

UEBER DIE ABBILDUNG ALGEBRAISCHER FLÄCHEN.

VON L. CREMONA IN MAILAND *).

Mathematische Annalen, Band IV (1871), pp. 213-230.

Unter den verschiedenen Hilfsmitteln, deren man sich bedienen kann, um zur geometrischen Abbildung algebraischer Flächen auf einer Ebene zu gelangen (falls sie möglich ist), scheinen mir *die rationalen Transformationen des Raumes* eines der einfachsten und schnellsten. *Rationale Transformationen* nenne ich solche, welche einen (dreifach ausgedehnten) Raum auf einem anderen Raume eindeutig abbilden (gleichgültig ob man auch die zwei Räume als sich deckende fasst), so dass den Ebenen des ersten Raumes rationale Flächen n^{ter} Ordnung entsprechen, die ein lineares dreifach unendliches System bilden. Natürlich, um eine *eindeutige* Abbildung zu erreichen, müssen jene Flächen eine solche Zahl von gemeinschaftlichen Fundamentalpunkten und Curven haben, dass je drei von ihnen in einem einzigen veränderlichen Punkte sich schneiden; unter dieser Voraussetzung wird das System *homalödisch* genannt **). Einige solcher Transformationen sind sehr bekannt; namentlich der Fall $n=2$, wenn die Flächen 2^{ter} Ordnung des linearen Systems einen Fundamentalkegelschnitt und einen, nicht auf dem Kegelschnitte gelegenen, Fundamentalpunkt haben; und der Fall $n=3$, wenn eine Fundamentalraumcurve sechster Ordnung vorhanden ist. Der erste Fall stimmt mit der Methode der reciproken Radien überein; der zweite führt zur bekannten Abbildung einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung auf einer Ebene. Für diese letzte Transformation hat man nur vorausgesetzt, dass die Fundamentalcurve nicht in Theile, oder sofort in zwei zusammenfallende Raum-

*) Aus den Nachrichten der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, (1871, Nr. 5), mit Zusätzen des Verfassers. [??]

**) Dieselbe Benennung möge für Netze von ebenen *rationalen* Curven gelten. *Homalöid* möge eine Fläche heissen, wenn sie auf einer Ebene abbildbar ist.

curven dritter Ordnung oder in sechs Gerade zerfalle *). Fügen wir diesem noch hinzu, dass Herr CAYLEY **) eine besondere merkwürdige Transformation gefunden hat, wobei den Ebenen des ersten Raumes ein System von windschiefen cubischen Flächen entspricht, welche die doppelte Gerade und drei Erzeugende gemein haben, indem die den Ebenen des zweiten Raumes entsprechenden Flächen nur zweiter Ordnung sind und in einer Geraden und drei festen Punkten sich durchschneiden.

Schon die Transformation zweiten Grades bietet einen Fall dar, welcher, so weit mir bekannt, unbemerkt geblieben ist: nämlich den Fall, dass der Fundamentalpunkt auf dem Fundamentalkegelschnitte liegt. Dann entsprechen den Ebenen jedes Raumes Flächen zweiter Ordnung, welche durch einen festen Kegelschnitt gehen und in einem Punkte dieser Curve eine feste Ebene berühren. Wenn man diese Transformation auf eine allgemeine Fläche dritter Ordnung ***) anwendet, erhält man auf eine ungemein einfache Weise alle die Eigenschaften der *mit einem Doppelkegelschnitte behafteten Fläche vierter Ordnung*, deren Kenntniss man Herrn CLEBSCH verdankt †).

Setzt man aber im Falle $n=3$ voraus, dass die Fundamentalraumcurve sechster Ordnung in Theile zerfällt (was auf sehr viele verschiedene Weisen geschehen kann), so gelangt man zur Abbildung einer sehr ausgedehnten Reihe von algebraischen Flächen auf der Ebene. Ich erlaube mir, hier einige Beispiele mitzutheilen.

Sei K die Fundamentalcurve des ersten Raumes, sodass eine cubische Raumcurve, welche K in 8 Punkten begegnet, K zur vollen Durchschnittscurve zweier cubischen Flächen ergänzt; und sei K' die analoge Fundamentalcurve für den zweiten Raum. Dann entsprechen den Punkten von K die Geraden, welche K' dreimal schneiden, und deren Ort eine Fläche k' achter Ordnung ist, auf welcher K' eine dreifache Curve ist. Analogerweise entsprechen den Punkten von K' die Erzeugenden einer Fläche k achter Ordnung, auf welcher K eine dreifache Curve ist. Zerfällt K in Theile, so geschieht eine ähnliche Zerlegung für K' , k , k' .

Geht man nun von einer Fläche F aus, welche einen Theil von K einfach oder mehrfach enthält, so gelangt man zu einer auf F eindeutig abbildbaren Fläche F' , deren Ord-

*) GEISER, BORCHARDT's Journal Bd. 69., STURM, ebenda Bd. 70. Von einigen anderen Fällen der cubischen Transformation hat Herr NOETHER in seiner reichhaltigen Abhandlung (Math. Annalen, Bd. 3, pp. 199, 205) Anwendungen auf Abbildungsaufgaben gemacht.

**) *On the rational Transformation between two spaces* (Proceedings of the London Mathematical Society, v. III, 1870, p. 171).

***) Ich habe schon anderswo diese Anwendung ausgeführt (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 9 u. 23 marzo 1871) [Queste Opere, n. 88, 89]. Herr GEISER hatte bereits (BORCHARDT's Journal, Bd. 70) die eindeutige Beziehung zwischen denselben Flächen aus der *gewöhnlichen* Transformation zweiten Grades abgeleitet.

†) BORCHARDT's Journal, Bd. 69.

nung der Anzahl der Punkte gleich ist, in denen eine beliebige von K achtmal geschnittene cubische Raumcurve der Fläche F ausserhalb K noch begegnet. Eine Curve, welche ein Bestandtheil von K' ist, wird so oft von F' enthalten, als eine beliebige Erzeugende des entsprechenden Bestandtheils von k und die Fläche F nicht auf K gelegene Punkte gemein haben. Nach dieser Methode ergeben sich auch *Flächen mit Rückkehrcurven*; denn man braucht nur eine Fläche F anzunehmen, welche in einen Theil von k eingeschrieben ist.

Erstes Beispiel. — K besteht aus einer Geraden C_1 und einer Raumcurve C_5 fünfter Ordnung vom Geschlechte 1, welche C_1 in drei Punkten schneidet. Dann zerfällt K' in eine Curve C'_4 vierter Ordnung und erster Species, und in einen Kegelschnitt C'_2 , der sich auf C'_4 in drei Punkten stützt. Betrachtet man nun eine Fläche F_2 zweiter Ordnung, die durch C_1 geht, so wird ihr im andern Raume eine Fläche F'_5 fünfter Ordnung entsprechen, die C'_4 als Doppelcurve besitzt und C'_2 einfach enthält. Hieraus entspringt die ganze Theorie dieser letztern Fläche, welche Herr CLEBSCH zuerst dargelegt hat *). Die 7 Punkte a , in denen C_5 der Fläche F_2 ausserhalb C_1 noch begegnet, und die 7 Geraden von F_2 , welche von C_1 und C_5 geschnitten werden, bilden sich auf F'_5 als Gerade ab; und man hat somit die 7 Paare von Geraden dieser Fläche. Das System der Erzeugenden von F_2 , welche C_1 treffen, entspricht der Schaar von Kegelschnitten, die entstehen, wenn man F'_5 mit dem Büschel zweiter Ordnung schneidet, dessen Grundcurve C'_4 ist. Die 7 Punkte a werden von einem achten Punkte von F_2 zu einem Schnittpunktsysteme von drei Flächen zweiten Grades ergänzt; dieser achte Punkt entspricht der Spitze des Kegels zweiter Ordnung, welcher F'_5 umgeschrieben ist. Die einzige Raumcurve vierter Ordnung und zweiter Species welche durch die 7 Punkte a und dreimal durch C_1 gelegt werden kann; die 21 cubischen Raumcurven, welche durch fünf Punkte a und zweimal durch C_1 gehen; die 35 Kegelschnitte, welche auf F_2 liegen und durch je 3 Punkte a gehen; endlich die 7 Geraden von F_2 , die durch je einen Punkt a gehen, ohne C_1 zu schneiden, bilden sich auf F'_5 als die 64 Kegelschnitte ab, welche der oben angeführten Schaar nicht angehören. Analogerweise bestimmen auch die 7 Punkte a die 64 Schaaren von cubischen Raumcurven, welche auf F'_5 liegen. Jedem Punkte von C'_4 entsprechen die zwei Punkte gleichzeitig, in denen F_2 von einer sich auf C_5 dreimal stützenden Geraden geschnitten wird; die ganze Doppelcurve von F'_5 entspricht also einer Raumcurve neunter Ordnung, welche durch C_1 fünfmal und durch jeden Punkt a zweimal geht. — Projicirt man F_2 von einem auf ihr beliebig gewählten Punkte auf eine Ebene, und wendet man auf das so entstehende ebene Gebilde eine Transformation zweiten Grades an, so werden wir die niedrigste Abbildung der Fläche F'_5 erreichen, wobei die ebenen Schnitte durch Curven vierter Ordnung mit einem doppelten und sieben einfachen Fundamentalpunkten dargestellt werden.

*) Abhandlungen der Göttinger Societät, 1870, Bd. 15.

Durch die umgekehrte Transformation erhält man aus einer cubischen Fläche F'_3 , welche die Raumcurve C'_4 enthält, eine Fläche F_4 vierter Ordnung mit der Doppelgeraden C_1 . Die 3 Schnittpunkte a von F'_3 mit C'_2 (ausserhalb C'_4); die 10 Geraden b von F'_3 , welche C'_4 zweimal schneiden, und die 3 Kegelschnitte von F'_3 , welche durch je einen Punkt a gehen und mit C'_4 auf je einer Fläche zweiten Grades liegen, sind die Bilder der 16 Geraden von F_4 . Der Doppelgeraden entspricht die Durchschnittscurve von F'_3 mit der Ebene von C'_2 ; und den ebenen Schnitten von F_4 entsprechen Raumcurven fünfter Ordnung (vom Geschlechte 2), welche von den durch C'_4 und die Punkte a gehenden cubischen Flächen ausgeschnitten werden. Bildet man demnach F'_3 auf einer Ebene so ab, dass fünf Gerade b durch fünf Fundamentalpunkte 1, 2, 3, 4, 5 dargestellt werden, so wird sich sofort die niedrigste Abbildung von F_4 ergeben. — Ist, in der Darstellung von F'_3 , 0 der sechste Fundamentalpunkt, und 6, 7, 8 die Bilder der Punkte a , so werden die ebenen Schnitte von F_4 durch Curven vierter Ordnung, 0². 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8, abgebildet *).

Benutzt man dieselbe Transformation, um eine durch den Kegelschnitt C'_2 gehende cubische Fläche F'_3 umzugestalten, so wird sich eine Fläche F_6 sechster Ordnung ergeben, welche die Doppelcurve C_5 (vom Geschlechte 1) besitzt. Auf dieser Fläche liegen 10 Gerade, welche die Doppelcurve dreimal treffen; und 16 Kegelschnitte, welche sich auf C_5 in fünf Punkten stützen. Um zur niedrigsten ebenen Abbildung von F_6 zu gelangen, reicht es hin die Flächen F'_3 so abzubilden, dass ein Fundamentalpunkt der Geraden entspricht, die mit C'_2 zu einem ebenen Gesamtschnitte von F'_3 ergänzt: dann werden die ebenen Schnitte von F_6 durch Curven sechster Ordnung dargestellt, welche 5 zweifache und 10 einfache feste Punkte haben. Das Bild der Doppelcurve wird eine Curve fünfzehnter Ordnung mit 5 fünffachen und 10 dreifachen Punkten sein.

Geht man von einer Fläche F_3 dritter Ordnung aus, welche die Gerade C_1 enthält, so führt dieselbe Transformation zu einer Fläche achter Ordnung F'_8 mit der dreifachen Curve C'_4 und dem doppelten Kegelschnitte C'_2 . Die Flächen zweiten Grades, welche durch C'_4 gehen, schneiden noch aus F'_8 Curven vierter Ordnung und zweiter Species aus: unter diesen giebt es 5, die in zwei Kegelschnitte, und 12 andere, die in eine Gerade und eine cubische Raumcurve zerfallen. Jeder der 10 Kegelschnitte bildet, zusammen mit C'_4 und C'_2 , die Grundcurve eines Büschels von cubischen Flächen, welche ausserdem aus F'_8 rationale Raumcurven sechster Ordnung ausschneiden, von denen 4 aus zwei cubischen Raumcurven bestehen: somit hat man 16 Raumcurven dritter Ordnung, ausser den oben erwähnten 12. — In der niedrigsten ebenen Abbildung entsprechen den ebenen Schnitten von F'_8 Curven siebenter [⁷⁸] Ordnung, welche einen dreifachen (1), fünf zweifache

*) Mathematische Annalen, Bd. 1, S. 261.

(2, 3, 4, 5, 6) und zwölf einfache (7, 8, 9, ..., 18) feste Punkte besitzen. Die dreifache Curve bildet sich als eine Curve dreizehnter Ordnung $1^5 \cdot 2^4 \cdot 3^4 \dots 6^4 \cdot 7^2 \cdot 8^2 \dots 18^2$ ab, und der doppelte Kegelschnitt als eine Curve fünfter Ordnung $1^3 \cdot 2 \cdot 3 \dots 18$.

Zweites Beispiel. — Die Bestandtheile der Fundamentalcurve K seien eine Raumcurve C_5 fünfter Ordnung vom Geschlechte 2 und eine Gerade C_1 , die C_5 zweimal trifft; dann wird auch K' sich in zwei Linien C'_5, C'_1 derselben Art zerlegen. Wendet man diese Transformation auf eine Fläche F_2 zweiten Grades an, die durch C_1 geht, so wird eine Fläche F'_4 vierter Ordnung entstehen, welche die doppelte Gerade C'_1 besitzt. Die 8 Paare von Geraden, welche auf dieser Fläche vorhanden sind, entsprechen den 8 Punkten, in welchen C_5 der Fläche F_2 ausserhalb C_1 noch begegnet, und den 8 Geraden von F_2 , die durch diese Punkte und durch C_1 gehen.

Unterwirft man dieser Transformation eine cubische windschiefe Fläche F_3 , deren Doppelgerade C_1 sei, so werden wir eine Fläche F'_5 fünfter Ordnung mit der dreifachen Geraden C'_1 finden. Die 11 Punkte, in denen F_3 von C_5 ausserhalb C_1 noch getroffen wird, und die aus diesen Punkten ausgehenden Erzeugenden von F_3 liefern sofort die 11 Paare von Geraden, die auf F'_5 existiren. Der dreifachen Geraden C'_1 wird die Durchschnittscurve von F_3 mit der Fläche zweiten Grades entsprechen, welche der Ort der die Curve C'_5 dreimal schneidenden Geraden ist *).

Mittelst derselben Transformation führt eine allgemeine, durch C_1 gelegte, cubische Fläche F_3 zu einer Fläche F_7 siebenter Ordnung mit der dreifachen Geraden C'_1 und der Doppelcurve C'_5 . Diese Fläche enthält 13 Gerade, die von C'_1 geschnittene Sehnen von C'_5 sind. Richtet man die ebene Abbildung von F_3 so ein, dass die Gerade C_1 von einem Kegelschnitte dargestellt wird, so ergiebt sich die niedrigste Abbildung von F_7 , wobei den ebenen Schnitten dieser Fläche Curven siebenter Ordnung mit einem dreifachen (1), fünf zweifachen (2, 3, 4, 5, 6) und dreizehn einfachen (7, 8, ..., 19) festen Punkten entsprechen. Die dreifache Gerade wird durch eine Curve sechster Ordnung $1^2 \cdot 2^2 \dots 6^2 \cdot 7 \cdot 8 \dots 19$, und die Doppelcurve durch eine Curve zwölfter Ordnung $1^6 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \dots 6^3 \cdot 7^2 \cdot 8^2 \dots 19^2$ dargestellt.

Drittes Beispiel. — K besteht aus zwei cubischen Raumcurven C_3, K_3 , die vier gemeinsame Punkte haben: dann ist auch K' ein ähnliches System von zwei Raumcurven C'_3, K'_3 . Stellt man sich nun eine durch C_3 gehende allgemeine cubische Fläche F_3 vor, so wird das entsprechende Gebilde im zweiten Raume eine Fläche F'_5 fünfter Ordnung mit einer unebenen Doppelcurve C'_3 dritter Ordnung sein. Den 5 Punkten a , in welchen K_3 die Fläche F_3 ausserhalb C_3 noch trifft, und den 6 Geraden b von F_3 , welche die Curve C_3 zweimal schneiden, entsprechen die 11 Geraden von F'_5 ; und die Doppelcurve C'_3 entspricht einer

*) Math. Annalen, Bd. 3, S. 185.

Curve neunter Ordnung, welche der Ort der Begegnungspunkte von F_3 mit den Geraden ist, die K_3 zweimal und C_3 einmal treffen. Ordnet man die ebene Abbildung von F_3 so an, dass die Geraden b durch sechs Punkte 1, 2, ..., 6 dargestellt werden, und sind 7, 8, ..., 11 die Bilder der fünf Punkte a , so wird man ohne weiteres die niedrigste Abbildung von F'_5 erhalten, wobei die ebenen Schnitte sich als Curven vierter Ordnung 1. 2. 3 ... 11 abbilden, und die Doppelcurve durch eine hyperelliptische Curve siebenter Ordnung mit elf Doppelpunkten dargestellt wird *).

Viertes Beispiel. — K besteht aus einer Curve C_4 vierter Ordnung und erster Species, und aus zwei windschief liegenden Sehnen A , B derselben. Durchaus ähnlich wird dann die Zerlegung von K' sein. Wenn man durch A und B eine allgemeine cubische Fläche F_3 hindurchlegt, so wird ihr im andern Raume eine Fläche fünfter Ordnung, F'_5 , entsprechen, die zwei sich nicht schneidende Doppelgerade A' , B' besitzt. Diese Fläche enthält 13 Gerade: sie entstehen aus den 8 Punkten, in welchen C_4 die Fläche F_3 ausserhalb A und B noch trifft, und aus den 5 Geraden von F_3 , die A und B schneiden. Den zwei Doppelgeraden von F'_5 entsprechen zwei Raumcurven fünfter Ordnung (vom Geschlechte 2), die bezüglich mit A , B den Gesamtdurchschnitt von F_3 mit zwei durch C_4 gehenden Flächen zweiten Grades bilden. Nimmt man nun die Fundamentalpunkte 1, 2, ..., 6 der ebenen Abbildung von F_3 so an, dass den Geraden A , B die Kegelschnitte 1.3.4.5.6, 2.3.4.5.6 entsprechen, so wird sich auch die niedrigste Abbildung von F'_5 ergeben: die Bilder der ebenen Schnitte dieser Fläche werden Curven fünfter Ordnung sein, die zwei Doppelpunkte 1, 2 und zwölf einfache feste Punkte 3, 4, ..., 14 haben: wo die Punkte 7, 8, ..., 14 den Durchschnittspunkten von F_3 und C_4 entsprechen **).

Legt man F_3 nicht durch A und B , aber durch C_4 hindurch, so erhalten wir wieder eine Fläche F'_5 fünfter Ordnung, mit der Doppelcurve C'_4 (erster Species). Die 14 Geraden dieser Fläche entsprechen 1. den 2 Punkten a , in welchen A , B die F_3 ausserhalb C_4 noch treffen; 2. den 10 Geraden b von F_3 , welche Sehnen von C_4 sind; 3. den 2 Kegelschnitten, die durch einen Punkt a gehen und C_4 viermal begegnen. Um zur niedrigsten Abbildung von F'_5 zu gelangen, wird man fünf Fundamentalpunkte 1, 2, ..., 5 der Abbildung von F_3 so annehmen, dass sie fünf Geraden b darstellen. Ist 0 der sechste Fundamentalpunkt dieser letzten Abbildung, und sind 6, 7 die Bilder der zwei Punkte a , so werden die Curven vierter Ordnung 0².1.2.3... 7 den ebenen Schnitten von F'_5 entsprechen.

Dieselbe Transformation bietet eine unmittelbare und ungemein leichte Behandlung einer Aufgabe dar, die von Herrn CLEBSCH vorgelegt und von Herrn LÜROTH gelöst wurde ***). Die Aufgabe lautet: «Die Anzahl der Kegelschnitte zu bestimmen, welche

*) Math. Annalen, Bd. 1, S. 284.

**) Math. Annalen, Bd. 1, S. 306.

***) Math. Annalen, Bd. 3, S. 124.

eine Curve vierter Ordnung, erster Species, in drei und fünf ihrer Sehnen in je einem Punkte treffen». Sei C_4 die Raumcurve; A, B, C, D, E ihre gegebenen Sehnen. Ich nehme das System (C_4, A, B) als Fundamentalcurve eines durch eine cubische Transformation umzuformenden Raumes an; so wird der zweite Raum ein ähnliches Fundamentalsystem (C'_4, A', B') besitzen. Dann entsprechen den Sehnen C, D, E drei Gerade C', D', E' , welche ebenso Sehnen von C'_4 sind, und es entspricht irgend einem Kegelschnitte, welcher C_4 dreimal, A und B je einmal trifft, eine Gerade, welche C'_4 nur einmal begegnet. Die vorgelegte Aufgabe gestaltet sich also in die folgende um: «Die Anzahl der Geraden zu bestimmen, welche eine Curve C'_4 (vierter Ordnung und erster Species) und drei ihrer Sehnen C', D', E' in je einem Punkte treffen». Der Durchschnitt des Hyperboloïds $(C' D' E')$ mit der Curve C'_4 giebt dann ohne weiteres die zwei Lösungen der Frage.

Es versteht sich von selbst, dass man viele andere, die Kegelschnitte und die unebenen cubischen Curven im Raume betreffenden Aufgaben in ähnlicher Weise vereinfachen und auflösen kann.

Fünftes Beispiel. — Die Bestandtheile von K sind eine Curve vierter Ordnung und zweiter Species, C_4 , und ein Kegelschnitt C_2 , der sich auf C_4 in vier Punkten stützt; dann wird K' ein ähnliches System (C'_4, C'_2) sein.

Ist eine durch C_2 gehende cubische Fläche F_3 gegeben, so liefert die Transformation eine Fläche siebenter Ordnung F'_7 , mit dem dreifachen Kegelschnitte C'_2 und der Doppelcurve C'_4 . Diese Fläche enthält 9 Gerade und 16 (einfache) Kegelschnitte: eine Gerade ist eine Sehne von C'_2 ; die anderen 8 Geraden sind Sehnen von C'_4 , welche noch C'_2 treffen. In der niedrigsten Abbildung werden die ebenen Schnitte durch Curven sechster Ordnung dargestellt, die fünf feste Doppelpunkte 1, 2, 3, 4, 5 und neun einfache gleichfalls feste Punkte 6, 7, 8, ..., 14 haben. Der dreifache Kegelschnitt bildet sich auf einer Curve sechster Ordnung $1^2.2^2.3^2.4^2.5^2.6^2.7.8 \dots 14$ ab, und die Doppelcurve C_4 auf einer hyperelliptischen Curve neunter Ordnung $1^3.2^3.3^3.4^3.5^3.7^2.8^2 \dots 14^2$.

Legen wir durch C_2 eine Fläche zweiten Grades, so werden wir eine Fläche vierter Ordnung mit dem Doppelkegelschnitte C'_2 erhalten.

Einer durch C_4 gelegten Fläche F_4 vierter Ordnung, welche eine von C_4 dreimal geschnittene Doppelgerade besitzt, entspricht eine Fläche sechster Ordnung F'_6 , welche C'_2 einfach, C'_4 zweifach enthält und einen auf C'_2 gelegenen dreifachen Punkt o hat. Dieser Fläche gehören die drei von o ausgehenden Sehnen von C'_4 an, und ausserdem vier andere Gerade, welche C'_4 dreimal schneiden. In der niedrigsten Abbildung von F'_6 werden die ebenen Schnitte durch Curven siebenter Ordnung abgebildet, die neun Doppelpunkte und sieben einfache Punkte gemein haben. Das Bild des dreifachen Punktes o ist eine Curve dritter Ordnung, welche die neun doppelten und drei einfachen Fundamentalpunkte enthält. Der Doppelcurve C'_4 entspricht eine hyperelliptische Curve vierzehnter Ordnung,

welche viermal durch jeden doppelten, zweimal durch die oben erwähnten drei einfachen, und dreimal durch die übrigen einfachen Fundamentalpunkte geht.

Sechstes Beispiel. — Drei Kegelschnitte A, B, C machen die Fundamentalcurve K aus: A hat zwei Punkte gemein mit jeder der beiden anderen, und diese schneiden sich nur in einem Punkte. Die Fundamentalcurve im anderen Raume wird dann aus einer Raumcurve C_4 vierter Ordnung und zweiter Species, und aus zwei sich kreuzenden Sehnen derselben R', S' zusammengesetzt. Ist im ersten Raume eine cubische Fläche F_3 gegeben, welche durch den Kegelschnitt C geht, so wird ihr eine Fläche sechster Ordnung F'_6 entsprechen, welche eine Doppelcurve C_4 und eine Doppelgerade R' besitzt. Diese Fläche enthält 10 Gerade, von denen 4 die Doppelcurve dreimal schneiden. dagegen schneiden die übrigen C_4 zweimal und R' einmal. — In der niedrigsten Abbildung von F'_6 werden die ebenen Schnitte durch Curven sechster Ordnung mit 5 zweifachen und $6 + 4$ einfachen festen Punkten dargestellt. Der Doppelgeraden entspricht eine cubische Curve, welche die 5 zweifachen und 6 einfachen Fundamentalpunkte enthält; und der Doppelcurve C_4 entspricht eine Curve zwölfter Ordnung, welche durch die $5 + 6 + 4$ Fundamentalpunkte bezüglich 4, 2, 3mal geht. Uebrigens ist diese Fläche ein besonderer Fall der oben im ersten Beispiele betrachteten Fläche sechster Ordnung, welche eine Doppelcurve fünfter Ordnung vom Geschlechte 1 besitzt.

Die vorliegende Transformation führt wieder zu einer Fläche vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitte, wenn man von einer durch die Geraden R', S' gelegten Fläche zweiten Grades ausgeht.

Siebentes Beispiel. — K besteht aus vier windschief liegenden Geraden C, D, E, F und aus ihren Transversalen A, B ; im zweiten Raume werden wir ein ähnliches System (C', D', E', F', A', B') haben. Wendet man diese Transformation auf eine durch A, B, C gehende cubische Fläche F_3 an, so wird man eine mit drei dreifachen A', B', C' und drei zweifachen Geraden D', E', F' behaftete Fläche siebenter Ordnung F'_7 ableiten. Diese Fläche enthält noch 9 einfache Gerade. In der niedrigsten Abbildung haben die ebenen Schnitte zu Bildern Curven vierter Ordnung, die neun einfache feste Punkte 1, 2, ..., 9 haben. Den vielfachen Geraden A', B', C', D', E', F' entsprechen die Kegelschnitte 1.2.3.4.5, 1.2.3.4.6, 5.6.7.8.9 und die Geraden 8.9, 9.7, 7.8.

Achtes Beispiel. — Setzen wir nun voraus, dass K aus einer ebenen cubischen Curve K_3 und aus einer cubischen Raumcurve C_3 bestehe, wobei C_3 und K_3 drei Punkte gemein haben; dann wird K' eine mit einem dreifachen Punkte o behaftete Raumcurve K'_6 sechster Ordnung, vom Geschlechte 1. Legt man durch K_3 eine Fläche F_3 dritter Ordnung, so wird der umgeformte Ort eine Fläche F'_6 sechster Ordnung sein, welche K'_6 zur Doppelcurve und o zum dreifachen Punkte hat. Diese Fläche enthält 6 sich nicht schneidende Gerade, welche den 6 ausserhalb K_3 fallenden Durchschnittspunkten a von F_3 mit C_3 ; und 27 Kegel-

schnitte, welche den 27 Geraden von F_3 entsprechen. Die ebenen Schnitte von F'_6 werden auf F_3 durch Curven sechster Ordnung dargestellt, welche von den die sechs Punkte a enthaltenden Flächen zweiten Grades ausgeschnitten werden. Handelt es sich also darum, die cubische Fläche F_3 in die Fläche sechster Ordnung F'_6 überzuführen, so kann man statt der cubischen Transformation, deren Grundcurve aus K_3 und C_2 besteht, eine quadratische Transformation anwenden: das heisst, ein dreimal unendliches lineares System von Flächen zweiten Grades als den Ebenen des anderen Raumes entsprechend annehmen. Alle diese Flächen gehen durch die sechs festen Punkte a ; folglich ist diese Transformation nur unter der Bedingung rational umkehrbar, dass man sie mit der Gleichung der Fläche verknüpft, die transformirt werden soll. In der That schneiden sich je drei jener Flächen zweiten Grades noch in zwei Punkten; und die Fläche F_3 wird nur von einem derselben durchlaufen. — Die gewöhnliche Darstellung von F_3 giebt unmittelbar die niedrigste ebene Abbildung von F'_6 ; den ebenen Schnitten entsprechen Curven sechster Ordnung, welche sechs doppelte und sechs einfache feste Punkte haben. Das Bild des dreifachen Punktes o besteht aus drei Punkten, die in der Abbildung von F_3 den drei Begegnungspunkten von C_3 und K_3 entsprechen. Die Doppelcurve K'_6 wird durch eine Curve fünfzehnter Ordnung mit sechs fünffachen, sechs dreifachen und drei doppelten Punkten dargestellt.

Geht F_3 durch C_3 , nicht durch K_3 , so wird eine Fläche F'_4 vierter Ordnung mit dem dreifachen Punkte o entstehen; den 6 auf F_3 liegenden Sehnen von C_3 und den 6 Punkten, in welchen F_3 und K_3 ausserhalb C_3 sich treffen, entsprechen 12 Gerade von F'_4 , welche durch o gehen. Die niedrigste Abbildung fällt hier mit der Centralprojection aus o zusammen.

Bei dieser Transformation entsprechen den windschiefen Flächen, deren Erzeugende Sehnen von C_3 sind, die Kegel mit der Spitze o . Insbesondere entspricht der von Tangenten von C_3 gebildeten Fläche der von o an die Fläche gelegte Berührungskegel (zweiten Grades), welcher der Ort der die Curve K'_6 dreimal treffenden Geraden ist.

Sei C_3 das System von drei Geraden A, B, C , von denen die beiden ersten windschief liegen, während beide von der dritten geschnitten werden. Dann wird K' aus einer Raumeurve C'_4 (vierter Ordnung und erster Species) und zwei ihrer Sehnen A', B' bestehen, welche einen Punkt o der Curve gemein haben. Nehmen wir nun eine windschiefe Fläche $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung an, auf welcher A eine m -fache, B eine n -fache Directrix, und C eine einfache Erzeugende sein möge. Der entsprechende Ort im andern Raume wird dann ein Kegel $(m+n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit der Spitze o sein: dieser Kegel besitzt eine $(m-1)$ fache und eine $(n-1)$ fache Kante, A', B' . [⁷⁹]

Geht man von einer durch C'_4 gelegten und mit dem dreifachen Punkte o behafteten Fläche F'_4 vierter Ordnung aus, so führt dieselbe Transformation zu einer Fläche fünfter Ordnung F'_5 , auf welcher A und B doppelte, C eine dreifache Gerade ist. Diese merkwürdige

Fläche besitzt 10 Gerade, von denen 4 A und B schneiden, während die übrigen zu zwei in drei durch C gehenden Ebenen liegen. Die Projection von F'_4 aus dem dreifachen Punkte o giebt sofort die niedrigste ebene Abbildung von F_5 , in welcher den ebenen Schnitten Curven dritter Ordnung entsprechen, die vier Punkte 1, 2, 3, 4 gemein haben. Sind α, β die Mittelpunkte der Geradenbüschel, welche die ebenen durch A, B resp. gehenden Schnitte darstellen, so ist die Gerade $\alpha\beta$ das Bild von C; den Doppelgeraden A, B entsprechen aber zwei in 1 2 3 4 sich schneidende Kegelschnitte (a), (b). Seien $\alpha' \alpha'', \beta' \beta''$ die Durchschnittspunkte von (a), (b) mit der Geraden $\alpha\beta$; dann treffen die Bilder der ebenen Schnitte von F_5 den Kegelschnitt (a) in zwei mit β , den Kegelschnitt (b) in zwei mit α geradlinig liegenden Punkte, und die Gerade $\alpha\beta$ in drei Punkte, welche eine Gruppe der cubischen Involution ($\alpha\alpha' \alpha'', \beta\beta' \beta''$) bilden.

Neuntes Beispiel. — Seien nun die Bestandtheile von K eine cubische Raumcurve C_3 , eine Gerade C_1 , und ein Kegelschnitt C_2 , welcher C_3 dreimal und C_1 zweimal begegnet. Dann besteht K' aus einer rationalen Curve C'_5 fünfter Ordnung mit einem dreifachen Punkte o , und aus einer Sehne C'_1 derselben Curve. Mittelst dieser Transformation geht eine durch C_2 gelegte Fläche F_2 zweiten Grades in eine Fläche F'_5 fünfter Ordnung mit dem dreifachen Punkte o und der Doppelcurve C'_5 über. Diese Fläche enthält ausser C'_1 noch 9 Gerade, welche den drei (nicht auf C_2 liegenden) Begegnungspunkten a von F_2 mit C_3 , und den sechs aus den Punkten a ausgehenden Geraden von F_2 entsprechen: und diese 10 Geraden bilden 10 Doppeldreien *). Auf F'_5 liegen fünf Schaaren von Kegelschnitten: und die Auflösung der Gleichung fünften Grades, welche diese fünf Schaaren giebt, liefert ohne weiteres die Auflösung der zwei Gleichungen zehnten Grades, von denen die zehn Geraden und die zehn Doppeldreien abhängen. — Den ebenen Schnitten von F'_5 entsprechen auf F_2 Curven vierter Ordnung und erster Species, so dass eine quadratische Transformation existirt, welche, mit Hülfe der Gleichung von F_2 , von dieser Fläche zu F'_5 führt. — Aus der Centralprojection von F_2 und einer darauf folgenden quadratischen ebenen Transformation ergibt sich die niedrigste Abbildung von F'_5 , wobei die Bilder der ebenen Schnitte Curven dritter Ordnung sind, die durch vier feste Punkte gehen. Der Doppelcurve entspricht eine hyperelliptische Curve sechster Ordnung mit 7 Doppelpunkten, welche mit den 4 Fundamentalpunkten und 3 anderen, das Bild des dreifachen Punktes o ausmachenden, Punkten zusammenfallen.

Durch die umgekehrte Transformation führt eine den Punkt o und die Gerade C'_1 enthaltende cubische Fläche F'_3 zu einer Fläche sechster Ordnung F_6 , welche eine doppelte Raumcurve dritter Ordnung C_3 und eine diese nicht schneidende Doppelgerade C_1 besitzt. Diese

*) Mathem. Annalen, 3. Band, S. 75, Anmerkung.

Fläche enthält 10 Gerade, welche den Punkten entsprechen, in welchem F'_3 und C'_5 sich ausserhalb o und C'_1 noch treffen; 12 Kegelschnitte, welche den 10 von C'_1 geschnittenen Geraden von F'_3 , dem in der Ebene oC'_1 liegenden Kegelschnitte von F'_3 und dem Punkte o entsprechen; 32 cubische Raumcurven, welche den 16 von C'_1 nicht getroffenen Geraden von F'_3 und den 16 durch o gehenden und von C'_1 geschnittenen Kegelschnitten von F'_3 entsprechen; u. s. w. — Man bilde F'_3 auf einer Ebene so ab, dass die Gerade C'_1 durch den Kegelschnitt 1. 2. 3. 4. 5 dargestellt werde; sei 0 der sechste Fundamentalpunkt dieser Abbildung; 6 das Bild des Punktes o (von F'_3); und 7, 8, ..., 16 die Bilder der Begegnungspunkte von F'_3 und C'_5 . Dann haben wir die niedrigste Abbildung von F'_6 : die ebenen Schnitte werden durch Curven siebenter Ordnung $0^3.1^2.2^2 \dots 6^2.7.8 \dots 16$; die Doppelgerade durch eine hyperelliptische Curve sechster Ordnung $0^2.1^2.2^2 \dots 6^2.7.8 \dots 16$; und die cubische Doppelcurve durch eine ebenfalls hyperelliptische Curve elfter Ordnung $0^5.1^3.2^3 \dots 6^3.7^2.8^2 \dots 16^2$ dargestellt *).

Es schien mir nicht überflüssig, eine grössere Anzahl von Beispielen anzuführen, um die Nützlichkeit dieses Verfahrens möglichst gut zu beweisen; denn es sind nicht nur alle schon von Herrn CLEBSCH und NÖTHER untersuchten Flächen, sondern auch manche andere auf die leichteste Weise entstanden **). Die oben angewandten Transformationen sind solcher Art, dass ihnen umgekehrte Transformationen gleicher Ordnung entsprechen; es giebt aber noch andere, welche bei der Umkehrung ihre Ordnung ändern. Z. B. giebt es (unter anderen) drei cubische Transformationen, denen Transformationen vierten, fünften, sechsten Grades bezüglich entsprechen ***) Die Flächen dritter Ordnung des ersten Raumes, welche auf den Ebenen des zweiten sich abbilden, haben bei der ersten Transformation eine Curve fünfter Ordnung (vom Geschlechte 1) und einen Punkt; bei der zweiten eine cubische Raumcurve, eine diese nicht schneidende Gerade und zwei Punkte; bei der dritten einen Doppelpunkt, drei einfache Punkte und einen ebenen Schnitt gemein.

Es liegt keine Schwierigkeit vor, wenn man Transformationen höherer Ordnung betrachten will, mögen sie aus Verbindungen und Wiederholungen der bekannten quadratischen und cubischen Transformationen, oder vielmehr aus directen Forschungen hervorgehen. Ich werde hier nur wenige Beispiele noch angeben.

*) Math. Annalen, Bd. 3, S. 203.

**) S. überdiess die neue Abhandlung von H. NÖTHER, welche genau gleichzeitig (Math. Annalen, Bd. 3, p. 547) erschien, wie diese Mittheilung in den Gött. Nachrichten vom 3. Mai und meine erste Note [Queste Opere, n. 91] in den Rendiconti dell' Istituto Lombardo vom 4. desselben Monats.

***) Die beiden erstern sind in der oben citirten Abhandlung von H. CAYLEY berührt.

Es giebt eine Transformation zweiten Grades, deren Umkehrung zum vierten Grade führt. Den Ebenen des ersten Raumes entsprechen Flächen zweiten Grades, welche vier feste Punkte und in einem derselben eine feste Berührungsebene haben. Den Ebenen des zweiten Raumes entsprechen STEINER'sche Flächen, welche die drei Doppelgeraden und noch einen Kegelschnitt gemein haben. Geht man von einer beliebig im ersten Raume liegenden Fläche zweiter Ordnung aus, so erhält man *eine mit drei konischen und einem uniplanaren Punkte behaftete Fläche vierter Ordnung*, welche vier im letzten Punkte sich kreuzende und auf einer Ebene liegende Gerade besitzt. Es ist dies vielleicht das erste Beispiel einer auf einer Ebene abbildbaren Fläche vierter Ordnung, welche weder eine doppelte Linie noch einen dreifachen Punkt hat.

Wenn man die im vierten Beispiele betrachtete Transformation zweimal ausführt, so entsteht eine Transformation fünften Grades, wobei den Ebenen jedes Raumes Flächen fünfter Ordnung entsprechen, welche eine feste Doppelcurve vierter Ordnung und erster Species besitzen und durch vier feste Sehnen dieser Curve gehen. Mittelt dieser Transformation bewirkt man den Uebergang von einer Fläche dritter Ordnung zu *einer Fläche siebenfter Ordnung mit einer dreifachen Curve vierter Ordnung und erster Species*. Die niedrigste ebene Abbildung dieser Fläche ist so beschaffen, dass den ebenen Schnitten Curven fünfter Ordnung mit einem dreifachen (0) und neun einfachen festen Punkten 1, 2, ..., 9, und der dreifachen Curve eine Curve neunter Ordnung $0^5.1^2.2^2\dots9^2$ entspricht. Die Punkte dieser Curve bilden solche Tripel, dass, wenn eine von 0 ausgehende Gerade die Curve in vier Punkten schneidet, die vier Paare von zugehörigen Punkten mit 1, 2, ..., 9 zusammen auf einer Curve vierter Ordnung liegen, welche in 0 einen Doppelpunkt hat.

Es giebt eine Transformation vierten Grades, bei welcher den Ebenen eines Raumes Flächen vierter Ordnung entsprechen, welche einen doppelten Kegelschnitt, eine Curve vierter Ordnung und zweiter Species und einen Punkt gemein haben. Die umgekehrte Transformation ist wieder vierten Grades.

Bei einer anderen Transformation vierten Grades entsprechen den Ebenen des ersten Raumes Flächen vierter Ordnung, welche einen gemeinsamen Doppelkegelschnitt haben und durch eine feste Curve fünfter Ordnung (vom Geschlechte 1) gehen. Die umgekehrte Transformation ist nur dritten Grades.

Es giebt eine Transformation n^{ter} Ordnung, bei welcher den Ebenen eines Raumes Flächen n^{ter} Ordnung entsprechen, welche eine $(n - 2)$ fache Gerade und eine Curve $(3n - 4)^{\text{ter}}$ Ordnung (vom Geschlechte $3n - 7$) gemein haben. Diese Curve trifft die vielfache Gerade in $3n - 7$ Punkten. Die umgekehrte Transformation ist wieder n^{ten} Grades.

Schliesslich können wir aussagen: *sobald die ebene Abbildung einer Fläche vollzogen ist, ist man im Stande, alle die Trasformationen anzugeben, bei welchen den Ebenen eines Raumes*

Flächen entsprechen, die derselben Art sind, wie die gegebene, und welche dieselben vielfachen Linien und Punkte besitzen. [⁸⁰]

Sei nämlich φ die Fläche, deren ebene Abbildung Π gegeben ist. Dann wird φ von allen, dieselben vielfachen Linien und Punkte besitzenden Flächen $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ (derselben Ordnung n) ausserdem in Curven geschnitten, deren Bilder auf Π ein gewisses System Σ ausmachen. Nehmen wir nun auf Π ein *homaloïdisches* Netz von rationalen Curven K an, deren jede, zusammen mit einem unveränderlichen Orte L (einem Complexe von mehreren auch vielfach zu rechnenden Curven), zu einer Curve des Systems Σ ergänzen möge. Drei nicht zu einem und demselben Büschel gehörende Curven K_1, K_2, K_3 des Netzes bestimmen drei Büschel von Flächen $\varphi + \alpha_1 \varphi_1, \varphi + \alpha_2 \varphi_2, \varphi + \alpha_3 \varphi_3$, welche *ein homaloïdisches System von Flächen*

$$(1) \quad \alpha \varphi + \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 = 0$$

liefern. Dann können wir die Flächen dieses Systems als den Ebenen eines anderen Raumes entsprechend annehmen, sodass eine *eindeutige Transformation n^{ten} Grades* entstehen wird. Die Ordnung der Raumcurven, welche den Curven K der Abbildung Π entsprechen, stimmt mit dem Grade der umgekehrten Transformation, das heisst mit der Ordnung der das homaloïdische System im zweiten Raume

$$(2) \quad \beta \phi + \beta_1 \phi_1 + \beta_2 \phi_2 + \beta_3 \phi_3 = 0$$

ausmachenden Flächen ϕ überein.

Die JACOBI'sche Curve des Netzes K besteht *) aus mehreren Linien k ; und die diesen Linien entsprechenden Raumcurven, zusammen mit den (vielfach zu rechnenden) dem ganzen Systeme (1) gemeinsamen Curven, ergänzen sich zum vollen Durchschnitte der gegebenen Fläche φ mit der JACOBI'schen Fläche des Systems (1). [⁸¹] Anders gesagt: die k sind die Bilder der Raumcurven (des ersten Raumes), welche den Punkten entsprechen, wo die Fundamentalcurven des zweiten Raumes (d. h. die den Flächen ϕ gemeinsamen Curven) von der der gegebenen Fläche φ entsprechenden Ebene geschnitten werden. Haben also die Flächen (1) eine einfache, eine zweifache, ... eine r -fache Curve gemein, so wird diese $1 \cdot 3, 2 \cdot 7, \dots, r(4r-1)$ mal **) im Durchschnitte der gegebenen Fläche φ mit der JACOBI'schen Fläche des Systems (1) enthalten sein; der fernere Schnitt dieser Flächen aber wird ausschliesslich durch die Curven k dargestellt, aus denen die JACOBI'sche Curve des Netzes K besteht (mit Rücksicht auf die von den Fundamentalpunkten von Π darge-

*) *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* (Mem. Accad. Bologna, 1865, serie 2, t. 5) [Queste Opere, n. 62 (t. 2.^o)].

**) MAX NÖTHER in den Math. Annalen, Bd. 2, S. 293.

stellten Linien von φ). Wenn (in der gegebenen Fläche φ) l_1 Geraden, l_2 Kegelschnitte, l_3 (rationale) Curven dritter Ordnung u. s. w. den Linien k der Abbildung Π entsprechen, werden die Flächen ϕ des zweiten Raumes eine einfache Curve l_1^{ter} Ordnung, eine zweifache Curve l_2^{ter} Ordnung, eine dreifache Curve l_3^{ter} Ordnung, u. s. w. haben. Und die Betrachtung der Verhältnisse der gegebenen Abbildung Π , des Netzes K und des Ortes L mit den ihnen entsprechenden Raumobjecten, wird uns ohne wesentliche Schwierigkeiten zur Entdeckung der inneren Eigenschaften des Systems (2) führen; womit man aber auch im Stande sein wird, die umgekehrte Transformation als vollständig erklärt anzusehen.

Jedes Netz von Curven, wie K , liefert eine rationale Transformation der hier in Betracht kommenden Art. Nun erlaube ich mir noch ein Beispiel anzuführen, um die Fertigkeit und die Fruchtbarkeit der hier vorgeschlagenen Methode einleuchtend zu machen *).

Sei φ eine Fläche dritter Ordnung: und 1, 2, 3, 4, 5, 6 die Fundamentalpunkte ihrer ebenen Abbildung Π . Als Curven K nehme ich die durch 1, o_1 , o_2 **) beschriebenen Kegelschnitte an, so dass L eine Curve siebenter Ordnung $1^2 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^3 \cdot 5^3 \cdot 6^3$ sein wird. Diese Curve zerfällt in einen Kegelschnitt 2. 3. 4. 5. 6 und eine Curve fünfter Ordnung $1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2$; und die entsprechenden Raumlinien sind eine Gerade R und eine cubische unebene Curve C_3 , die keinen Punkt gemein haben. Die Flächen des Systems (1) sind also dritter Ordnung und enthalten R , C_3 und zwei gegebene Punkte O_1 , O_2 ; und je zwei von denselben schneiden einander in einer Curve fünfter Ordnung ($\varphi = 0$), die durch O_1 , O_2 geht und R viermal, C_3 achtmal trifft. Solche Curven fünfter Ordnung entsprechen den Geraden des anderen Raumes; folglich sind die den Punkten O_1 , O_2 und den Linien R , C_3 entsprechenden Theile der JACOBI'schen Fläche des Systems (2), Flächen resp. erster, erster, vierter, achter Ordnung. — Die JACOBI'sche Fläche des Systems (1) begegnet φ längs den dreimal zu zählenden R , C_3 ; längs einer von der Geraden $o_1 o_2$ dargestellten cubischen Raumcurve; längs zwei von $1 o_1$, $1 o_2$ dargestellten Kegelschnitten und längs fünf von den Punkten 2, 3, 4, 5, 6 dargestellten Geraden. Demnach besitzt das zweite System die folgenden Fundamentalcurven: 1. eine dreifache Gerade A , die dem Orte der cubischen Raumcurven entspricht, welche durch O_1 , O_2 gehen, R zweimal und C_3 fünfmal schneiden (dieser Ort ist das Hyperboloid $O_1 O_2 C_3$); 2. eine doppelte Gerade B_1 , die der Ebene $O_1 R$ entspricht, als dem Orte der Kegelschnitte, die durch O_1

*) Andere Beispiele sind in den Rendiconti del R. Istituto Lombardo (4. maggio und 1. giugno 1871) zu sehen (Queste Opere, n. 91, 92).

**) o_1 , o_2 sind zwei beliebige, aber von den Fundamentalpunkten verschiedene Punkte der Ebene Π .

gehen, R zweimal und C_3 dreimal begegnen; 3. eine andere Doppelgerade B_2 , die analoger Weise der Ebene O_2R entspricht; 4. eine einfache Curve C_5 fünfter Ordnung ($p = 0$), welche dem Orte der Geraden entspricht, die C_3 zweimal und R einmal schneiden: dieser Ort ist die Fläche vierten Grades RC_3^2 .

Die Geraden A , B_1 haben einen Punkt gemein, weil das Hyperboloïd $O_1O_2C_3$ und die Ebene O_1R längs einem Kegelschnitte sich schneiden; und so treffen sich auch A , B_2 ; B_1 und B_2 aber liegen schief gegen einander. — A und C_5 haben zwei Punkte gemein, wegen der zwei den Orten $O_1O_2C_3$, RC_3^2 gemeinsamen Geraden; und da die Ebene O_1R drei Sehnen von C_3 enthält, so stützt sich B_1 auf C_5 in drei Punkten; und ähnlicherweise B_2 auf C_5 .

Hieraus folgt, dass die Flächen ϕ des Systems (2) Flächen fünfter Ordnung sind, welche die dreifache Gerade A , die Doppelgeraden B_1 , B_2 und die einfache rationale Curve C_5 gemein haben; und dass den Geraden des ersten Raumes cubische Raumcurven entsprechen, welche A , B_1 , B_2 , C_5 resp. 2, 1, 1, 4mal schneiden (denn diese Zahlen sind die Grade der Orte $O_1O_2C_3$, O_1R , O_2R , RC_3^2 , welche die JACOBI'sche Fläche des Systems (1) ausmachen). Somit ist das System (2) gänzlich bestimmt.

Die JACOBI'sche Fläche dieses Systems enthält die folgenden Orte: 1. die (zweimal zu rechnenden) Ebenen AB_1 , AB_2 ; 2. die Fläche vierten Grades $A^2B_1^2B_2^2C_5$, welche von den auf B_1 , B_2 , C_5 sich stützenden Geraden ausgefüllt ist; 3. die Fläche achten Grades $A^5B_1^3B_2^3C_5^2$, welche aus den von A geschnittenen Sehnen von C_5 gebildet ist.

Nun entsprechen offenbar:

den von A geschnittenen Geraden die Kegelschnitte, welche R 2mal, C_3 3mal treffen;
den von B_1 (B_2) geschnittenen Geraden die cubischen Raumcurven, welche durch O_2 (O_1) gehen und R 2mal, C_3 5mal treffen;

den von B_1 und B_2 geschnittenen Geraden die Sehnen von C_3 ;

den von C_5 einmal geschnittenen Geraden die Raumcurven vierter Ordnung und zweiter Species, welche durch O_1 , O_2 gehen und R 3mal, C_3 6mal treffen;

den zweipunktigen Sehnen von C_5 die cubischen Raumcurven, welche durch O_1 , O_2 gehen und R 2mal, C_3 4mal treffen;

den dreipunktigen Sehnen von C_5 die Kegelschnitte, welche durch O_1 , O_2 gehen und R einmal, C_3 2mal treffen;

der einzigen vierpunktigen Sehne von C_5 die Gerade O_1O_2 ;

den A und C_5 schneidenden Geraden die Geraden, welche R und C_3 treffen;

den B_1 (B_2) und C_5 schneidenden Geraden die Kegelschnitte, welche durch O_2 (O_1) gehen und R einmal, C_3 3mal treffen;

den von B_1 (B_2) geschnittenen zweipunktigen Sehnen von C_5 die Erzeugenden des cubischen Kegels O_2C_3 (O_1C_3);

den durch $O_1(O_2)$ gehenden Geraden die Kegelschnitte, welche C_5 4mal, B_1 und B_2 einmal treffen;

den Ebenen durch A die Ebenen durch R ;

den Ebenen durch $B_1(B_2)$ die Flächen zweiten Grades durch $O_2 C_3 (O_1 C_3)$;

den Flächen zweiten Grades durch $A B_1 B_2$ die Flächen zweiten Grades durch C_3 ;

den Ebenen durch $O_1(O_2)$ die Flächen vierter Ordnung $A^2 B_1 B_2^2 C_5 (A^2 B_1^2 B_2 C_5)$;

den Ebenen durch die Gerade $O_1 O_2$ die cubischen Flächen durch $A B_1 B_2 C_5$; u. s. w.

Einer Fläche F_3 dritter Ordnung, welche durch C_5 geht, entspricht eine Fläche F_5 fünfter Ordnung, auf welcher R eine Doppelgerade, C_3 eine einfache Curve, O_1 und O_2 dreifache Punkte sind. Somit hat man eine neue Classe von abbildbaren Flächen fünfter Ordnung. Die gewöhnliche Abbildung von F_3 giebt die niedrigste Darstellung von F_5 ; worin den ebenen Schnitten Curven siebenter Ordnung entsprechen, welche einen dreifachen (a_1), sieben doppelte ($1, 2, 3, 4, 5, a_2, a_3$) und sieben einfache ($0, b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{22}, b_{23}$) feste Punkte besitzen. Dann entsprechen noch:

den dreifachen Punkten O_1, O_2 zwei Curven dritter Ordnung, deren eine die Punkte $0, 1, 2, 3, 4, 5, a_1, a_2, a_3, b_{11}, b_{12}, b_{13}$, die andere die Punkte $0, 1, 2, 3, 4, 5, a_1, a_2, a_3, b_{21}, b_{22}, b_{23}$ enthält;

der Doppelgeraden R eine Curve vierter Ordnung $1, 2, 3, 4, 5, a_1^2, a_2, a_3, b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{22}, b_{23}$;

den ebenen Schnitten durch R die Curven dritter Ordnung des Büschels $0. 1. 2. 3. 4. 5. a_1. a_2. a_3$;

den ferneren Schnitten von F_5 durch die Flächen zweiter Ordnung $O_2 C_3$ die Curven dritter Ordnung des Büschels $0. 1. 2. 3. 4. 5. b_{11}. b_{12}. b_{13}$;

den ferneren Schnitten von F_5 durch die Flächen zweiter Ordnung $O_1 C_3$ die Curven dritter Ordnung des Büschels $0. 1. 2. 3. 4. 5. b_{21}. b_{22}. b_{23}$;

den ebenen Schnitten durch $O_1 O_2$ die Geraden durch a_1 ; u. s. w.

Hieraus erkennt man noch die besondere Lage der Fundamentalpunkte der Abbildung.

Unter die Transformationen dritten Grades, welche umgekehrte Transformationen fünften Grades zulassen, giebt es noch eine, die mit der oben erörterten eine gewisse Analogie darbietet. Die ψ sind noch Flächen fünfter Ordnung, welche eine dreifache Gerade A und zwei Doppelgerade B_1, B_2 besitzen; die einfache Fundamentalcurve C_5 aber ist nicht mehr rational; sie gehört zum Geschlechte $p = 1$ und trifft A in drei, B_1 und B_2 in zwei Punkten. Im ersten Raume sind die φ Flächen dritter Ordnung, welche einen doppelten (konischen) und zwei einfache feste Punkte haben und ausserdem längs einer (durch die festen Punkte gehenden) Raumcurve vierter Ordnung und erster Species sich schneiden.

Ich schliesse diese Mittheilung; Jeder wird aber die unzählbaren Anwendungen leicht vorhersehen, welche man von dieser unerschöpflichen Quelle von Transformationen auf die Raumgeometrie und insbesondere auf die Untersuchung und Abbildung algebraischer Flächen machen kann.

Mailand, den 1. Juni 1871.
