90.

OBSERVATIONS GÉOMÉTRIQUES À PROPOS DE LA NOTE DE Mr. BRIOSCHI "SUR LES TANGENTES DOUBLES D'UNE COURBE DU 4.e ORDRE AVEC UN POINT DOUBLE „. [64]

Mathematische Annalen, Band IV (1871), pp. 99-102.

En supposant que ρ ne soit pas une racine de l'équation (4), mais plutôt un paramètre arbitraire, on déduit des équations (3) et (5) la suivante

$$4k^2(6z^2v-u)=v\left(24k^2z^2+(\mathrm{E}-\rho^2)v+2\rho\theta-4kw\right)+4k^2f^2.$$

Donc, quelque soit ρ, la conique

$$24k^2z^2+(\mathrm{E}-\rho^2)v+2\rho\theta-4kw=0 \tag{6}$$

est tangente à la courbe biquadratique donnée

$$6z^2v-u=0$$

en quatre points, situés par couples dans les deux droites $f=0$. L'équation (6) représente un système de coniques quadritangents: il contient quatre coniques qui se décomposent en deux droites (tangentes doubles), et ces quatre coniques particulières correspondent aux quatre valeurs du paramètre ρ qui satisfont l'équation (4). En effet, le premier membre de celle-ci ne diffère du discriminant de la forme ternaire (6) que par un facteur indépendant de ρ.

L'interprétation géométrique du résultat obtenu par Mr. Brioschi est donc la suivante: « Une courbe homologique-harmonique *) du 4.e ordre avec un point double possède deux systèmes de coniques quadritangentes, qui ont même centre et axe d'ho-

*) C'est-à-dire que la courbe possède un *centre* $x=y=0$ et un *axe* $z=0$ de *homologie harmonique:* propriété géométrique qui correspond à l'absence du terme linéaire en z dans l'équation de la courbe. On sait d'ailleurs que toute courbe hyperelliptique peut être transformée rationnellement en une courbe homologique-harmonique.

mologie harmonique (c'est-à-dire que le point $x=y=0$ est le pole de la droite $z=0$). L'équation de l'un de ces systèmes est (6), où ρ désigne le paramètre; en permutant E avec D, on obtient le second système. Dans chaque système, les couples de droites menées du point double aux points de contact de la courbe donnée avec les coniques quadritangentes forment une involution: ce qui résulte de la relation (5). Chaque système comprend quatre couples de tangents doubles; et les valeurs correspondantes du paramètre sont les racines de l'équation (4). »

En désignant par ω la forme qu'on déduit de θ par la permutation de E avec D, on voit tout de suite que les trois groupes de quatre droites

$$v \,.\, \theta = 0, \qquad v \,.\, \omega = 0, \qquad \omega \,.\, \theta = 0$$

sont harmoniques. Les formes biquadratiques $u=0$, $\omega\,\theta=0$ sont aussi liées *harmoniquement* entre elles, selon la dénomination proposée par Mr. Battaglini *); donc les formes θ, ω sont déterminées par les conditions que les invariants quadratiques

$$(v \,.\, \vartheta)^2, \ (v \,.\, \omega)^2, \ (\vartheta \,.\, \omega)^2, \ (\vartheta\, \omega \,.\, u)^4$$

soient tous égaux à zéro.

On peut aussi présenter le théorème ci-devant sous la forme algébrique qui suit: « On donne deux formes binaires u et v, biquadratique la première, quadratique l'autre; et on demande à satisfaire à l'équation

$$u = v\, \varphi - f^2.$$

Il y a deux systèmes de solutions, dont l'un est contenu dans les formules

$$2\,k\,f = \theta - \rho\, v, \qquad 4\,k^2\, \varphi = (\rho^2 - \mathrm{E})\, v - 2\,\rho\,\theta + 4\,k\,w,$$

ρ étant arbitraire. La permutation de E avec D donne l'autre système ».

On obtient très rapidement le 16 tangentes doubles de la courbe proposée, en lui appliquant le procédé ingénieux que Mr. Geiser **) a indiqué pour la courbe générale du 4.e ordre. En supposant donnée une surface générale du 3.e ordre, si l'on place l'oeil sur une des 27 droites, la projection plane du contour apparent de la surface sera précisement une courbe du 4.e ordre avec un point double. Je conserve pour les 27 droites la notation de Mr. Schläfli, omis seulement l'index 6; si a est la droite choisie pour y placer l'oeil 0, la trace de a sur le plan de projection sera le point double; les traces des deux plans bitangents contenant les coniques touchées par a seront les tangentes au point double; les cinq plans tritangents qui passent par a et le plan tangent en O au-

*) Sulle forme binarie di grado qualunque (Atti della R. Accademia delle Scienze di Napoli, vol. III, pag. 11).

**) Mathem. Annalen, t. 1, p. 129.

ront pour traces les six tangentes issues du point double. Enfin, les 16 tangentes doubles seront les projections des 16 droites

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{23}, c_{24}, c_{25}, c_{34}, c_{35}, c_{45}$$

de la surface, qui ne sont pas rencontrées par a. Or, il suit de la théorie très connue de la surface du 3.e ordre, que ces 16 droites se déterminent linéairement, dès qu'on connait les restantes; par ex. a_1 est la droite commune aux hyperboloïdes $c_1 b_2 b_3$, $c_1 b_2 b_4$ qui ont déjà en commun c_1, b_2 et a.

Si l'on veut que le contour de la surface donne une courbe homologique-harmonique il faut supposer que la surface, au lieu d'être tout-à-fait générale, présente cette singularité que, dans deux des plans tritangentes qui passent par a, les deux droites y contenues se coupent sur a. Nous supposerons que cela arrive pour les plans $a\,b_4\,c_4$, $a\,b_5\,c_5$. Soit donc l'équation de la courbe proposée

$$\text{(I)} \qquad x\,y\,z^2 - (y + \lambda^2 x)(y + \lambda_1^2 x)(y + \lambda_2^2 x)(y + \lambda_3^2 x) = 0,$$

l'équation de la surface J_3 sera

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} & w^2 (y + \lambda^2 x) + 2(f\lambda^2 x + e\,y)\,z\,w + (f^2 \lambda^2 x + e^2 y)\,z^2 \\ & - \lambda^2 (e - f)^2 (y + \lambda_1^2 x)(y + \lambda_2^2 x)(y + \lambda_3^2 x) = 0, \end{aligned}$$

où $w = 0$ est le plan de projection; e, f sont deux constantes arbitraires, inégales. La droite a est $x = y = 0$; les droites (c_1, b_1) (c_2, b_2) (c_3, b_3) sont données par

$$y + \lambda_r^2 x = 0, \quad \lambda(w + f z) \pm \lambda_r (w + e z) = 0$$

$(r = 1, 2, 3)$; les droites (c_4, b_4) par

$$x = 0, \qquad w + e z \pm \lambda (e - f)\,y = 0$$

et les droites (c_5, b_5) par

$$y = 0, \quad w + f z \pm \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 (e - f)\,x = 0.$$

Coupons la surface J_3 par un hyperboloïde

$$\text{(III)} \qquad z(A x + B y) + w(C x + D y) = 0$$

mené par les droites $x = y = 0$, $z = w = 0$, la deuxième desquelles perce J_3 aux trois points $c_1 b_1$, $c_2 b_2$, $c_3 b_3$. En éliminant w entre (II) et (III), on a l'équation de la projection de l'intersection des deux surfaces: équation qui représentera une courbe du 5.e ordre, ayant un point triple en $x = y = 0$ et tangente à la courbe (I) aux points $c_1 b_1$, $c_2 b_2$, $c_3 b_3$ et en quatre autres points allignés avec $x = y = 0$ sur les droites

$$(y + \lambda^2 x)(A x + B y) - (e\,y + f\lambda^2 x)(C x + D y) = 0.$$

Or, en écrivant que l'équation du 5.e degré contient les trois facteurs $y + \lambda_r^2 x$, on a les trois conditions

$$\lambda \Big(A - f\,C - \lambda_r^2\,(B - f\,D)\Big) \pm \lambda_r \Big(A - e\,C - \lambda_r^2\,(B - e\,D)\Big) = 0$$

qui donnent huit systèmes de valeurs pour A : B : C : D correspondant aux combinaisons de signes de λ_1, λ_2, λ_3. La combinaison $(+ + +)$ donne ainsi l'hyperboloïde

$$(w + e\,z)\,\Big((\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\,y - \lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3\,x\Big)$$
$$+ (w + f\,z)\,\lambda\,\Big(y - (\lambda_2\,\lambda_3 + \lambda_3\,\lambda_1 + \lambda_1\,\lambda_2)\,x\Big) = 0$$

lequel, ayant déjà quatre droites a, c_1, c_2, c_3 communes avec J_3, coupera cette surface suivant deux nouvelles droites b, c_{45}, dont les projections sur le plan $w = 0$ seront deux tangentes doubles de la courbe (I), savoir

$$\pm z + (\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\,y - \lambda\,\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3 \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}\right) x = 0.$$

Analoguement, les autres combinaisons de signes $(+ - -)$, $(- + -)$, $(- - +)$, $(- - -)$, $(- + +)$, $(+ - +)$, $(+ + -)$ donnent les autres 7 couples de droites $(a_1\,c_{23})$, $(a_2\,c_{31})$, $(a_3\,c_{12})$, $(a_4\,a_5)$, $(c_{14}\,c_{15})$, $(c_{24}\,c_{25})$, $(c_{34}\,c_{35})$. Les premières quatre couples et les quatre dernières appartiennent respectivement aux deux systèmes de coniques quadritangentes, dont j'ai déjà parlé.

J'observe encore que la section de J_3 par le plan $w = 0$ est la cubique homologique-harmonique

$$(f^2\,\lambda^2\,x + e^2\,y)\,z^2 - \lambda^2\,(e - f)^2\,(y + \lambda_1^2\,x)\,(y + \lambda_2^2\,x)\,(y + \lambda_3^2\,x) = 0$$

ayant un point d'inflexion en $x{=}y{=}0$, et pour tangentes issues de ce point les trois droites $y + \lambda_r^2\,x = 0$. Les trois points de contact de ces tangentes, situés dans $z = 0$, et deux autres points allignés avec $x = y = 0$ sur la droite $f\lambda^2 x + ey = 0$ sont autant de points de tangence entre la cubique et la courbe (1). Les traces des 27 droites de J_3 sont distribuées dans la cubique de la manière suivante: le point $x = y = 0$ est la trace de a; les traces de c_4, b_4 sont dans $x = 0$; celles de c_5, b_5 dans $y = 0$; les traces de b_1 et c_1, de b_2 et c_2, de b_3 et c_3 coïncident deux à deux avec les points de contact des tangentes issues du point d'inflexion. Enfin, les traces des autres 16 droites sont, par couples, allignées avec $x = y = 0$ sur les 8 droites

$$\Big(e\,(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + f\,\lambda\Big)\,y - \Big(e\,\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3 + f\,\lambda\,(\lambda_2\,\lambda_3 + \lambda_3\,\lambda_1 + \lambda_1\,\lambda_2)\Big)\,x = 0$$

correspondant aux combinaisons de signes de λ_1, λ_2, λ_3. Ces 8 droites sont les traces des 8 hyperboloïdes, qui ont tous en commun les droites $x = y = 0$, $z = w = 0$.

Si l'on place l'oeil au point commun à trois droites a, b_4, c_4 de J_3, la projection du contour apparent de la surface sera la cubique homologique-harmonique

$$y(w+ez)^2-\lambda^2(e-f)^2(y+\lambda_1^2 x)(y+\lambda_2^2 x)(y+\lambda_3^2 x)=0.$$

Le point $x=y=0$ est la projection des droites a, b_5, c_5; les droites b_4, c_4 se projètent en deux points sur $x=0$; les trois tangentes issues du point $x=y=0$ représentent les couples c_1 et b_1, c_2 et b_2, c_3 et b_3; et les huit tangentes de la courbe, issues de ces deux points seront les projections des autres seize droites, coïncidant deux à deux:

$$\begin{array}{cccc} a_1 \text{ et } c_{14} \;, & a_2 \text{ et } c_{24} \;, & a_3 \text{ et } c_{34} \;, & c_{45} \text{ et } a_5 \\ b \text{ et } a_4 \;, & c_{23} \text{ et } c_{15} \;, & c_{31} \text{ et } c_{25} \;, & c_{12} \text{ et } c_{35}. \end{array}$$

D'ici, et de la propriété anharmonique des quatre tangentes issues d'un point d'une cubique, on conclut immédiatement l'égalité des rapports anharmoniques des trois formes biquadratiques considérées par Mr. Brioschi.

Milan, avril 1871.