

SULLA
TRASFORMAZIONE RAZIONALE DI 2.^o GRADO NELLO SPAZIO,
LA CUI INVERSA È DI 4.^o GRADO. [⁸²]

Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Serie III, tomo I (1871), pp. 365-386.

Sono note le trasformazioni di 2.^o grado, nello spazio a tre dimensioni, le cui inverse sono del 2.^o o del 3.^o grado. La prima è da tempo divulgatissima, e coincide in sostanza coll'inversione o metodo de' raggi vettori reciproci. La seconda, che ha offerto il primo esempio di una trasformazione di grado diverso da quello della sua inversa, è stata trovata dal sig. CAYLEY *). Al contrario credo assolutamente nuova la trasformazione, che intendo considerare in questa Nota: trasformazione che è di 2.^o grado, mentre la sua inversa è del 4.^o

Tutte le trasformazioni, alle quali qui si allude, sono quelle che servono a riferire i punti d'uno spazio, ad uno ad uno, ai punti di uno altro spazio; vale a dire, quelle che trasformano un sistema di coordinate indipendenti $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ in un altro sistema analogo $y_1 : y_2 : y_3 : y_4$, così che da quelle a queste e da queste a quelle si passi per mezzo di formule razionali **). La trasformazione che effettua il passaggio da uno spazio ad un altro, dicesi del grado n , se ai piani del primo spazio corrispondono nel secondo superficie d'ordine n . Queste superficie sono *razionali* od *omaloidi*, cioè rappresentabili punto

*) *On the rational transformation between two spaces* (Proceedings of the London Mathematical Society, 1870, t. 3, p. 171).

**) CREMONA, *Sulle trasformazioni razionali nello spazio* (Rendic. Istit. Lomb. 4 maggio 1871) [Queste Opere, n. 91]. — NOETHER, *Ueber die eindeutigen Raumtransformationen*, etc. (Mathem. Annalen, t. 3, p. 547). Questi due lavori sono venuti alla luce contemporaneamente. — Per l'analoga quistione rispetto alle figure piane, vedi le Memorie dell'Accademia di Bologna, 2.^a serie, t. 2 (1863) e t. 5 (1865), ovvero il Giornale di Matematiche di Napoli, t. 1 e 3 [Queste Opere, n. 40, 62 (t. 2.^o)], ed inoltre la citata Memoria del sig. CAYLEY.

per punto sopra un piano, e formano necessariamente un sistema ch'io chiamo *omaloidico*, cioè un sistema lineare triplamente infinito e tale che tre superficie prese ad arbitrio da esso si seghino in un solo punto non comune a tutte le superficie del sistema medesimo. Allora ai piani del secondo spazio corrisponderanno analogamente superficie d'ordine m , formanti un altro sistema omaloidico: dove m è il grado della trasformazione inversa. È evidente che ciascuno de' numeri m , n non può superare il quadrato dell'altro; ond'è che l'inversa di una trasformazione di 2.^o grado non può essere che di 2.^o 3.^o o 4.^o grado.

Un sistema omaloidico di 2.^o grado è formato da superficie che hanno in comune:

- 1) una conica ed un punto; ovvero
- 2) una retta e tre punti: ovvero
- 3) quattro punti e il piano tangente in uno di questi.

Siano esse le superficie del 2.^o spazio che corrispondono ai piani del 1.^o. Se ha luogo il caso 1), la trasformazione inversa è di 2.^o grado e il sistema omaloidico nel 1.^o spazio è pur esso formato da superficie aventi in comune una conica ed un punto. In questo caso si può riguardare come compreso quello nel quale le superficie di 2.^o grado del sistema abbiano una conica comune e si tocchino in un punto di questa *).

Se ha luogo il caso 2), la trasformazione inversa è di 3.^o grado, e il sistema omaloidico nel 1.^o spazio è formato da superficie gobbe aventi in comune la retta doppia e tre generatrici.

Nel caso 3), la trasformazione inversa è di 4.^o grado, e il sistema omaloidico nel 1.^o spazio è costituito da superficie di STEINER, che hanno in comune le tre rette doppie ed una conica. Questa è appunto la trasformazione della quale si vuol qui tener discorso.

Considero adunque due spazi, i cui punti si corrispondano *ad uno ad uno* (eccezion fatta di alcuni punti e di alcune curve singolari), in modo che ai piani d'uno spazio corrispondano nell'altro superficie di 2.^o grado circoscritte ad un tetraedro fisso $OO_1O_2O_3$ e toccate nel vertice O da un piano fisso. Che tale corrispondenza sia possibile, risulta dal considerare che le superficie così definite formano effettivamente un sistema omaloidico: infatti tre punti presi arbitrariamente nello spazio determinano una (ed una sola) superficie del sistema, e tre superficie prese arbitrariamente nel sistema si segano, all'infuori dei vertici del tetraedro, in un punto unico.

Riferendo i punti del 2.^o spazio al tetraedro dato, i cui piani OO_2O_3 , OO_3O_1 , OO_1O_2 , $O_1O_2O_3$ abbiamo per equazioni ordinatamente

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0,$$

*) CREMONA, *Sulla superficie di 4.^o ordine dotata di una conica doppia* (Rendic. Istit. Lomb. 9 e 23 Marzo 1871) [Queste Opere, n. 88, 89].

l'equazione generale delle superficie del sistema sarà

$$(1) \quad a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 + a_4 x_4 (x_1 + x_2 + x_3) = 0,$$

essendo

$$(2) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

il piano tangente fisso e le a quattro parametri arbitrari. Facendo adunque corrispondere la superficie (1) al piano

$$(3) \quad a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + a_4 y_4 = 0$$

del primo spazio, avremo fra le coordinate $x_1 x_2 x_3 x_4$, $y_1 y_2 y_3 y_4$ di due punti corrispondenti le relazioni

$$(4) \quad \begin{aligned} y_1 &\equiv x_2 x_3, \\ y_2 &\equiv x_3 x_1, \\ y_3 &\equiv x_1 x_2, \\ y_4 &\equiv x_4 (x_1 + x_2 + x_3), \end{aligned}$$

dove il segno $\equiv$ indica *proporzionalità*. In particolare, ai piani

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 = 0$$

passanti pel punto $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, che diremo Q , corrispondono i coni

$$(5) \quad a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 = 0$$

circoscritti al triedro i cui spigoli sono le rette OO_1 , OO_2 , OO_3 .

Di qui segue che *ad una retta arbitraria nello spazio (y) corrisponde nello spazio (x) una curva gobba R di 4.^o ordine, passante pei punti O_1 , O_2 , O_3 , ed avente un punto doppio in O colle tangenti situate nel piano fisso $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Se quella retta passa pel punto Q , la curva gobba si spezza in quattro rette concorrenti in O , tre delle quali sono gli spigoli OO_1 , OO_2 , OO_3 del triedro suaccennato. Dunque al solo punto Q corrisponde la terna delle rette OO_1 , OO_2 , OO_3 , e ad una retta uscente da Q corrisponde una retta uscente da O .*

Dalle (4) si cavano le forme inverse:

$$(6) \quad \begin{aligned} x_1 &\equiv (y_2 y_3 + y_3 y_1 + y_1 y_2) y_2 y_3, \\ x_2 &\equiv (y_2 y_3 + y_3 y_1 + y_1 y_2) y_3 y_1, \\ x_3 &\equiv (y_2 y_3 + y_3 y_1 + y_1 y_2) y_1 y_2, \\ x_4 &\equiv y_1 y_2 y_3 y_4, \end{aligned}$$

le quali significano che ad un piano qualsivoglia

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0$$

dello spazio (x) corrisponde una superficie (di STEINER) di 4.^o ordine e 3.^a classe

$$(7) \quad (b_1y_2y_3 + b_2y_3y_1 + b_3y_1y_2)(y_2y_3 + y_3y_1 + y_1y_2) + b_4y_1y_2y_3y_4 = 0;$$

e tutte le superficie analoghe hanno le stesse rette doppie $y_2 = y_3 = 0$, $y_3 = y_1 = 0$, $y_1 = y_2 = 0$ (il cui punto comune è Q), ed inoltre passano per una conica fissa

$$(8) \quad y_4 = 0, \quad y_2y_3 + y_3y_1 + y_1y_2 = 0.$$

Indicherò con Q_1 , Q_2 , Q_3 i punti $y_2 = y_3 = y_4 = 0$, $y_3 = y_1 = y_4 = 0$, $y_1 = y_2 = y_4 = 0$ ne' quali la conica si appoggia alle tre rette doppie.

Perciò *ad una retta arbitraria dello spazio (x) corrisponde in (y) l'intersezione ulteriore di due superficie del sistema (7), vale a dire una conica S appoggiata in un punto a ciascuna delle rette QQ_1 , QQ_2 , QQ_3 ed alla conica (8).*

Ma agli stessi risultati si perviene anche per altra via, come ora verrò esponendo.

Se una superficie del sistema (1) ha un punto doppio, essa è o un cono o un pajo di piani. Nel primo caso, il cono dee toccare il piano (2), epperò questo piano medesimo ne conterrà il vertice; nel secondo caso, uno dei piani sarà una faccia del triedro $O(O_1O_2O_3)$ e l'altro passerà per lo spigolo opposto. Da ciò, e dalla considerazione che la *Jacobiana* (il luogo dei punti doppi) *delle superficie* (1) è del 4.^o ordine, segue che la *Jacobiana* medesima è *il sistema de' quattro piani*

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

ai quali debbono adunque corrispondere altrettante curve fondamentali nello spazio (y), cioè curve comuni alle superficie omaloidi, che corrispondono ai piani in (x).

Considerando ora l'intersezione di ciascuno dei quattro piani colle superficie (1), si riconosce che:

il piano $x_1 = 0$ è il luogo delle coniche passanti pei tre punti fissi $O O_2 O_3$ e tangenti in O al piano fisso (2);

il piano $x_2 = 0$ è il luogo delle coniche passanti pei tre punti fissi $O O_3 O_1$ e tangenti in O al detto piano fisso;

il piano $x_3 = 0$ è il luogo delle coniche passanti pei tre punti fissi $O O_1 O_2$ e tangenti in O al piano fisso medesimo; ed

il piano $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ è un luogo di rette uscenti da O .

Ora, ad un luogo di coniche (intersezioni delle superficie (1) colla *Jacobiana*) corri-

sponderà una linea fondamentale doppia nello spazio (y), e ad un luogo di rette una linea fondamentale semplice; dunque le superficie dello spazio (y), corrispondenti ai piani in (x), avranno in comune tre linee doppie corrispondenti ai piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, ed una linea semplice corrispondente al piano $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Ciascuna linea doppia è una retta, perchè il corrispondente piano ha una sola conica comune con una qualunque delle superficie (1); e la linea semplice è una conica, perchè il corrispondente piano ha con ciascuna delle superficie (1) due rette comuni.

Due qualunque delle tre rette doppie hanno un punto comune, perchè la retta comune ai due corrispondenti piani appartiene sì al fascio delle coniche contenute nell'un piano, sì al fascio delle coniche contenute nell'altro [⁸³]. Le tre rette doppie non sono in uno stesso piano, giacchè ad un tale piano corrisponderebbe una superficie (1) della quale farebbero parte i tre piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; il che è assurdo. Dunque le tre rette doppie concorrono in uno stesso punto Q .

La conica semplice incontra ciascuna delle rette doppie in un punto (Q_1 , Q_2 , Q_3), perchè la retta comune ai piani a quelle corrispondenti fa parte sì del fascio di coniche contenute nell'un piano, sì del fascio di rette contenute nell'altro.

Che poi ai piani dello spazio (x) corrispondano in (y) superficie di 4.^o ordine, risulta dall'osservare che le curve dello spazio (x) corrispondenti alle rette in (y) sono appunto del 4.^o ordine.

Dunque ai piani in (x) corrisponderanno in (y) superficie di 4.^o ordine aventi in comune tre rette doppie (concorrenti in un punto Q) ed una conica appoggiata alle tre rette doppie in tre punti Q_1 , Q_2 , Q_3 .

Siccome per le curve R i punti O_1 , O_2 , O_3 sono semplici, così a questi corrisponderanno nello spazio (y) altrettanti piani, da contarsi due volte nella Jacobiana delle superficie di 4.^o ordine ora determinate. Invece il punto O è doppio per le curve R , mentre è semplice per le superficie (1); dunque ad O corrisponderà una superficie di 2.^o ordine da contarsi tre volte nella Jacobiana anzidetta. Ne segue che questa Jacobiana, dovendo essere dell'ordine $4(4 - 1) = 12$, sarà appunto composta di tre piani da contarsi due volte e di una superficie quàdrice da contarsi tre volte.

Ora una superficie di STEINER, che è del 4.^o ordine e della 3.^a classe (cioè della classe minima alla quale possa discendere una superficie d'ordine superiore al 2.^o), non può acquistare un nuovo punto doppio (all'infuori delle tre rette doppie), senza decomporsi in due superficie di 2.^o grado, o in un piano ed in una superficie di 3.^o ordine. Nel primo caso avremo due coni quàdrici aventi in comune le tre rette doppie, epperò segantisi lungo una quarta retta: uno dei due coni dovrà passare per la conica fissa, dunque esso sarà il luogo della quarta retta, vale a dire, esso sarà la superficie di 2.^o ordine che fa parte della

Jacobiana. Nel secondo caso, avremo un piano contenente due rette doppie ed una superficie (gobba) di 3.^o grado (passante per la conica semplice), per la quale la terza retta doppia sia la linea nodale e le due prime siano generatrici. Il piano e la superficie di 3.^o grado avranno inoltre in comune una nuova retta (la direttrice semplice della superficie di 3.^o grado), luogo della quale sarà adunque il piano medesimo. Perciò questo piano fa parte della *Jacobiana delle superficie di 4.^o ordine*, ossia, questa Jacobiana è composta: 1.^o dei tre piani determinati dalle rette doppie prese a due a due, ciascuno contato due volte; 2.^o del cono quádrico, contato tre volte, che dal punto triplo Q proietta la conica fissa.

Questo cono quádrico corrisponde, come s'è veduto, al punto O ; donde segue che ai piani passanti per O corrisponderanno i coni quádrici circoscritti al triedro $Q(Q_1Q_2Q_3)$; e alle rette per O le rette per Q .

I tre piani del triedro anzidetto corrispondono analogamente ai punti O_1, O_2, O_3 , donde segue che ai piani passanti verbigrazia per O_1 corrispondono le superficie (gobbe) di 3.^o grado aventi QQ_1 come retta nodale, QQ_2 e QQ_3 come generatrici, e passanti per la conica fissa. E dal considerare l'intersezione di due cotali superficie di 2.^o grado si ricava che alle rette passanti per O_1 corrispondono le rette appoggiate a QQ_1 ed alla conica fissa.

Siccome ai punti O_2, O_3 corrispondono i due piani QQ_1Q_3, QQ_1Q_2 , così ai piani passanti per O_2O_3 corrispondono le superficie di 2.^o grado che contengono le rette QQ_2, QQ_3 e la conica fissa.

Analogamente ai piani per OO_1 corrispondono i piani per QQ_1 ; ai piani per OO_2 i piani per QQ_2 ; ed ai piani per OO_3 i piani per QQ_3 .

Ai piani dello spazio (y) che passano per Q corrispondono in (x) i coni (5); dunque al punto Q dello spazio (y) corrisponde il sistema delle tre rette OO_1, OO_2, OO_3 .

Ai piani

$$a_2y_2 + a_3y_3 + a_4y_4 = 0$$

passanti per Q_1 corrispondono in (x) le superficie

$$(a_2x_3 + a_3x_2)x_1 + a_4x_4(x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

toccate dal piano fisso OO_2O_3 nel punto comune alla retta O_2O_3 ed al piano (2) e passanti per due rette fisse, l'una delle quali è O_2O_3 , mentre l'altra è la traccia del piano OO_2O_3 sul piano (2). Il sistema di queste due rette è adunque ciò che nello spazio (x) corrisponde al punto Q_1 dello spazio (y). Analoghe coppie di rette corrispondono anche a ciascuno dei punti Q_2, Q_3 .

Di qui segue, come s'è già veduto, che ad una retta per Q corrisponde una retta per O ; ed inoltre, che ad una retta per Q_1 corrisponde una conica per O e per O_1 , toccata in O dal piano fisso (2). Ecc.

Ad un piano per QQ_1 corrisponderà una superficie di 2.^o grado che dovrà contenere

tanto le tre rette corrispondenti a Q quanto le due corrispondenti a Q_1 ; e siccome di queste rette ve ne sono quattro in uno stesso piano $x_1 = 0$, così quella superficie si spezza in due piani: il piano $x_1 = 0$ ed un altro piano passante per $O O_1$. Ritroviamo così la proprietà già notata, che ai piani per $Q Q_1$ corrispondono i piani per $O O_1$. Ecc.

Il piano (3) sega la retta $Q Q_1$ nel punto

$$y_2 = y_3 = 0, \quad a_1 y_1 + a_4 y_4 = 0,$$

al quale corrisponde la conica

$$x_1 = 0, \quad a_1 x_2 x_3 + a_4 x_4 (x_1 + x_2 + x_3) = 0.$$

Tutte le coniche analoghe formano un fascio proiettivo alla punteggiata $Q Q_1$, in modo che ai punti

$$\begin{aligned} y_2 = y_3 = y_1 = 0, \\ y_2 = y_3 = y_4 = 0, \\ y_2 = y_3 = y_1 + y_4 = 0, \end{aligned}$$

corrispondono ordinatamente le coniche

$$\begin{aligned} x_2 x_3 = 0, \\ x_4 (x_1 + x_2 + x_3) = 0, \\ x_2 x_3 + x_4 (x_1 + x_2 + x_3) = 0. \end{aligned}$$

In simigliante guisa le punteggiate $Q Q_2$, $Q Q_3$ sono proiettive ai fasci di coniche

$$\begin{aligned} x_2 = 0, \quad a_2 x_3 x_1 + a_4 x_4 (x_1 + x_2 + x_3) = 0, \\ x_3 = 0, \quad a_3 x_1 x_2 + a_4 x_4 (x_1 + x_2 + x_3) = 0, \end{aligned}$$

così che al piano determinato da tre punti risp. appartenenti alle tre punteggiate anzidette corrisponderà una superficie di 2.^o grado contenente le tre coniche dei tre fasci che corrispondono ai tre punti.

Il piano (3) sega la retta $Q_2 Q_3$ nel punto

$$y_1 = y_4 = 0, \quad a_2 y_2 + a_3 y_3 = 0,$$

e la corrispondente superficie (1) è toccata in O_1 dalla retta

$$x_4 = 0, \quad a_2 x_3 + a_3 x_2 = 0.$$

Le rette analoghe formano un fascio proiettivo alla punteggiata $Q_2 Q_3$, in modo che ai punti

$$\begin{aligned} y_1 = y_4 = y_2 = 0, \\ y_1 = y_4 = y_3 = 0, \\ y_1 = y_4 = y_2 + y_3 = 0, \end{aligned}$$

corrispondono le rette

$$\begin{aligned}x_4 &= 0, & x_3 &= 0, \\x_4 &= 0, & x_2 &= 0, \\x_4 &= 0, & x_3 + x_2 &= 0.\end{aligned}$$

Similmente le punteggiate Q_3Q_1 , Q_1Q_2 sono proiettive ai fasci di rette

$$\begin{aligned}x_4 &= 0, & a_3x_1 + a_1x_3 &= 0, \\x_4 &= 0, & a_1x_2 + a_2x_1 &= 0,\end{aligned}$$

in modo che la superficie (1) è toccata risp. in O_1 , O_2 , O_3 da quei raggi dei tre fasci che corrispondono ai punti nei quali il piano (3) incontra i lati del triangolo $Q_1Q_2Q_3$.

Da ultimo si può riconoscere senza difficoltà che la conica

$$y_4 = 0, \quad y_2y_3 + y_3y_1 + y_1y_2 = 0,$$

è punteggiata proiettivamente al fascio di rette incrociate in O e poste nel piano (2), in modo che ai punti Q_1 , Q_2 , Q_3 corrispondono ordinatamente le tre rette

$$\begin{aligned}x_1 &= 0, & x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\x_2 &= 0, & x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\x_3 &= 0, & x_1 + x_2 + x_3 &= 0.\end{aligned}$$

Per fare un'applicazione della trasformazione suesposta, sia proposta una superficie f di 2.^o grado, situata comunque nello spazio (y), e dicasi F la superficie che le corrisponderà, punto per punto, nello spazio (x), in virtù della trasformazione contenuta nelle formole (4) o (6). Ai punti comuni ad F e ad una retta arbitraria dello spazio (x) corrispondono quelli in cui f è incontrata da una qualunque delle coniche S dello spazio (y); donde segue che F è del 4.^o ordine.

Ai punti in cui F è incontrata dalle rette per O corrispondono i punti comuni ad f ed alle rette per Q ; dunque O è un punto doppio per F . Ai punti in cui F è incontrata dalle rette per O_1 corrispondono i punti ne' quali f sega le rette appoggiate a QQ_1 ed alla conica (8); dunque anche O_1 , ed analogamente O_2 e O_3 sono punti doppi per F .

Per riconoscere la natura del punto doppio O , osservo che, siccome al punto O dello spazio (x) corrisponde il cono quàdrico

$$(9) \quad y_2y_3 + y_3y_1 + y_1y_2 = 0$$

che da Q proietta la conica (8), così al punto O di F corrisponderà la curva gobba Γ di 4.^o ordine e 1.^a specie, intersezione di f col cono (9). Ora, ogni retta che da Q vada a un punto di Γ incontra f in un altro punto di Γ medesima; dunque ogni retta che incontri F in

tre punti riuniti in O sega la medesima superficie in un quarto punto, che pur esso cade in O . — La conica (8) incontra f in quattro punti ai quali nello spazio (x) corrispondono quattro rette $r_1 r_2 r_3 r_4$, uscenti da O e poste nel piano (2) che corrisponde alla conica (8). Dunque *il piano (2) contiene tutte le rette tangenti (contatto quadripunto) in O ad F e taglia questa superficie lungo quattro rette $r_1 r_2 r_3 r_4$* . — Ogni piano per O sega F secondo una curva (di 4.^o ordine e 1.^o genere) *che ha in O due punti doppi infinitamente vicini*, colla tangente adagiata nel piano (2); alla quale curva corrisponderà una curva gobba di 4.^o ordine e 1.^a specie, intersezione di f con un cono quádrico circoscritto al triedro $Q(Q_1, Q_2, Q_3)$.

Investighiamo ora la natura dei punti doppi $O_1 O_2 O_3$, per es. del punto O_1 . Siccome al punto O_1 dello spazio (x) corrisponde il piano $Q Q_2 Q_3$, così al punto O_1 di F corrisponderà la conica Γ_1 comune al detto piano e ad f . Ad un piano arbitrariamente condotto per O_1 corrisponde una superficie di 3.^o grado, che, oltre alle rette $Q Q_2, Q Q_3$, ha in comune col piano $Q Q_2 Q_3$ una retta; ed ai punti comuni a questa ed a Γ_1 corrisponderanno quelli che, giacendo simultaneamente in F e nel piano arbitrario, son prossimi ad O_1 . Dunque O_1 è per F un punto conico. La medesima proprietà resta così dimostrata anche pei punti O_2, O_3 .

Le singolarità della superficie F consistono adunque nell'avere tre punti conici O_1, O_2, O_3 ed un punto uniplanare O , tale che tutte le rette tangenti alla superficie in questo punto hanno ivi con essa un contatto quadripunto. Che queste singolarità siano sufficienti a definire la superficie F , si riconosce osservando che l'equazione generale di una superficie di 4.^o ordine, dotata de' quattro punti doppi $O O_1 O_2 O_3$ nel modo or divisato, è

$$(10) \quad a_1 x_2^2 x_3^2 + a_2 x_3^2 x_1^2 + a_3 x_1^2 x_2^2 + a_4 x_1^2 (x_1 + x_2 + x_3)^2 + 2 x_1 x_2 x_3 (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3) \\ + 2 x_4 (x_1 + x_2 + x_3) (c_1 x_2 x_3 + c_2 x_3 x_1 + c_3 x_1 x_2) = 0,$$

la quale, se vi si applicano le formole (6) e dal risultato si separa il fattore

$$y_1^2 y_2^2 y_3^2 (y_2 y_3 + y_3 y_1 + y_1 y_2)^4$$

indipendente dai parametri a, b, c , si trasforma nella seguente

$$(11) \quad a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2 + a_4 y_4^2 + 2 b_1 y_2 y_3 + 2 b_2 y_3 y_1 + 2 b_3 y_1 y_2 \\ + 2 c_1 y_1 y_4 + 2 c_2 y_2 y_4 + 2 c_3 y_3 y_4 = 0$$

equazione di una superficie di 2.^o grado, situata in modo affatto generale nello spazio (y).

Le superficie (10), (11) sono adunque punteggiate proiettivamente; e siccome una superficie di 2.^o grado può sempre essere trasformata punto per punto in un piano, così anche la superficie F definita dalla (10) ammette la proprietà d'essere rappresentabile punto

per punto sopra un piano. È questo il primo esempio di superficie di 4.^o ordine cui compete tale proprietà senza che sia dotata di un punto triplo o di una linea multipla *).

La superficie F contiene:

1. quattro rette, poste nel piano (2) e concorrenti in O ; esse corrispondono ai quattro punti $d_1 d_2 d_3 d_4$, ne' quali f è incontrata dalla conica (8);
2. sei coniche che a due a due giacciono nei piani $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ e corrispondono ai punti $a_1 a'_1$, $a_2 a'_2$, $a_3 a'_3$ nei quali f è attraversata dalle rette QQ_1 , QQ_2 , QQ_3 ; di quelle coniche le prime due sono circoscritte al triangolo OO_2O_3 , le due successive al triangolo OO_3O_1 , e le ultime due al triangolo OO_1O_2 : tutte poi sono tangenti in O al piano (2).

Alle due generatrici rettilinee di f incrociate nel punto a_1 , corrispondono in F due coniche passanti per O e per O_1 . Siccome quelle due generatrici giacciono in uno stesso piano, che è tangente ad f in a_1 , così le due coniche giaceranno in una stessa superficie f_1 di 2.^o grado, del sistema (1), la quale toccherà F lungo quella conica posta nel piano $x_1=0$ che corrisponde al punto a_1 . Analogamente, lungo l'altra conica comune ad F ed al piano $x_1=0$, che corrisponde al punto a'_1 , vi sarà un'altra superficie tangente f'_1 di 2.^o grado, che inoltre segnerà F in due coniche passanti per O ed O_1 e corrispondenti alle due rette di F incrociate in a'_1 . Consideriamo le due superficie $f_1 f'_1$ come componenti un luogo di 4.^o ordine; siccome esso ed F si toccano lungo una sezione piana comune, così s'intersecheranno in una linea dell'8.^o ordine, situata sopra una superficie di 2.^o grado. Dunque le quattro coniche di F , corrispondenti alle quattro rette di f , incrociate in a_1, a'_1 , appartengono ad una stessa superficie di 2.^o grado. Questa però non è che una coppia di piani passanti per la retta OO_1 ; giacchè le tangenti in O_1 alle quattro coniche, dovendo essere generatrici del cono quàdrico che oscula la superficie F nel punto doppio O_1 , non possono giacere tutte e quattro in un medesimo piano. Le quattro coniche sono adunque situate in due piani, i quali evidentemente corrispondono ai piani tangenti ad f e passanti per $a_1 a'_1$.

Analogamente, alle generatrici di f passanti pei punti a_2, a'_2, a_3, a'_3 corrispondono otto coniche di F , quattro delle quali passano per $O O_2$ e giacciono ne' due piani

*) Cfr. le Nachrichten di Gottinga del 3 maggio 1871, pag. 147 [Questo volume, pag. 271]. Questa Nota era già stata presentata, quando il sig. NOETHER per altra via fece conoscere (Nachrichten di Gottinga del 7 giugno 1871) una superficie più generale di 4.^o ordine, che è pur rappresentabile sopra un piano: è la superficie dotata unicamente del punto uniplanare O (nel quale le rette tangenti abbiano colla superficie un contatto quadripunto).

che corrispondono ai piani tangenti ad f e passanti per $a_2a'_2$; mentre le altre quattro hanno in comune i punti $O O_3$ e sono situate ne' due piani corrispondenti ai due che toccano f e passano per $a_3a'_3$.

Al piano dei tre punti $a_1a_2a_3$ corrisponde una superficie del sistema (1), la quale passerà per le tre coniche situate rispettivamente nei piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ e corrispondenti ai tre punti suddetti, epperò segnerà F secondo un'altra conica passante per O . Il piano di questa conica avrà in comune con F una nuova conica tangente alla prima in O ; e siccome passa per O , così esso corrisponde al cono quàdrico che dal punto Q proietta le due coniche comuni ad f e ai piani $a_1a_2a_3$, $a'_1a'_2a'_3$. L'ultima conica ottenuta in F è adunque situata in una stessa superficie del sistema (1) insieme colle tre coniche poste rispettivamente nei piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ e corrispondenti ai punti $a'_1a'_2a'_3$.

Analogamente F sarà segata da altri tre piani, passanti per O , secondo tre paia di coniche corrispondenti a quelle che sono le intersezioni di f colle coppie di piani $a'_1a_2a_3$ e $a_1a'_2a'_3$, $a_1a'_2a_3$ e $a'_1a_2a'_3$, $a_1a_2a'_3$ e $a'_1a'_2a'_3$.

Oltre alle sei superficie del sistema (1) tangenti ad F lungo le sei coniche poste nei piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, ed oltre alle otto superficie del medesimo sistema, ciascuna delle quali passa per tre coniche rispettivamente situate nei detti piani e per una quarta conica il cui piano passa semplicemente per O , sonvi altre superficie di quel sistema che segano F secondo quattro coniche. Infatti, una delle due rette di f passanti per a_1 incontra una delle due passanti per a_2 , e al piano da queste due rette determinato corrisponde una superficie di 2.^o grado segante F secondo le due coniche corrispondenti alle due rette di f e secondo due altre coniche, che corrispondono ai punti a_1 , a_2 . Il numero delle superficie analoghe è evidentemente 24.

Abbiamo così ottenuto $6 + 12 + 8 = 26$ coniche situate nella nostra superficie F ; e si domandi se essa ne può contenere altre? Ad una conica dello spazio (x), la quale non passi per alcuno dei punti $O O_1 O_2 O_3$, corrisponde una curva gobba (razionale) di 4.^o ordine, segante in due punti ciascuna delle rette QQ_1 , QQ_2 , QQ_3 e la conica (8). Affinchè tale curva di 4.^o ordine giaccia in f , è anzitutto necessario che passi per i sei punti a e per due dei punti d ; ma in generale per otto punti di una superficie di 2.^o grado non è possibile di descrivere una curva gobba di 4.^o ordine e 2.^a specie, che debba giacere per intero nella superficie medesima; dunque F non conterrà, in generale, alcuna conica che non passi per alcuno dei punti $O O_1 O_2 O_3$ *).

Ad una conica dello spazio (x) passante semplicemente per O corrisponde una cubica

*) Ciò avverrebbe nel caso particolare in cui si assumesse per f una superficie di 2.^o grado toccata in quattro punti da una superficie Steineriana del sistema (7).

gobba passante per Q , segante in un altro punto ciascuna delle rette QQ_1, QQ_2, QQ_3 e la conica (8). Tale cubica non può trovarsi su f , perchè questa superficie non passa pel punto Q .

Ad una conica dello spazio (x) passante per O_1 corrisponde una cubica gobba incontrante in due punti la retta QQ_1 e la conica (8), ed in un solo punto ciascuna delle rette QQ_2, QQ_3 . Perchè la cubica appartenga ad f , dovrebbe adunque passare per es. pei punti $a_1 a'_1 a_2 a_3 d_1 d_2$: ma questa condizione non basta, perchè per sei punti di una superficie di 2.^o grado non si può, in generale, descrivere una cubica gobba che giaccia per intero sulla superficie.

Finalmente, ad una conica dello spazio (x) passante per $O_2 O_3$ corrisponde una conica avente un punto comune con QQ_2 , uno con QQ_3 e due colla conica (8). Una conica siffatta non può trovarsi in f , perchè un punto a_2 , un punto a_3 e due punti a_1, a'_1 non si trovano in uno stesso piano.

Possiamo dunque concludere che *le sole coniche giacenti in F sono le 26 già ottenute*; 6 delle quali sono situate nei piani $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$; 12 in sei piani passanti a due a due per una delle rette OO_1, OO_2, OO_3 ; e le rimanenti 8 in quattro piani uscenti dal punto O .

Una curva gobba R del sistema (1) incontra la superficie F in due punti diversi da $O O_1 O_2 O_3$, epperò F contiene infinite di tali curve. Ne contiene cioè due serie semplicemente infinite, corrispondenti alle due serie di generatrici rettilinee di f . Due curve della stessa serie non s'incontrano all'infuori dei quattro punti doppi della superficie; ma due curve di serie diverse hanno sempre un altro punto comune e formano insieme la completa intersezione di F con una superficie del sistema (1), la quale tocca F in quel punto. In ogni suo punto, F ammette una così fatta superficie tangente, vale a dire, per ogni punto di F passa una curva dell'una e una curva dell'altra serie. Ciascuna curva di una serie è la base di un fascio di superficie di 2.^o grado, le quali segano inoltre F lungo tutte le curve dell'altra serie.

Di qui consegue che *F si può riguardare generata dal movimento di una curva R , la quale incontri costantemente tre curve fisse R che a due a due non abbiano alcun punto comune all'infuori di $O O_1 O_2 O_3$* . Ed anche, *F è il luogo generato da due fasci proiettivi di superficie di 2.^o grado le cui basi siano due curve R , non aventi punti comuni fuori di $O O_1 O_2 O_3$* .

Ciascuna delle due serie di curve R , situate su F , contiene sei curve spezzantisi in due coniche, e quattro curve composte di una retta e di una cubica gobba: le prime corrispondono alle generatrici di f che passano pei punti a ; le altre alle generatrici uscenti dai punti d .

Una superficie qualsivoglia del sistema (1) sega F lungo una curva razionale dell'8.^o ordine, per la quale $O_1 O_2 O_3$ sono punti doppi, ed O è un punto quadriplo colle tangenti

situate nel piano (2). Tutte le curve analoghe corrispondono alle sezioni piane di f . Queste curve formano su F un sistema triplamente infinito che comprende:

1. Curve che si spezzano in due curve gobbe R (del 4.^o ordine); sono quelle che corrispondono alle generatrici rettilinee di f ;

2. Curve che si spezzano in una retta ed in una curva gobba del 7.^o ordine. Di queste curve vi sono quattro sistemi doppiamente infiniti, corrispondenti alle sezioni piane di f che passano per uno dei punti d ;

3. Curve che si spezzano in una conica ed in una curva gobba del 6.^o ordine. Di queste curve vi sono sei sistemi doppiamente infiniti, corrispondenti alle sezioni piane di f che passano per uno dei punti a ;

4. Curve che si spezzano in due rette ed una curva gobba di 6.^o ordine. Di queste curve vi sono sei sistemi (conjugati a due a due) semplicemente infiniti, che corrispondono alle sezioni di f fatte con piani passanti per due punti d ;

5. Curve che si spezzano in una retta, una conica ed una curva gobba di 5.^o ordine. Di queste curve vi sono 24 sistemi semplicemente infiniti, corrispondenti alle sezioni di f fatte con piani passanti per uno dei punti a e per uno dei punti d ;

6. Curve che si spezzano in due coniche poste in uno stesso piano (uno dei piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$) ed in una curva piana di 4.^o ordine. Questa curva (razionale) giace in un piano passante per una delle rette OO_1 , OO_2 , OO_3 , ed ha tre punti doppi, due dei quali infinitamente vicini in O . Di queste curve si hanno adunque tre sistemi semplicemente infiniti, corrispondenti alle sezioni di f fatte con piani passanti per una delle rette QQ_1 , QQ_2 , QQ_3 ;

7. Curve che si spezzano in due coniche, non poste in uno stesso piano, ed in una curva gobba di 4.^o ordine avente un punto doppio in O colle tangenti nel piano (2) e passante per due punti $O_1 O_2 O_3$. Di queste curve, che corrispondono alle sezioni di f fatte con piani passanti per una delle rette $a_1 a_2$, $a_1 a'_2$, $a_1 a_3$, $a_1 a'_3$, ..., vi sono 12 sistemi semplicemente infiniti.

Oltre a questi sistemi infiniti vi sono:

1. Otto curve che si spezzano in quattro coniche situate in quattro piani differenti: sono quelle che corrispondono alle sezioni $a_1 a_2 a_3$, $a'_1 a_2 a_3$, ...;

2. tre curve che si spezzano ciascuna in quattro coniche poste in due piani, e corrispondono alle sezioni Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 fatte in f dai piani del triedro $Q(Q_1, Q_2, Q_3)$;

3. sei curve che si spezzano in quattro coniche due delle quali coincidono, e corrispondono ai piani tangenti ad f nei punti a ;

4. quattro curve che si spezzano ciascuna in due rette coincidenti e due cubiche gobbe, e corrispondono ai piani tangenti ad f nei punti d ;

5. una curva che si spezza nelle quattro rette di F e nella curva di 4.^o ordine che que-

sta superficie ha in comune col piano $O_1O_2O_3$; essa corrisponde alla sezione fatta in f dal piano $Q_1Q_2Q_3$;

6. quarantotto curve, ciascuna delle quali si spezza in una retta, due coniche in piani diversi ed una cubica gobba: esse corrispondono alle sezioni $a_1a_2d_1, \dots, a_1a_2d_2, \dots, a_1a_3d_1, \dots, a_1a_3d_2, \dots, a_2a_3d_1, \dots, a_2a_3d_2$.

7. dodici curve spezzantisi in due coniche nello stesso piano, una retta ed una cubica piana: anche queste ultime due linee situate in un medesimo piano. Tali curve corrispondono alle sezioni $a_1a'_1d_1, a_1a'_1d_2, \dots, a_3a'_3d_4$.

8. trentasei curve spezzantisi in una conica, due rette ed una curva gobba di 4.^o ordine avente un punto doppio in uno dei punti $O_1O_2O_3$, passante per gli altri due e per O , e toccata in quest'ultimo dal piano (2). Queste curve corrispondono alle sezioni $a_1d_1d_2, a_1d_1d_3, \dots, a'_1d_1d_2, \dots, a'_3d_3d_4$.

Fra le curve gobbe razionali di 8.^o grado risultanti dal segare F colle superficie del sistema (1), meritano speciale menzione anche quelle che sono somministrate dai coni quàdrici circoscritti al triedro $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; esse corrispondono alle sezioni fatte in f coi piani uscenti dal punto Q .

Alle sezioni piane di F (non passanti per alcuno de' punti doppi) corrispondono le curve gobbe di 8.^o ordine (di genere 3.^o tutt'al più) che nascono dal segare F colle superficie Steineriane del sistema (7). Queste curve hanno sei punti doppi a , e inoltre passano tutte pei quattro punti d .

Alle sezioni piane di F passanti per O corrispondono le curve gobbe di 4.^o ordine e 1.^a specie, secondo le quali f è intersecata dai coni quàdrici circoscritti al triedro $Q(Q_1Q_2Q_3)$. Fra queste curve quelle che passano per uno stesso punto d corrispondono alle cubiche piane che risultano dal segare F coi piani passanti per una delle quattro rette di questa superficie: i quattro fasci relativi ai quattro punti d hanno una curva comune Γ , che è l'intersezione di f col cono (9) e rappresenta su f il punto O di F .

Alle sezioni piane di F passanti per uno dei punti $O_1O_2O_3$, per es. per O_1 , corrispondono le curve gobbe di 6.^o ordine (del genere 2 tutt'al più) intersezioni di f colle superficie gobbe di 3.^o grado aventi QQ_1 come retta doppia e passanti per le rette QQ_2 , QQ_3 e per la conica (8). Queste curve hanno due punti doppi a_1, a'_1 e passano inoltre per gli altri punti a e d .

Alle sezioni piane di F passanti per O e per uno de' punti $O_1O_2O_3$, per es. per OO_1 , corrispondono (come già si è veduto) le coniche di f situate nei piani che passano per QQ_1 .

Alle sezioni piane di F passanti per due de' punti doppi $O_1O_2O_3$, per es. per O_2O_3 , corrispondono le curve gobbe di 4.^o ordine e 1.^a specie, intersezioni di f colle superficie di 2.^o grado passanti per la conica (8) e per le due rette QQ_2, QQ_3 : le quali curve passano tutte per gli otto punti $a_2a'_2a_3a'_3d_1d_2d_3d_4$.

Passo ora alla rappresentazione di F sopra un piano. A quest'uopo comincio dal proiettare i punti di f sopra un piano P , mediante raggi uscenti da un punto I della superficie medesima, e assumo la proiezione di un punto di f come immagine del corrispondente punto di F . Siano g_1, g_2 le tracce, su P , delle due generatrici di f uscenti da I , e b, l le proiezioni dei punti a, d . Le sezioni piane di f si proiettano in coniche passanti per $g_1 g_2$; perciò le quaterne di punti $b_2 b'_2 b_3 b'_3, b_3 b'_3 b_1 b'_1, b_1 b'_1 b_2 b'_2$ apparterranno ad altrettante coniche tutte passanti per $g_1 g_2$, e le rette $b'_1 b_1, b'_2 b_2, b'_3 b_3$, come corde comuni a queste tre coniche prese a due a due, concorreranno in un punto i (proiezione della seconda intersezione di f colla retta che da I va al punto Q). Queste medesime tre coniche saranno le immagini dei tre punti O_1, O_2, O_3 , e individueranno la rete L delle coniche proiezioni delle sezioni fatte in f dai piani passanti per Q .

La proiezione dell'intersezione di f col cono (9) sarà una curva D di 4.^o ordine avente punti doppi in $g_1 g_2$ e passante per i sei punti b , la quale dovrà inoltre incontrare ciascuna conica della rete L in due coppie di punti allineati con i , giacchè una coppia siffatta rappresenta due punti di f allineati con Q . Un'altra conica del piano P , passante per $g_1 g_2$, ma non appartenente alla rete L , sia la proiezione della sezione fatta in f dal piano $y_4 = 0$; le ulteriori intersezioni di questa conica colla curva D saranno le proiezioni l dei quattro punti d nei quali f è incontrata dalla conica (8). Allora sarà D l'immagine del punto O di F ; la conica $g_1 g_2 l$ della curva piana $y_4 = 0$; i sei punti b delle sei coniche poste nei piani $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$; i punti l delle quattro rette giacenti nel piano (2).

E le immagini delle sezioni piane di F saranno le proiezioni delle intersezioni di f colle superficie Steineriane del sistema (7); saranno, cioè, curve C di 8.^o ordine con due punti quadrupli $g_1 g_2$, con sei punti doppi b e con quattro punti semplici l .

Questa però non è la rappresentazione d'ordine minimo. Infatti, se mediante una trasformazione di 2.^o grado si passa dal piano P ad un altro piano Π , in modo che alle coniche descritte in P pei punti $g_1 g_2 b'_3$ corrispondano le rette del piano Π ; alle rette di P corrisponderanno coniche passanti per tre punti fissi $\gamma_1 \gamma_2 \beta'$ di Π , e le immagini delle sezioni piane di F si trasformeranno in curve K d'ordine $2 \cdot 8 - 4 - 4 - 2 = 6$, aventi sette punti doppi $\gamma_1 \gamma_2 \beta \beta_1 \beta'_1 \beta_2 \beta'_2$ *) e quattro punti semplici λ fissi **). Le coniche $g_1 g_2 b_3 b'_3 b_1 b'_1, g_1 g_2 b_3 b'_3 b_2 b'_2$ si trasformano in rette $\beta \beta_1 \beta'_1, \beta \beta_2 \beta'_2$, mentre la conica $g_1 g_2 b_1 b'_1 b_2 b'_2$ dà di nuovo una conica $\gamma_1 \gamma_2 \beta_1 \beta'_1 \beta_2 \beta'_2$; perciò dalla rete L nasce la rete Λ di coniche, individuata dalla conica $\gamma_1 \gamma_2 \beta_1 \beta'_1 \beta_2 \beta'_2$ e dalle due coppie di rette $(\beta \beta_1 \beta'_1,$

*) Cioè i due punti $\gamma_1 \gamma_2$ e i punti che nascono da $b_3 b_1 b'_1 b_2 b'_2$ mercè la trasformazione.

**) Nascenti dai punti l mercè la trasformazione.

$\gamma_1\gamma_2$), $(\beta\beta_2\beta'_2, \gamma_1\gamma_2)$. Due coniche qualsivogliano di questa rete si segheranno in due punti allineati col punto fisso β . La curva D si tramuta in una cubica Δ passante pei punti $\gamma_1\gamma_2\beta_1\beta'_1\beta_2\beta'_2\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$ e segante ciascuna conica della rete Λ in due punti $\mu_1\mu_2$ in linea retta con β . I punti λ saranno le intersezioni di Δ con una conica passante per $\gamma_1\gamma_2$ ma non compresa nella rete Λ .

Fra le cubiche descritte pei punti $\gamma_1\gamma_2\beta\beta_1\dots$ vi è evidentemente la terna di rette $(\beta\beta_1\beta'_1, \beta\beta_2\beta'_2, \gamma_1\gamma_2)$, dunque la tangente in β alla cubica Δ incontrerà la medesima curva in un punto allineato con $\gamma_1\gamma_2$.

La rappresentazione d'ordine minimo della superficie F sopra un piano Π si effettuerà adunque come segue. Assumasi in Π una curva Δ di 3.^o ordine, come immagine del punto uniplanare O ; e in essa si fissi il punto β , dal quale conducansi le rette $\beta\beta_1\beta'_1, \beta\beta_2\beta'_2$, immagini di due altri punti doppi, per es. di O_1 e O_2 . Per $\beta_1\beta'_1\beta_2\beta'_2$ descrivasi una conica che seghi di nuovo la cubica in $\gamma_1\gamma_2$, e per $\gamma_1\gamma_2$ un'altra conica le cui intersezioni con Δ siano $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$: potremo assumere la prima di queste coniche come immagine del terzo punto doppio O_3 e i punti λ come rappresentanti le quattro rette comuni ad F e al piano (2).

Ora, per un teorema noto, tutte le curve di 6.^o ordine aventi i punti doppi $\gamma_1\gamma_2\beta\beta_1\beta'_1\beta_2\beta'_2$ e passanti per $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ segano la cubica Δ in un nuovo punto fisso. Ma fra quelle curve vi è manifestamente il luogo formato dalle due rette $\beta\beta_1\beta'_1, \beta\beta_2\beta'_2$ e dalle due coniche $\gamma_1\gamma_2\beta_1\beta'_1\beta_2\beta'_2, \gamma_1\gamma_2\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$; dunque il nuovo punto fisso è λ_4 . Da ciò segue che le curve di 6.^o ordine dotate dei sette punti doppi $\gamma_1\gamma_2\beta\dots$ e passanti per i quattro punti semplici λ formano un sistema lineare *triplamente infinito* Σ ; e siccome due qualunque di esse curve si segano in quattro nuovi punti, così le curve medesime si possono assumere come immagini delle sezioni piane di una superficie Φ di 4.^o ordine. Ora rimane a dimostrare che questa superficie è della stessa natura della proposta F .

Pei sette punti $\gamma_1\gamma_2\beta\dots$ si può descrivere una rete di cubiche, una qualunque delle quali insieme con Δ forma una curva del sistema Σ : tutte le curve analoghe sono le immagini delle sezioni fatte in Φ con tutt'i piani uscenti da uno stesso punto fisso, dunque la cubica Δ rappresenta un punto singolare di Φ . Il qual punto è doppio, giacchè due cubiche arbitrarie della rete sopradetta si segano in due altri punti, il che vuol dire che ogni retta uscente dal punto singolare incontra di nuovo Φ in due punti. Ogni cubica della rete incontra Δ in due nuovi punti, entrambi comuni ad uno stesso fascio di cubiche: dunque ogni piano passante pel punto singolare contiene una ed una sola retta, le cui intersezioni con Φ sono riunite nel detto punto, mentre ogni altra retta uscente da esso incontra Φ in due altri punti. Ciò viene a dire che il punto singolare è uniplanare e che le rette condotte per esso nel piano tangente incontrano ivi la superficie in quattro punti coincidenti.

Dunque la sezione fatta dal piano tangente ha un punto quadruplo, cioè consta di

quattro rette: il che si dimostra anche nel modo seguente. La rete già considerata contiene un fascio di cubiche passanti per λ_1 ; queste cubiche rappresentano non già curve di 4.^o ordine, ma bensì del 3.^o; dunque λ_1 è l'immagine di una retta comune ai piani delle sezioni corrispondenti alle cubiche del fascio. Di questi fasci ve ne sono quattro, ma tutti hanno una curva comune, che è la cubica Δ ; dunque le quattro rette di Φ , rappresentate dai punti λ , giacciono in uno stesso piano, la cui sezione colla superficie ha per immagine la cubica Δ presa due volte.

Vi è una rete di curve di 4.^o ordine aventi un punto doppio in β e passanti per $\gamma_1 \gamma_2$, per gli altri quattro punti β e pei quattro punti λ ; ciascuna di esse insieme colla conica $\gamma_1 \gamma_2 \beta_1 \dots$ costituisce una curva del sistema Σ ; dunque questa conica rappresenta un altro punto singolare di Φ . Che poi questo punto sia doppio, risulta dall'osservare che due curve della rete si segano in due nuovi punti. Ciascuna curva della rete sega la conica $\gamma_1 \gamma_2 \beta_1 \dots$ in due altri punti: ciascuno di questi è comune a tutto un fascio di curve, e i due punti insieme giacciono sopra una sola curva della rete; dunque ogni piano passante pel punto singolare contiene due rette che ivi osculano Φ ; vale a dire, il punto singolare è un punto conico.

Nello stesso modo si dimostra che le rette $\beta\beta_1\beta'_1$, $\beta\beta_2\beta'_2$ rappresentano due altri punti conici di Φ .

Una retta condotta nel piano Π per un punto γ incontra altrove in quattro punti qualsiasi curva del sistema Σ , in due punti la cubica Δ , ed in un punto ciascuna delle linee $\gamma_1 \gamma_2 \beta\beta_1\beta'_1\beta_2\beta'_2$, $\beta\beta_1\beta'_1$, $\beta\beta_2\beta'_2$; dunque le rette per γ_1 e le rette per γ_2 rappresentano due serie di curve gobbe di 4.^o ordine passanti pei tre punti conici e aventi un punto doppio nel punto uniplanare di Φ . Una retta per γ_1 , un'altra per γ_2 , la cubica Δ presa due volte, la conica $\gamma_1 \gamma_2 \beta_1 \dots$ e le rette $\beta\beta_1\beta'_1$, $\beta\beta_2\beta'_2$ insieme costituiscono un luogo del 12.^o ordine pel quale i sette punti $\gamma_1 \gamma_2 \beta \dots$ sono quadrupli, e i quattro punti λ sono doppi, cioè l'immagine dell'intersezione di Φ con una superficie di 2.^o ordine. Dunque due curve gobbe di 4.^o ordine, appartenenti l'una alla prima, l'altra alla seconda delle due serie predette, giacciono insieme in una stessa superficie di 2.^o grado, passante pei quattro punti doppi di Φ ed avente con questa il piano tangente comune nel punto uniplanare.

Da tutto ciò conchiudiamo l'identità della superficie Φ colla F precedentemente considerata.

Se si trasforma proiettivamente il piano Π in un altro piano, facendo corrispondere alle rette di questo le coniche di quello circoscritte al triangolo $\beta\beta_1\beta_2$, le curve del sistema Σ si mutano in altre curve dello stesso ordine, tali però che i punti doppi analoghi a β_1 e β'_1 , e quelli analoghi a β_2 e β'_2 riescono infinitamente vicini. Si ha così la seguente rappresentazione della superficie F .

Nel piano rappresentativo descrivasi una cubica C_3 e in essa si assumano tre punti α, β, γ . Una conica C_2 tangente a C_3 in β e γ la seghi inoltre in g, h ; ed una curva C_4 di 4.^o ordine coi punti doppi $\alpha \beta \gamma$ e passante per g, h , incontri di nuovo C_3 in $\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4$. Se ε è la terza intersezione di C_3 colla retta $\beta\gamma$, la terza intersezione di C_3 con $\alpha\varepsilon$ cadrà sulla conica $gh\alpha\beta\gamma$. Ciò premesso, le immagini delle sezioni piane di F saranno le curve di 6.^o ordine $g^2h^2\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4$, aventi in ciascuno de' punti β, γ due rami toccati da una medesima retta fissa $t\beta, t\gamma$, la quale incontri ivi ogni curva in quattro punti coincidenti: il che equivale a dire che β e γ rappresentano ciascuno due punti doppi infinitamente vicini.

Le immagini dei punti O, O_3, O_1, O_2 sono ora la cubica C_3 , la conica C_2 e i punti β, γ ; e le 26 coniche della superficie vengono rappresentate dai cinque punti $g, h, \alpha, \beta, \gamma$,

dalle dodici rette $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta, g\alpha, h\alpha, g\beta, h\beta, g\gamma, h\gamma, t\beta, t\gamma, gh$,

dalle otto coniche $g\alpha\beta\beta\gamma, g\alpha\beta\gamma\gamma, h\alpha\beta\beta\gamma, h\alpha\beta\gamma\gamma, \alpha\beta\beta\gamma\gamma, gh\alpha\beta\beta, gh\alpha\gamma\gamma, gh\alpha\beta\gamma$ (dove $g\alpha\beta\beta\gamma$ significa la conica passante per $g\alpha\beta\gamma$ e toccata in β dalla retta fissa $t\beta$; ecc.), e

dalla cubica $gh\alpha^2\beta\beta\gamma\gamma$.

I quattro punti δ rappresentano le quattro rette comuni ad F ed al piano

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$