 \\ 39 & 11 \end{vmatrix}$$

ponendo in linea verticale i piani di ciascun triedro.

Sviluppando ora analogamente le altre due matrici, si ha l'equazione:

*) Gli elementi delle matrici sono disposti in modo che le rette di ogni

linea $\left\{\begin{matrix}\text{verticale}\\ \text{orizzontale}\\ \text{verticale}\end{matrix}\right\}$ della $\left\{\begin{matrix}1.^a\\ 2.^a\\ 3.^a\end{matrix}\right\}$ matrice segano le rette della corrispondente

linea $\left\{\begin{matrix}\text{verticale}\\ \text{orizzontale}\\ \text{orizzontale}\end{matrix}\right\}$ della $\left\{\begin{matrix}2.^a\\ 3.^a\\ 1.^a\end{matrix}\right\}$ matrice. [49]

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{35} & c_{34} & c_{13} & a_5 & a_4 & b_3 & b_1 & c_{45} \\ a_3 & c_{15} & c_{14} & b_2 & c_{64} & c_{65} & c_{21} & c_{23} & a_6 \\ c_{26} & b_4 & b_5 & b_6 & c_{24} & c_{25} & c_{61} & c_{63} & a_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 37 & 1 & 18 & 17 & 13 & 19 \\ 38 & 10 & 27 & 16 & 14 & 26 \\ 39 & 11 & 3 & 15 & 12 & 2 \end{array}\right| .$$

Lo specchio che segue presenta le equazioni analoghe, corrispondenti alle 40 terne di coppie di triedri coniugati:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & b_1 & c_{23} & b_4 & a_4 & c_{56} & c_{14} & c_{24} & c_{34} \\ a_2 & b_2 & c_{31} & b_5 & a_5 & c_{64} & c_{15} & c_{25} & c_{35} \\ a_3 & b_3 & c_{12} & b_6 & a_6 & c_{45} & c_{16} & c_{26} & c_{36} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 45 & 41 & 35 & 42 & 40 & 39 \\ 13 & 26 & 32 & 21 & 11 & 4 \\ 8 & 20 & 15 & 3 & 22 & 29 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & b_1 & c_{24} & b_3 & a_3 & c_{56} & c_{13} & c_{23} & c_{43} \\ a_2 & b_2 & c_{41} & b_5 & a_5 & c_{63} & c_{15} & c_{25} & c_{45} \\ a_4 & b_4 & c_{12} & b_6 & a_6 & c_{35} & c_{16} & c_{26} & c_{46} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 45 & 1 & 31 & 19 & 18 & 28 \\ 43 & 26 & 32 & 10 & 11 & 30 \\ 44 & 27 & 33 & 3 & 2 & 29 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & b_1 & c_{25} & b_4 & a_4 & c_{36} & c_{14} & c_{24} & c_{54} \\ a_2 & b_2 & c_{15} & b_3 & a_3 & c_{64} & c_{13} & c_{23} & c_{53} \\ a_5 & b_5 & c_{12} & b_6 & a_6 & c_{34} & c_{16} & c_{26} & c_{56} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 45 & 37 & 38 & 42 & 36 & 39 \\ 7 & 26 & 19 & 6 & 28 & 17 \\ 25 & 16 & 15 & 33 & 22 & 2 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & b_1 & c_{26} & b_4 & a_4 & c_{35} & c_{14} & c_{24} & c_{64} \\ a_2 & b_2 & c_{16} & b_5 & a_5 & c_{34} & c_{15} & c_{25} & c_{65} \\ a_6 & b_6 & c_{12} & b_3 & a_3 & c_{45} & c_{13} & c_{23} & c_{63} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 45 & 34 & 35 & 38 & 40 & 36 \\ 24 & 26 & 10 & 21 & 30 & 4 \\ 12 & 5 & 6 & 31 & 17 & 18 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & b_1 & c_{34} & b_2 & a_2 & c_{56} & c_{12} & c_{32} & c_{42} \\ a_3 & b_3 & c_{14} & b_5 & a_5 & c_{26} & c_{15} & c_{35} & c_{45} \\ a_4 & b_4 & c_{13} & b_6 & a_6 & c_{25} & c_{16} & c_{36} & c_{46} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 41 & 1 & 16 & 5 & 9 & 14 \\ 38 & 8 & 32 & 7 & 4 & 30 \\ 44 & 6 & 24 & 3 & 2 & 22 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & b_1 & c_{35} & b_2 & a_2 & c_{46} & c_{12} & c_{32} & c_{52} \\ a_3 & b_3 & c_{15} & b_4 & a_4 & c_{26} & c_{14} & c_{34} & c_{54} \\ a_5 & b_5 & c_{13} & b_6 & a_6 & c_{24} & c_{16} & c_{36} & c_{56} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 41 & 37 & 27 & 5 & 23 & 14 \\ 10 & 8 & 42 & 43 & 40 & 36 \\ 25 & 31 & 24 & 15 & 2 & 29 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & b_1 & c_{36} & b_2 & a_2 & c_{45} & c_{12} & c_{32} & c_{62} \\ a_3 & b_3 & c_{16} & b_4 & a_4 & c_{25} & c_{14} & c_{34} & c_{64} \\ a_6 & b_6 & c_{13} & b_5 & a_5 & c_{24} & c_{15} & c_{35} & c_{65} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 41 & 34 & 27 & 16 & 23 & 9 \\ 33 & 8 & 35 & 43 & 39 & 36 \\ 12 & 19 & 7 & 21 & 30 & 11 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & b_1 & c_{45} & b_2 & a_2 & c_{36} & c_{12} & c_{42} & c_{52} \\ a_4 & b_4 & c_{15} & b_3 & a_3 & c_{26} & c_{13} & c_{43} & c_{53} \\ a_5 & b_5 & c_{14} & b_6 & a_6 & c_{23} & c_{16} & c_{46} & c_{56} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 37 & 20 & 5 & 23 & 9 \\ 21 & 44 & 19 & 13 & 18 & 17 \\ 25 & 35 & 24 & 33 & 22 & 29 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & b_1 & c_{46} & b_2 & a_2 & c_{35} & c_{12} & c_{42} & c_{62} \\ a_4 & b_4 & c_{16} & b_3 & a_3 & c_{25} & c_{13} & c_{43} & c_{63} \\ a_6 & b_6 & c_{14} & b_5 & a_5 & c_{23} & c_{15} & c_{45} & c_{65} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 34 & 20 & 16 & 23 & 14 \\ 15 & 44 & 31 & 13 & 28 & 17 \\ 12 & 42 & 7 & 10 & 4 & 11 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & b_1 & c_{56} & b_2 & a_2 & c_{34} & c_{12} & c_{52} & c_{62} \\ a_5 & b_5 & c_{16} & b_3 & a_3 & c_{24} & c_{13} & c_{53} & c_{63} \\ a_6 & b_6 & c_{15} & b_4 & a_4 & c_{23} & c_{14} & c_{54} & c_{64} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 37 & 34 & 20 & 27 & 9 & 18 \\ 3 & 25 & 6 & 13 & 28 & 14 \\ 12 & 32 & 43 & 38 & 40 & 39 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{24} & c_{23} & c_{12} & a_4 & a_3 & b_2 & b_1 & c_{34} \\ a_2 & c_{14} & c_{13} & b_5 & c_{36} & c_{46} & c_{15} & c_{25} & a_6 \\ c_{56} & b_3 & b_4 & b_6 & c_{35} & c_{45} & c_{16} & c_{26} & a_5 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 41 & 14 & 9 & 16 & 5 \\ 13 & 43 & 10 & 21 & 11 & 25 \\ 17 & 36 & 15 & 33 & 12 & 29 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{25} & c_{23} & c_{12} & a_5 & a_3 & b_2 & b_1 & c_{35} \\ a_2 & c_{15} & c_{13} & b_4 & c_{36} & c_{56} & c_{14} & c_{24} & a_6 \\ c_{46} & b_3 & b_5 & b_6 & c_{34} & c_{45} & c_{16} & c_{26} & a_4 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 37 & 41 & 14 & 23 & 27 & 5 \\ 13 & 7 & 38 & 35 & 39 & 44 \\ 18 & 30 & 3 & 33 & 12 & 22 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{26} & c_{23} & c_{12} & a_6 & a_3 & b_2 & b_1 & c_{36} \\ a_2 & c_{16} & c_{13} & b_5 & c_{34} & c_{46} & c_{15} & c_{25} & a_4 \\ c_{45} & b_3 & b_6 & b_4 & c_{35} & c_{56} & c_{14} & c_{24} & a_5 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 34 & 41 & 23 & 9 & 16 & 27 \\ 13 & 24 & 10 & 32 & 4 & 25 \\ 28 & 2 & 42 & 38 & 44 & 40 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{25} & c_{24} & c_{12} & a_5 & a_4 & b_2 & b_1 & c_{45} \\ a_2 & c_{15} & c_{14} & b_3 & c_{46} & c_{56} & c_{13} & c_{23} & a_6 \\ c_{36} & b_4 & b_5 & b_6 & c_{43} & c_{53} & c_{16} & c_{26} & a_3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 37 & 1 & 9 & 23 & 20 & 5 \\ 43 & 7 & 6 & 31 & 28 & 8 \\ 40 & 4 & 3 & 15 & 12 & 2 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{26} & c_{24} & c_{12} & a_6 & a_4 & b_2 & b_1 & c_{46} \\ a_2 & c_{16} & c_{14} & b_3 & c_{45} & c_{56} & c_{13} & c_{23} & a_5 \\ c_{35} & b_4 & b_6 & b_5 & c_{43} & c_{36} & c_{15} & c_{25} & a_3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 34 & 1 & 14 & 23 & 20 & 16 \\ 43 & 24 & 6 & 19 & 18 & 8 \\ 39 & 22 & 32 & 21 & 25 & 30 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{26} & c_{25} & c_{12} & a_6 & a_5 & b_2 & b_1 & c_{56} \\ a_2 & c_{16} & c_{15} & b_3 & c_{45} & c_{46} & c_{13} & c_{23} & a_4 \\ c_{34} & b_5 & b_6 & b_4 & c_{35} & c_{36} & c_{14} & c_{24} & a_3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 34 & 37 & 14 & 9 & 20 & 27 \\ 7 & 24 & 31 & 19 & 17 & 8 \\ 11 & 29 & 42 & 35 & 44 & 36 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{34} & c_{23} & c_{13} & a_4 & a_2 & b_3 & b_1 & c_{24} \\ a_3 & c_{14} & c_{12} & b_5 & c_{26} & c_{46} & c_{15} & c_{35} & a_6 \\ c_{56} & b_2 & b_4 & b_6 & c_{25} & c_{45} & c_{16} & c_{36} & a_5 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 45 & 28 & 18 & 31 & 19 \\ 20 & 38 & 7 & 21 & 4 & 25 \\ 23 & 36 & 15 & 24 & 12 & 22 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{35} & c_{23} & c_{13} & a_5 & a_2 & b_3 & b_1 & c_{25} \\ a_3 & c_{15} & c_{12} & b_4 & c_{26} & c_{56} & c_{14} & c_{34} & a_6 \\ c_{46} & b_2 & b_5 & b_6 & c_{24} & c_{45} & c_{16} & c_{36} & a_4 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 37 & 45 & 28 & 17 & 6 & 19 \\ 20 & 10 & 43 & 35 & 40 & 44 \\ 9 & 30 & 3 & 24 & 12 & 29 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{36} & c_{23} & c_{13} & a_6 & a_2 & b_3 & b_1 & c_{26} \\ a_3 & c_{16} & c_{12} & b_4 & c_{25} & c_{56} & c_{14} & c_{34} & a_5 \\ c_{45} & b_2 & b_6 & b_5 & c_{24} & c_{46} & c_{15} & c_{35} & a_4 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 34 & 45 & 18 & 17 & 6 & 31 \\ 20 & 33 & 43 & 42 & 39 & 44 \\ 14 & 2 & 32 & 7 & 25 & 11 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{35} & c_{34} & c_{13} & a_5 & a_4 & b_3 & b_1 & c_{45} \\ a_3 & c_{15} & c_{14} & b_2 & c_{46} & c_{56} & c_{12} & c_{23} & a_6 \\ c_{26} & b_4 & b_5 & b_6 & c_{24} & c_{25} & c_{16} & c_{36} & a_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 37 & 1 & 18 & 17 & 13 & 19 \\ 38 & 10 & 27 & 16 & 14 & 26 \\ 39 & 11 & 3 & 15 & 12 & 2 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{36} & c_{34} & c_{13} & a_6 & a_4 & b_3 & b_1 & c_{46} \\ a_3 & c_{16} & c_{14} & b_2 & c_{45} & c_{65} & c_{12} & c_{23} & a_5 \\ c_{25} & b_4 & b_6 & b_5 & c_{42} & c_{62} & c_{15} & c_{53} & a_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 34 & 1 & 28 & 17 & 13 & 31 \\ 38 & 33 & 27 & 5 & 9 & 26 \\ 40 & 29 & 32 & 21 & 25 & 30 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{36} & c_{35} & c_{13} & a_6 & a_5 & b_3 & b_1 & c_{56} \\ a_3 & c_{16} & c_{15} & b_2 & c_{54} & c_{46} & c_{12} & c_{23} & a_4 \\ c_{24} & b_5 & b_6 & b_4 & c_{52} & c_{62} & c_{14} & c_{34} & a_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 34 & 37 & 28 & 18 & 13 & 6 \\ 10 & 33 & 16 & 5 & 23 & 26 \\ 4 & 22 & 42 & 35 & 44 & 36 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{43} & c_{42} & c_{14} & a_3 & a_2 & b_4 & b_1 & c_{23} \\ a_4 & c_{13} & c_{12} & b_5 & c_{26} & c_{36} & c_{15} & c_{45} & a_6 \\ c_{56} & b_2 & b_3 & b_6 & c_{25} & c_{35} & c_{16} & c_{46} & a_5 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 41 & 45 & 39 & 40 & 35 & 42 \\ 27 & 6 & 7 & 10 & 30 & 25 \\ 23 & 17 & 33 & 24 & 12 & 2 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{45} & c_{24} & c_{14} & a_5 & a_2 & b_4 & b_1 & c_{25} \\ a_4 & c_{15} & c_{12} & b_3 & c_{26} & c_{56} & c_{13} & c_{43} & a_6 \\ c_{36} & b_2 & b_5 & b_6 & c_{23} & c_{53} & c_{16} & c_{46} & a_3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 37 & 45 & 39 & 36 & 38 & 42 \\ 27 & 21 & 13 & 31 & 18 & 8 \\ 14 & 4 & 3 & 24 & 12 & 29 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{46} & c_{24} & c_{14} & a_6 & a_2 & b_4 & b_1 & c_{26} \\ a_4 & c_{16} & c_{12} & b_3 & c_{52} & c_{56} & c_{13} & c_{34} & a_5 \\ c_{35} & b_2 & b_6 & b_5 & c_{32} & c_{36} & c_{15} & c_{45} & a_3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 34 & 45 & 40 & 36 & 38 & 35 \\ 27 & 15 & 13 & 19 & 28 & 8 \\ 9 & 22 & 32 & 7 & 25 & 11 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{45} & c_{34} & c_{14} & a_5 & a_3 & b_4 & b_1 & c_{35} \\ a_4 & c_{15} & c_{31} & b_2 & c_{36} & c_{56} & c_{12} & c_{42} & a_6 \\ c_{26} & b_3 & b_5 & b_6 & c_{23} & c_{25} & c_{16} & c_{46} & a_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 37 & 41 & 40 & 36 & 43 & 42 \\ 6 & 21 & 20 & 16 & 9 & 26 \\ 28 & 11 & 3 & 33 & 12 & 22 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{46} & c_{34} & c_{14} & a_6 & a_3 & b_4 & b_1 & c_{36} \\ a_4 & c_{16} & c_{31} & b_2 & c_{53} & c_{65} & c_{12} & c_{42} & a_5 \\ c_{25} & b_3 & b_6 & b_5 & c_{23} & c_{26} & c_{15} & c_{45} & a_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 34 & 41 & 39 & 36 & 43 & 35 \\ 6 & 15 & 20 & 5 & 14 & 26 \\ 18 & 29 & 32 & 10 & 25 & 4 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{46} & c_{45} & c_{14} & a_6 & a_5 & b_4 & b_1 & c_{56} \\ a_4 & c_{16} & c_{15} & b_2 & c_{35} & c_{36} & c_{12} & c_{24} & a_3 \\ c_{23} & b_5 & b_6 & b_3 & c_{25} & c_{26} & c_{13} & c_{34} & a_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 34 & 37 & 39 & 40 & 43 & 38 \\ 21 & 15 & 16 & 5 & 23 & 26 \\ 30 & 2 & 19 & 31 & 8 & 17 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{35} & c_{25} & c_{15} & a_3 & a_2 & b_5 & b_1 & c_{23} \\ a_5 & c_{31} & c_{21} & b_4 & c_{26} & c_{36} & c_{14} & c_{54} & a_6 \\ c_{46} & b_2 & b_3 & b_6 & c_{24} & c_{34} & c_{16} & c_{56} & a_4 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 41 & 45 & 11 & 4 & 21 & 32 \\ 16 & 31 & 43 & 38 & 36 & 44 \\ 9 & 18 & 33 & 24 & 12 & 2 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{45} & c_{25} & c_{15} & a_4 & a_2 & b_5 & b_1 & c_{24} \\ a_5 & c_{41} & c_{21} & b_3 & c_{26} & c_{46} & c_{13} & c_{35} & a_6 \\ c_{36} & b_2 & b_4 & b_6 & c_{32} & c_{43} & c_{16} & c_{65} & a_3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 45 & 11 & 30 & 10 & 32 \\ 16 & 35 & 13 & 6 & 17 & 8 \\ 14 & 40 & 15 & 24 & 12 & 22 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{56} & c_{25} & c_{15} & a_2 & a_6 & b_5 & b_1 & c_{26} \\ a_5 & c_{16} & c_{21} & b_3 & c_{46} & c_{24} & c_{13} & c_{35} & a_4 \\ c_{34} & b_2 & b_6 & b_4 & c_{36} & c_{23} & c_{14} & c_{45} & a_3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 34 & 45 & 30 & 4 & 10 & 21 \\ 16 & 3 & 19 & 13 & 28 & 8 \\ 23 & 29 & 43 & 42 & 44 & 39 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{54} & c_{53} & c_{15} & a_4 & a_3 & b_5 & b_1 & c_{34} \\ a_5 & c_{14} & c_{13} & b_2 & c_{36} & c_{46} & c_{12} & c_{52} & a_6 \\ c_{26} & b_3 & b_4 & b_6 & c_{32} & c_{42} & c_{16} & c_{56} & a_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 41 & 4 & 30 & 7 & 32 \\ 31 & 35 & 20 & 27 & 23 & 26 \\ 28 & 39 & 15 & 33 & 12 & 29 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{56} & c_{53} & c_{15} & a_6 & a_3 & b_5 & b_1 & c_{36} \\ a_5 & c_{16} & c_{13} & b_2 & c_{34} & c_{46} & c_{12} & c_{52} & a_4 \\ c_{24} & b_3 & b_6 & b_4 & c_{32} & c_{62} & c_{14} & c_{54} & a_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 34 & 41 & 11 & 30 & 7 & 21 \\ 31 & 3 & 20 & 5 & 14 & 26 \\ 17 & 22 & 42 & 38 & 44 & 40 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{56} & c_{54} & c_{15} & a_6 & a_4 & b_5 & b_1 & c_{46} \\ a_5 & c_{16} & c_{14} & b_3 & c_{24} & c_{26} & c_{13} & c_{53} & a_2 \\ c_{23} & b_4 & b_6 & b_2 & c_{34} & c_{36} & c_{12} & c_{52} & a_3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 34 & 1 & 4 & 11 & 10 & 7 \\ 35 & 3 & 6 & 19 & 18 & 8 \\ 36 & 2 & 5 & 27 & 26 & 9 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{36} & c_{26} & c_{16} & a_3 & a_2 & b_6 & b_1 & c_{23} \\ a_6 & c_{31} & c_{21} & b_4 & c_{25} & c_{35} & c_{14} & c_{64} & a_5 \\ c_{45} & b_2 & b_3 & b_5 & c_{24} & c_{34} & c_{15} & c_{65} & a_4 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 41 & 45 & 29 & 22 & 15 & 3 \\ 5 & 19 & 43 & 38 & 36 & 44 \\ 14 & 28 & 10 & 7 & 25 & 30 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{64} & c_{62} & c_{16} & a_4 & a_2 & b_6 & b_1 & c_{24} \\ a_6 & c_{14} & c_{12} & b_5 & c_{23} & c_{43} & c_{15} & c_{65} & a_3 \\ c_{35} & b_2 & b_4 & b_3 & c_{25} & c_{45} & c_{13} & c_{63} & a_5 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 45 & 2 & 29 & 3 & 33 \\ 5 & 42 & 7 & 21 & 4 & 25 \\ 9 & 39 & 6 & 13 & 8 & 17 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{65} & c_{62} & c_{16} & a_5 & a_2 & b_6 & b_1 & c_{25} \\ a_6 & c_{15} & c_{12} & b_4 & c_{23} & c_{53} & c_{14} & c_{64} & a_3 \\ c_{34} & b_2 & b_5 & b_3 & c_{24} & c_{54} & c_{13} & c_{63} & a_4 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 37 & 45 & 2 & 22 & 15 & 33 \\ 5 & 32 & 43 & 35 & 40 & 44 \\ 23 & 11 & 31 & 13 & 8 & 18 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{64} & c_{63} & c_{16} & a_4 & a_3 & b_6 & b_1 & c_{34} \\ a_6 & c_{14} & c_{13} & b_5 & c_{32} & c_{42} & c_{15} & c_{65} & a_2 \\ c_{25} & b_3 & b_4 & b_2 & c_{35} & c_{45} & c_{12} & c_{62} & a_5 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 41 & 2 & 22 & 3 & 24 \\ 19 & 42 & 10 & 21 & 11 & 25 \\ 18 & 40 & 27 & 20 & 26 & 23 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{56} & c_{36} & c_{16} & a_5 & a_3 & b_6 & b_1 & c_{35} \\ a_6 & c_{51} & c_{31} & b_4 & c_{32} & c_{52} & c_{14} & c_{64} & a_2 \\ c_{24} & b_3 & b_5 & b_2 & c_{34} & c_{54} & c_{12} & c_{62} & a_4 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 37 & 41 & 2 & 29 & 15 & 24 \\ 19 & 32 & 38 & 35 & 39 & 44 \\ 17 & 4 & 16 & 20 & 26 & 9 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{56} & c_{46} & c_{16} & a_5 & a_4 & b_6 & b_1 & c_{45} \\ a_6 & c_{51} & c_{41} & b_3 & c_{42} & c_{52} & c_{13} & c_{63} & a_2 \\ c_{23} & b_4 & b_5 & b_2 & c_{43} & c_{53} & c_{12} & c_{62} & a_3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 37 & 1 & 22 & 29 & 33 & 24 \\ 42 & 32 & 6 & 31 & 28 & 8 \\ 36 & 30 & 16 & 27 & 26 & 14 \end{array}\right|.$$

Se ora da ciascuna matrice di una terna, come per esempio:

$$\left|\begin{array}{cc|cc|cc} 37 & 1 & 18 & 17 & 13 & 19 \\ 38 & 10 & 27 & 16 & 14 & 26 \\ 39 & 11 & 3 & 15 & 12 & 2 \end{array}\right| ,$$

scegliamo una linea verticale, cioè un triedro, otteniamo un *enneaedro*, vale a dire un gruppo di 9 piani che insieme contengono tutte e 27 le rette della superficie. La terna precedente, addotta come esempio, dà gli 8 enneaedri seguenti:

$$(3)\qquad \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 37 & 18 & 13 \\ 38 & 27 & 14 \\ 39 & 3 & 12 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 37 & 17 & 19 \\ 38 & 16 & 26 \\ 39 & 15 & 2 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 1 & 18 & 19 \\ 10 & 27 & 26 \\ 11 & 3 & 2 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 1 & 17 & 13 \\ 10 & 16 & 14 \\ 11 & 15 & 12 \end{vmatrix} , \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 17 & 19 \\ 10 & 16 & 26 \\ 11 & 15 & 2 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 1 & 18 & 13 \\ 10 & 27 & 14 \\ 11 & 3 & 12 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 37 & 17 & 13 \\ 38 & 16 & 14 \\ 39 & 15 & 12 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 37 & 18 & 19 \\ 38 & 27 & 26 \\ 39 & 3 & 2 \end{vmatrix} , \end{array}$$

dei quali i 4 scritti sulla prima linea orizzontale risultano dal prendere, nello sviluppo delle matrici (2), i soli termini positivi di una matrice e i negativi delle altre due [50]. Per tal modo dalle 40 terne si otterranno $8.40=320$ enneaedri, cioè 160 analoghi ai (3) della prima linea orizzontale, che chiameremo *enneaedri della 1.ª serie*, e 160 analoghi ai (3) della 2.ª linea orizzontale, che diremo *enneaedri della 2.ª serie.*

Ora *gli enneaedri della 1.ª serie sono identici a quattro a quattro*, cioè ciascuno di essi scaturisce da quattro delle 40 terne di coppie di triedri conjugati. Per es. le 4 terne:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & b_1 & c_{56} & b_2 & a_2 & c_{34} & c_{12} & c_{52} & c_{62} \\ a_5 & b_5 & c_{61} & b_3 & a_3 & c_{42} & c_{13} & c_{53} & c_{63} \\ a_6 & b_6 & c_{15} & b_4 & a_4 & c_{23} & c_{14} & c_{54} & c_{64} \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{25} & c_{23} & c_{12} & a_5 & a_3 & b_2 & b_1 & c_{35} \\ a_2 & c_{15} & c_{13} & b_4 & c_{63} & c_{65} & c_{41} & c_{42} & a_6 \\ c_{46} & b_3 & b_5 & b_6 & c_{43} & c_{45} & c_{61} & c_{62} & a_4 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{35} & c_{34} & c_{13} & a_5 & a_4 & b_3 & b_1 & c_{45} \\ a_3 & c_{15} & c_{14} & b_2 & c_{64} & c_{65} & c_{21} & c_{23} & a_6 \\ c_{26} & b_4 & b_5 & b_6 & c_{24} & c_{25} & c_{61} & c_{63} & a_2 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & c_{45} & c_{42} & c_{14} & a_5 & a_2 & b_4 & b_1 & c_{25} \\ a_4 & c_{15} & c_{12} & b_3 & c_{62} & c_{65} & c_{31} & c_{34} & a_6 \\ c_{36} & b_2 & b_5 & b_6 & c_{32} & c_{35} & c_{61} & c_{64} & a_3 \end{array}\right|$$

dànno i 4 enneaedri:

$$\left|\begin{array}{rrr} 37 & 27 & 14 \\ 3 & 13 & 18 \\ 12 & 38 & 39 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rrr} 37 & 14 & 27 \\ 13 & 38 & 39 \\ 18 & 3 & 12 \end{array}\right|$$

(4)

$$\left|\begin{array}{rrr} 37 & 18 & 13 \\ 38 & 27 & 14 \\ 39 & 3 & 12 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rrr} 37 & 39 & 38 \\ 27 & 13 & 18 \\ 14 & 3 & 12 \end{array}\right|$$

che sono identici.

La 1.ª serie contiene adunque soltanto 40 enneaedri distinti. Ciascuno di questi enneaedri può, in 4 maniere diverse, essere diviso in 3 triedri; *cioè i 9 piani dell'enneaedro, presi* 3 *a* 3, *formano* 12 *triedri, ciascun piano appartenendo a* 4 *triedri.* Ossia: se si assumono ad arbitrio due dei 9 piani dell'enneaedro, il terzo piano che con quei due completa un triedro appartiene sempre all'enneaedro medesimo.

Invece nella 2.ª serie i 160 enneaedri sono tutti differenti: ciascuno di essi nasce da una sola delle 40 terne di matrici, cioè *può decomporsi in 3 triedri in una sola maniera.*

Assumendo un enneaedro decomposto in 3 triedri, i tre triedri conjugati a questi formano un altro enneaedro; e i due enneaedri appartengono sempre a serie diverse. Per tal modo, un enneaedro della 1.ª serie, secondo le 4 maniere di spezzarlo in 3 triedri, è conjugato a 4 differenti enneaedri della 2.ª serie. Un enneaedro della 1.ª serie e i 4 enneaedri conjugati della 2.ª serie comprendono tutti e 45 i piani tritangenti della superficie.

Essendo (37, 3, 12) (34, 25, 32) due triedri conjugati, l'equazione della superficie può scriversi così:

$$p_{37}\,p_3\,p_{12} = p_{34}\,p_{25}\,p_{32}$$

ed analogamente, considerando tutti gli altri triedri contenuti nell'enneaedro (4), avremo:

$$\begin{aligned}
p_{27}\,p_{13}\,p_{38} &= p_{20}\,p_6\,p_{43}\\
p_{14}\,p_{18}\,p_{39} &= p_9\,p_{23}\,p_{40}\\
p_{37}\,p_{13}\,p_{18} &= p_{41}\,p_7\,p_{30}\\
p_{14}\,p_{38}\,p_3 &= p_{23}\,p_{35}\,p_{33}\\
p_{27}\,p_{39}\,p_{12} &= p_5\,p_{44}\,p_{22}\\
p_{37}\,p_{38}\,p_{39} &= p_1\,p_{10}\,p_{11}\\
p_{18}\,p_{27}\,p_3 &= p_{17}\,p_{16}\,p_{15}\\
p_{13}\,p_{14}\,p_{12} &= p_{19}\,p_{26}\,p_2\\
p_{37}\,p_{27}\,p_{14} &= p_{45}\,p_{21}\,p_4\\
p_{39}\,p_{13}\,p_3 &= p_{36}\,p_{31}\,p_{24}\\
p_{38}\,p_{18}\,p_{12} &= p_{42}\,p_8\,p_{29},
\end{aligned}$$

dalle quali uguaglianze si ha subito:

$$(p_3\,p_{12}\,p_{13}\,p_{14}\,p_{18}\,p_{27}\,p_{37}\,p_{38}\,p_{39})^5 = \Pi,$$

indicando con Π il prodotto delle 45 espressioni lineari p. *La ricerca dei 40 enneaedri della 1.ª serie può adunque ridursi al problema di trasformare, mediante l'equazione della superficie, il covariante* Π *nella quinta potenza di un'espressione del 9.° grado.* Quando si riuscisse a intavolare questo problema, si dovrebbe giungere a riconoscere l'identità algebrica del medesimo con quello della trisezione delle funzioni iperellittiche a quattro periodi *).

Adottando pei 40 enneaedri della 1ª serie la notazione usata dal sig. JORDAN per rappresentare le soluzioni dell'equazione di 40.° grado a cui conduce il predetto problema di trisezione, avremo i 40 enneaedri indicati come segue:

---

*) Cfr. JORDAN nei luoghi citati.

$$A = [1,\ 2,\ 3,\ 10,\ 11,\ 18,\ 19,\ 26,\ 27]$$
$$B = [1,\ 4,\ 7,\ 12,\ 15,\ 20,\ 23,\ 28,\ 31]$$
$$C = [1,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17]$$
$$D = [1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9]$$
$$AB = [1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21,\ 25,\ 29,\ 33]$$
$$AC = [2,\ 15,\ 16,\ 17,\ 19,\ 26,\ 37,\ 38,\ 39]$$
$$AD = [4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 18,\ 26,\ 34,\ 35,\ 36]$$
$$BC = [4,\ 10,\ 13,\ 16,\ 23,\ 28,\ 34,\ 42,\ 44]$$
$$BD = [3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 20,\ 28,\ 37,\ 40,\ 43]$$
$$CD = [1,\ 18,\ 19,\ 20,\ 21,\ 22,\ 23,\ 24,\ 25]$$
$$ABC = [5,\ 10,\ 14,\ 15,\ 25,\ 29,\ 36,\ 41,\ 43]$$
$$ABD = [3;\ 4,\ 8,\ 13,\ 21,\ 29,\ 39,\ 42,\ 45]$$
$$ACD = [2,\ 10,\ 23,\ 24,\ 25,\ 27,\ 40,\ 41,\ 42]$$
$$BCD = [4,\ 12,\ 18,\ 21,\ 24,\ 31,\ 36,\ 38,\ 45]$$
$$A^2B = [1,\ 6,\ 8,\ 14,\ 16,\ 22,\ 24,\ 30,\ 32]$$
$$A^2C = [3,\ 12,\ 13,\ 14,\ 18,\ 27,\ 37,\ 38,\ 39]$$
$$A^2D = [7,\ 8,\ 9,\ 11,\ 19,\ 27,\ 34,\ 35,\ 36]$$
$$B^2C = [7,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20,\ 31,\ 34,\ 42,\ 44]$$
$$B^2D = [2,\ 5,\ 8,\ 15,\ 23,\ 31,\ 37,\ 40,\ 43]$$
$$C^2D = [1,\ 26,\ 27,\ 28,\ 29,\ 30,\ 31,\ 32,\ 33]$$
$$A^2BC = [6,\ 10,\ 12,\ 17,\ 24,\ 30,\ 35,\ 40,\ 45]$$
$$AB^2C = [8,\ 11,\ 13,\ 15,\ 22,\ 32,\ 35,\ 40,\ 45]$$
$$ABC^2 = [9,\ 11,\ 12,\ 16,\ 21,\ 33,\ 36,\ 41,\ 43]$$
$$A^2BD = [3,\ 5,\ 7,\ 14,\ 22,\ 30,\ 38,\ 41,\ 44]$$
$$AB^2D = [2,\ 4,\ 9,\ 16,\ 24,\ 32,\ 38,\ 41,\ 44]$$
$$ABD^2 = [2,\ 6,\ 7,\ 17,\ 25,\ 33,\ 39,\ 42,\ 45]$$
$$A^2CD = [3,\ 11,\ 20,\ 21,\ 22,\ 26,\ 40,\ 41,\ 42]$$
$$AC^2D = [3,\ 10,\ 19,\ 28,\ 29,\ 30,\ 43,\ 44,\ 45]$$
$$ACD^2 = [2,\ 11,\ 18,\ 31,\ 32,\ 33,\ 43,\ 44,\ 45]$$
$$B^2CD = [7,\ 15,\ 19,\ 22,\ 25,\ 28,\ 36,\ 38,\ 45]$$
$$BC^2D = [7,\ 12,\ 23,\ 27,\ 30,\ 33,\ 35,\ 39,\ 41]$$
$$BCD^2 = [4,\ 15,\ 20,\ 26,\ 29,\ 32,\ 35,\ 39,\ 41]$$
$$ABCD = [5,\ 13,\ 18,\ 22,\ 23,\ 33,\ 35,\ 37,\ 44]$$
$$A^2BCD = [6,\ 14,\ 18,\ 20,\ 25,\ 32,\ 34,\ 39,\ 43]$$
$$AB^2CD = [8,\ 16,\ 19,\ 21,\ 23,\ 30,\ 34,\ 39,\ 43]$$
$$ABC^2D = [9,\ 13,\ 25,\ 27,\ 28,\ 32,\ 34,\ 38,\ 40]$$
$$ABCD^2 = [5,\ 17.\ 21,\ 26,\ 30,\ 31,\ 34,\ 38,\ 40]$$
$$A^2B^2CD = [9,\ 17,\ 19,\ 20,\ 24,\ 29,\ 35,\ 37,\ 44]$$
$$A^2BC^2D = [8,\ 14,\ 24,\ 27,\ 29,\ 31,\ 36,\ 37,\ 42]$$
$$A^2BCD^2 = [6,\ 16,\ 22,\ 26,\ 28,\ 33,\ 36,\ 37,\ 42].$$

Limitiamoci a considerare questi 40 enneaedri della 1.ª serie. Rispetto ad uno qualunque di essi, p. e. l'enneaedro (4) il cui simbolo è $A^2 C$, gli altri 39 si dividono in due classi; l'una di 27, l'altra di 12 enneaedri: l'enneaedro ($A^2 C$) che si considera a parte ha un triedro comune con ciascun enneaedro della 2.ª classe, e invece ha un solo piano comune con ciascun enneaedro della classe 1.ª

I 12 enneaedri della 2.ª classe si spartiscono in 4 gruppi: ciascun gruppo, composto di 3 enneaedri, corrisponde ad una decomposizione del primo enneaedro ($A^2 C$) in tre triedri. Ecco la 2.ª classe, relativa ad $A^2 C$:

	(triedro comune con $A^2 C$)
$B D$	(37, 3, 12)
$A B C^2 D$	(27, 13, 38)
$A^2 B C D$	(14, 18, 39)
$A B C D$	(37, 13, 18)
$A^2 B D$	(14, 38, 3)
$B C^2 D$	(27, 39, 12)
$A C$	(37, 38, 39)
A	(18, 27, 3)
C	(13, 14, 12)
$A^2 B C^2 D$	(37, 27, 14)
$A B D$	(39, 13, 3)
$B C D$	(38, 18, 12).

Anche i 27 enneaedri della 1.ª classe si distribuiscono in 9 gruppi: ciascun gruppo essendo costituito da tre enneaedri aventi col primo ($A^2 C$) uno stesso piano comune. Questo piano è poi comune anche a 4 enneaedri della 1.ª classe, appartenenti a gruppi differenti. I 9 gruppi della 1.ª classe, corrispondendo ai 9 piani dell'enneaedro primitivo ($A^2 C$), si possono riunire a 3 a 3 in 12 terne, per modo che i 3 gruppi di una terna corrispondano ai 3 piani d'un triedro dell'enneaedro primitivo. Ecco i 9 gruppi di 1.ª classe relativi ad $A^2 C$:

			(piano comune con $A^2 C$)
D,	$A^2 C D$,	$A C^2 D$	3
B,	$A^2 B C$,	$A B C^2$	12
$A B$,	$B C$,	$A B^2 C$	13
$A B C$,	$A^2 B$,	$B^2 C$	14
$A D$,	$C D$,	$A C D^2$	18
$A C D$,	$A^2 D$,	$C^2 D$	27
$B^2 D$,	$A^2 B^2 C D$,	$A^2 B C D^2$	37
$A B^2 D$,	$B^2 C D$,	$A B C D^2$	38
$A B D^2$,	$B C D^2$,	$A B^2 C D$	39

Dunque *uno stesso piano* (come 3) *è comune ad 8 enneaedri, distribuiti in due quaderne* (BD, A^2BD, A, ABD; — A^2C, D, AC^2D, A^2CD); *due enneaedri di una stessa quaderna non hanno altro piano comune; ma un enneaedro della prima quaderna ed un enneaedro della seconda hanno in comune altri due piani che con quello formano un triedro. Il numero di queste coppie di quaderne conjugate è per conseguenza uguale al numero dei piani, cioè 45.*

Un triedro (come 12, 13, 14) *è comune a due enneaedri* (A^2C, C); *il triedro conjugato* (2, 19, 26) *è comune a due altri enneaedri* (A, AC); *di questi 4 enneaedri due qualunque hanno un triedro comune, il cui conjugato è comune agli altri due.* Ossia, i 4 enneaedri si possono decomporre ciascuno in 3 triedri per modo che i triedri dell'uno appartengano rispettivamente agli altri tre. Questi 4 enneaedri nascono da una stessa terna di matrici; così che *il numero di tali quaderne di enneaedri è il medesimo delle terne di coppie di triedri conjugati, cioè 40* *).

*) Queste proprietà coincidono con quelle che il prof. CLEBSCH ha dimostrato per le soluzioni del problema della trisezione delle funzioni iperellittiche, nella sua elegante Memoria *Zur Theorie der binären Formen sechster Ordnung und zur Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen* (Mem. della Società di Gottinga, 1869).