83.

SUGLI INTEGRALI A DIFFERENZIALE ALGEBRICO. [45]

Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie II, tomo X (1870), pp. 3-33.

Scopo di questa Memoria è di presentare sotto forma più geometrica le materie trattate in alcuni paragrafi dell'insigne opera *Theorie der Abelschen Functionen* dei signori CLEBSCH e GORDAN: e cioè la riduzione degli integrali aventi un differenziale algebrico alle forme tipiche delle così dette *tre specie*, ed il teorema abeliano sugli integrali di 3.ª specie.

Riduzione degli integrali abeliani alle tre specie.

1. La forma più generale di un *integrale abeliano* (integrale a differenziale algebrico) è

$$\mathrm{V}=\int \Psi(s, z)\, dz, \tag{1}$$

dove Ψ indica una funzione razionale delle variabili s, z legate fra loro dall'equazione algebrica irreducibile

$$f(s, z)=0, \tag{2}$$

rappresentante una curva piana d'ordine n che si supporrà dotata delle sole singolarità ordinarie, cioè di punti doppi e di punti stazionari *).

Trasformo l'integrale (1) rendendo omogenea l'equazione (2) mercè la sostituzione lineare

$$\begin{aligned} \mu x_1&=a_1+b_1 z+c_1 s,\\ \mu x_2&=a_2+b_2 z+c_2 s,\\ \mu x_3&=a_3+b_3 z+c_3 s, \end{aligned} \tag{3}$$

donde si cava

*) Se la $f(s, z)=0$ non rappresenta una curva reale, col nome di *curva* intenderemo il sistema di tutte le soluzioni di quella equazione.

ed alla tangente di $f=0$ in ξ, le prime polari di y rispetto alle due curve passano entrambe per x, epperò x è un punto del luogo di cui si tratta. Ne segue che questo luogo ha $1+(n-2)+(n-1)=(2n-3)+1$ punti comuni colla retta $\overline{\xi\zeta}$, epperò contiene questa retta per intero. Dunque ha luogo la proprietà enunciata.

25. L'integrale E_ξ è suscettibile anche di un' altra forma. Infatti, se poniamo $\eta=\xi-\varepsilon a$ nella (31), e paragoniamo la (36) moltiplicata per $-\varepsilon m$ colla (29), con riguardo alla (33), si ha:

$$-\varepsilon m E_\xi = \varepsilon\left(\alpha_1 \frac{\partial S_{\xi\zeta}}{\partial \xi_1} + \alpha_2 \frac{\partial S_{\xi\zeta}}{\partial \xi_2} + \alpha_3 \frac{\partial S_{\xi\zeta}}{\partial \xi_3}\right),$$

cioè

$$(38) \qquad -m E_\xi = \Sigma\, \alpha \frac{\partial S_{\xi\zeta}}{\partial \xi}.$$

Facendo la stessa sostituzione nella (30), si otterrà $-m P_1$ come limite di $N_1:\varepsilon$. Infatti, per $\eta=\xi-\varepsilon\alpha$, vista la (33), si ha dalla (30):

$$-\varepsilon m P_1(x^{n-1}) = \Omega_{\xi\zeta}(x^{n-2})\left(\Sigma\pm\xi_1\zeta_2x_3 - \varepsilon\Sigma\pm\alpha_1\zeta_2x_3\right) -$$
$$-\left(\Omega_{\xi\zeta}(x^{n-2}) - \varepsilon\Sigma\alpha\frac{\partial\Omega_{\xi\zeta}(x^{n-2})}{\partial\xi}\right).\Sigma\pm\xi_1\zeta_2x_3,$$

ossia

$$-m P_1(x^{n-1}) = \Sigma\pm\xi_1\zeta_2x_3 \,.\, \Sigma\,\alpha\frac{\partial\Omega_{\xi\zeta}(x^{n-2})}{\partial\xi} - \Omega_{\xi\zeta}(x^{n-2})\,.\,\Sigma\pm\alpha_1\zeta_2x_3.$$

Ma $\Omega_{\xi\zeta}(x^{n-2})$ è una frazione razionale nelle ξ, il cui numeratore ha una dimensione di più del denominatore; perciò

$$\Omega_{\xi\zeta}(x^{n-2}) = \Sigma\,\xi\frac{\partial\Omega_{\xi\zeta}(x^{n-2})}{\partial\xi}$$

e conseguentemente

$$-m P_1(x^{n-1}) = \frac{\partial\Omega_{\xi\zeta}(x^{n-2})}{\partial\xi_1}\left(\alpha_1\Sigma\pm\xi_1\zeta_2x_3 - \xi_1\Sigma\pm\alpha_1\zeta_2x_3\right) + \ldots$$
$$= \frac{\partial\Omega_{\xi\zeta}(x^{\ -2})}{\partial\xi_1}\left(\zeta_1\Sigma\pm\xi_1\alpha_2x_3 - x_1\Sigma\pm\xi_1\alpha_2\zeta_3\right) + \ldots$$
$$= \Sigma\pm\xi_1\alpha_2x_3\,.\,\Sigma\zeta\frac{\partial\Omega_{\xi\zeta}(x^{n-2})}{\partial\xi} - \Sigma\pm\xi_1\alpha_2\zeta_3\,.\,\Sigma x\frac{\partial\Omega_{\xi\zeta}(x^{n-2})}{\partial\xi},$$

ovvero per la (32)

$$(39) \qquad -P_1(x^{n-1}) = f(\xi^{n-1}x)\,.\,\Sigma\zeta\frac{\partial\Omega_{\xi\zeta}(x^{n-2})}{\partial\xi} - f(\xi^{n-1}\zeta)\,.\,\Sigma x\frac{\partial\Omega_{\xi\zeta}(x^{n-2})}{\partial\xi}.$$

Con questa formola si ricava la P_1 dalla $\Omega_{\xi\zeta}$; quindi la (35)' darà la Ξ formata colla P_1 ossia colla $\Omega_{\xi\zeta}$.

26. Il teorema del n.° 20, il quale si riferisce a tre punti ξ, η, ζ della curva fondamentale, si estende subito a un numero qualunque di punti $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$. Indicando col simbolo $(\xi_r\, \xi_s)$ un integrale normale di 3.ª specie (n.° 18) che sia infinito ne' punti ξ_r, ξ_s, avremo, in virtù del teorema citato, ciascuna delle somme

$$\begin{array}{l}
(\xi_1\, \xi_2) + (\xi_2\, \xi_3) + (\xi_3\, \xi_1) \\
(\xi_1\, \xi_3) + (\xi_3\, \xi_4) + (\xi_4\, \xi_1) \\
(\xi_1\, \xi_4) + (\xi_4\, \xi_5) + (\xi_5\, \xi_1) \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
(\xi_1\, \xi_{m-2}) + (\xi_{m-2}\, \xi_{m-1}) + (\xi_{m-1}\, \xi_1) \\
(\xi_1\, \xi_{m-1}) + (\xi_{m-1}\, \xi_m) + (\xi_m\, \xi_1)
\end{array}$$

uguale ad un integrale di 1.ª specie. Epperò la somma di dette somme, vale a dire, avuto riguardo all'identità $(\xi_r\, \xi_s) + (\xi_s\, \xi_r) = 0$, la somma

$$(\xi_1\, \xi_2) + (\xi_2\, \xi_3) + (\xi_3\, \xi_4) + \ldots + (\xi_{m-1}\, \xi_m) + (\xi_m\, \xi_1)$$

è uguale ad un integrale di 1.ª specie.

27. Dallo stesso teorema del n.° 20 si ricava che un aggregato lineare qualsiasi d'integrali di 3.ª specie, i cui punti d'infinito siano m punti dati $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ accoppiati a due a due in tutti i modi possibili, è riducibile a p termini che siano integrali di 1.ª specie e ad $m - 1$ altri termini ciascuno de' quali sia (astrazion fatta da un coefficiente costante) un integrale normale di 3.ª specie i cui punti d'infinito siano uno di quegli m punti fissato ad arbitrio, p. e. ξ_m, ed un altro de' restanti. Infatti, invece del termine del dato aggregato che diviene infinito in ξ_r, ξ_s, potremo sostituire una somma della forma cost.ᵉ $\Big((\xi_m\, \xi_s) - (\xi_m\, \xi_r)\Big)$ purchè si aggiunga un integrale di 1.ª specie. Di qui si può conchiudere che il teorema osservato alla fine del n.° 13 per m punti in linea retta, vale anche per m punti situati comunque nella curva fondamentale.

Teorema di Abel.

28. Siano $\varphi(x^m) = 0$, $\psi(x^m) = 0$ due curve date d'ordine m, e

$$F(x^m) \equiv \varphi(x^m) + \lambda\psi(x^m) = 0$$

una qualunque delle curve del fascio da quelle determinato. Considerando le due equazioni

$$f(x^n)=0\,,\quad \mathrm{F}(x^m)=0$$

come coesistenti è chiaro che le x dedotte da esse, cioè le coordinate dei punti comuni alle due curve, sono funzioni di λ. Ora, posto

$$\frac{d\mathrm{V}}{d\lambda}=\sum_{i=1}^{i=mn}\left\{\frac{\mathrm{Q}}{f(cx^{n-1})}\Sigma\pm c_1x_2\frac{\partial x_3}{\partial\lambda}\right\}_i, \text{ *)}$$

ove la somma sia estesa a tutti gli mn punti comuni alle curve $f=0$, $\mathrm{F}=0$, e dove Q sia una funzione razionale omogenea nelle x, di grado $n-3$, dico che $\frac{d\mathrm{V}}{d\lambda}$ è una funzione razionale di λ. Infatti, si moltiplichino il numeratore e il denominatore dell'espressione soggetta al segno Σ pel determinante Jacobiano delle f, φ, ψ; il prodotto di questo determinante per $\Sigma\pm c_1x_2\frac{\partial x_3}{\partial\lambda}$ è

$$\begin{vmatrix} f(cx^{n-1}) & nf(x^n) & \frac{\partial f}{\partial\lambda} \\ \varphi(cx^{m-1}) & m\varphi(x^m) & \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} \\ \psi(cx^{m-1}) & m\psi(x^m) & \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \end{vmatrix}.$$

Ma per i punti che si considerano è identicamente $f=0$, epperò anche $\frac{\partial f}{\partial\lambda}=0$, e così pure $\mathrm{F}=0$ e $\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial\lambda}=0$, ossia

$$\varphi+\lambda\psi=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}+\lambda\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}+\psi=0,$$

donde

$$\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=\psi^2.$$

Perciò il prodotto dianzi considerato è uguale ad $mf(cx^{n-1}).\,\psi^2(x^m)$, e

$$\frac{d\mathrm{V}}{d\lambda}=m\sum_{i=1}^{i=mn}\left\{\frac{\mathrm{Q}.\,\psi^2}{\Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_3}}\right\}_i.$$

*) Le $\{\ \}$ sono poste a indicare che in luogo delle x generiche si hanno a intendere sostituite le coordinate di un punto comune alle curve $f=0$, $\mathrm{F}=0$.

Questa somma, essendo una funzione simmetrica e razionale delle soluzioni comuni alle equazioni $f=0$, $\mathrm{F}=0$, sarà una funzione razionale de' coefficienti di queste, epperò di λ. Ne risulta che

$$\mathrm{V}=\int d\lambda \sum_{i=1}^{i=mn}\left\{\frac{\mathrm{Q}}{f(cx^{n-1})}\Sigma\pm c_1x_2\frac{\partial x_3}{\partial\lambda}\right\}_i=\sum_{i=1}^{i=mn}\left\{\int\frac{\mathrm{Q}.\ \Sigma\pm c_1x_2\,dx_3}{f(cx^{n-1})}\right\}_i$$

sarà una funzione algebrico-logaritmica di λ e de' coefficienti di f, φ e ψ. In ciò consiste il teorema di ABEL *).

29. Per determinare questa funzione, suppongo che gli integrali de' quali si dee calcolare la somma, siano normali di 3.ª specie e che l'integrazione rispetto a λ debbasi estendere da $\lambda=0$ a $\lambda=\infty$: si consideri cioè la somma degli mn valori di un integrale normale di 3.ª specie, esteso da un punto comune alle curve $f=0$, $\varphi=0$ ad un punto comune alle $f=0$, $\psi=0$. Abbiasi adunque

$$(40)\qquad \mathrm{V}=\sum_{i=1}^{i=mn}\left\{\int\frac{\Omega(x^{n-2})\Sigma\pm c_1x_2dx_3}{\Sigma\pm\xi_1\eta_2x_3.f(cx^{n-1})}\right\}_i$$

$$=\int_0^\infty d\lambda\sum_{i=1}^{i=mn}\left\{\frac{\Omega(x^{n-2})}{\Sigma\pm\xi_1\eta_2x_3.f(cx^{n-1})}\Sigma\pm c_1x_2\frac{\partial x_3}{\partial\lambda}\right\}_i$$

$$=\int_0^\infty d\lambda\sum_{i=1}^{i=mn}\left\{\frac{m\,\Omega(x^{n-2}).\ \psi^2(x^m)}{\Sigma\pm\xi_1\eta_2x_3.\ \Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_3}}\right\}_i.$$

Il prodotto dei due determinanti nel denominatore è

$$\begin{vmatrix} n\,f(x^n) & f(\xi x^{n-1}) & f(\eta x^{n-1})\\ m\varphi(x^m) & \varphi(\xi x^{m-1}) & \varphi(\eta x^{m-1})\\ m\,\psi(x^m) & \psi(\xi x^{m-1}) & \psi(\eta x^{m-1})\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} 0 & f(\xi x^{n-1}) & f(\eta x^{n-1})\\ 0 & \varphi(\xi x^{m-1})+\lambda\psi(\xi x^{m-1}) & \varphi(\eta x^{m-1})+\lambda\psi(\eta x^{m-1})\\ m\psi & \psi(\xi x^{m-1}) & \psi(\eta x^{m-1})\end{vmatrix}=m\psi(x^m).\ \mathrm{R},$$

essendosi posto per brevità **)

---

*) *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendantes* (Mém. prés. par divers savants à l'Acad. de France, t. 7, p. 181).

**) La $\mathrm{R}=0$ è la Jacobiana delle linee $f=0$, $\mathrm{F}=0$, $\Sigma\pm\xi_1\eta_2x_3=0$.

$$R(x^{m+n-2}) = \begin{vmatrix} f(\xi x^{n-1}) & F(\xi x^{m-1}) \\ f(\eta x^{n-1}) & F(\eta x^{m-1}) \end{vmatrix}. \tag{41}$$

Avremo così

$$V = \int_0^\infty d\lambda . \sum_{i=1}^{i=mn} \left\{ \frac{\Omega . \phi}{R} \right\}_i \tag{42}$$

30. Siano ora $X(x^{mn})=0$, $Y(x^{mn})=0$ le equazioni dei gruppi di mn rette che dagli mn punti d'intersezione delle curve $f=0$, $F=0$ vanno risp. ai punti ξ, η. Come si è già dimostrato (n.° 4), si può porre

$$\begin{aligned} X &= Af + BF, \\ Y &= Cf + DF, \end{aligned} \tag{43}$$

dove $A=0$, $B=0$ sono due curve d'ordine $n(m-1)$, $m(n-1)$, aventi un punto $(m-1)(n-1)$-plo in ξ; e $C=0$, $D=0$ sono due curve d'ordine $n(m-1)$, $m(n-1)$, aventi un punto $(m-1)(n-1)$-plo in η.

I due gruppi di mn rette, $X=0$, $Y=0$, determinano un fascio di curve d'ordine mn

$$X + \mu Y = 0,$$

ossia

$$f.(A+\mu C) + F.(B+\mu D) = 0,$$

che è projettivo ai due fasci

$$\begin{aligned} A+\mu C &= 0 \quad \text{d'ordine } n(m-1), \\ B+\mu D &= 0 \quad \text{d'ordine } m(n-1). \end{aligned}$$

Di questi tre fasci il 1.° ed il 2.° generano il luogo

$$AY - CX = 0 \quad \text{ossia} \quad F.\Delta = 0$$

composto della curva $F(x^m)=0$ e della curva

$$\Delta(x^{2mn-m-n}) \equiv AD - BC = 0 \tag{44}$$

d'ordine $2mn-m-n$, per la quale i punti ξ, η sono entrambi multipli secondo $(m-1)(n-1)$. Il 1.° ed il 3.° fascio generano il luogo

$$DX - BY = 0 \quad \text{ossia} \quad f.\Delta = 0$$

composto delle due curve $f=0$, $\Delta=0$. Da ultimo, il 2.° ed il 3.° fascio generano la curva $\Delta=0$.

I punti-base del 1.° fascio devono essere tutti nel luogo $F.\Delta=0$ ed anche tutti nel luogo $f.\Delta=0$; donde segue che tutte le intersezioni delle rette $X=0$ colle rette $Y=0$, che non sono comuni alle curve $f=0$, $F=0$, appartengono alla curva $\Delta=0$.

La Jacobiana delle linee

$$X=0,\ Y=0,\ \Sigma\pm\xi_1\eta_2x_3=0$$

è

$$\begin{vmatrix} \xi_2\eta_3-\xi_3\eta_2 & \frac{\partial X}{\partial x_1} & \frac{\partial Y}{\partial x_1} \\ \xi_3\eta_1-\xi_1\eta_3 & \frac{\partial X}{\partial x_2} & \frac{\partial Y}{\partial x_2} \\ \xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1 & \frac{\partial X}{\partial x_3} & \frac{\partial Y}{\partial x_3} \end{vmatrix}=0,$$

ossia

$$\begin{vmatrix} X(\xi x^{mn-1}) & Y(\xi x^{mn-1}) \\ X(\eta x^{mn-1}) & Y(\eta x^{mn-1}) \end{vmatrix}=0.$$

Nel 1.° membro di quest'equazione pongo le coordinate dell' i^{mo} punto d'intersezione delle curve $f=0$, $F=0$. Per questo punto è, in virtù delle (43):

$$\begin{aligned} \{X(\xi x^{mn-1})\} &= \{Af(\xi x^{n-1})+BF(\xi x^{m-1})\}, \\ \{X(\eta x^{mn-1})\} &= \{Af(\eta x^{n-1})+BF(\eta x^{m-1})\}, \\ \{Y(\xi x^{mn-1})\} &= \{Cf(\xi x^{n-1})+DF(\xi x^{m-1})\}, \\ \{Y(\eta x^{mn-1})\} &= \{Cf(\eta x^{\ -1})+DF(\eta x^{m-1})\}, \end{aligned}$$

onde pel detto punto la Jacobiana ha il valore

$$\left\{\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} f(\xi x^{n-1}) & F(\xi x^{m-1}) \\ f(\eta x^{n-1}) & F(\eta x^{m-1}) \end{vmatrix}\right\},$$

ossia, per le (41), (44), $\{\Delta.R\}$. Quindi, osservando essere identicamente

$$X(\xi x^{mn-1})=0,\quad Y(\eta x^{mn-1})=0,$$

perchè i luoghi $X=0$, $Y=0$ passano mn volte risp. pei punti ξ, η, avremo

$$\{X(\eta x^{mn-1}).\ Y(\xi x^{mn-1})\}=-\{\Delta.R\}. \tag{45}$$

31. Sia $M=0$ una curva d'ordine $mn-2$, con $(m-1)(n-1)$ rami incrociati nel punto ξ. Disponendo delle

$$\frac{(mn-2)(mn+1)}{2}-\frac{(m-1)(n-1)\big((m-1)(n-1)+1\big)}{2}+1$$

costanti omogenee arbitrarie in M, determino una curva d'ordine $2(mn-1)$

$$\Delta\Omega\phi - YM \equiv T = 0$$

(nel fascio individuato dai luoghi $\Delta\Omega\phi=0$, $YM=0$), la quale abbia $mn-1$ rami incrociati in ξ; così che per la curva $T=0$ i punti ξ, η sono multipli risp. secondo $mn-1$, $(m-1)(n-1)$.

Sia ora $L=0$ un'altra curva d'ordine $mn-2$, con $(m-1)(n-1)$ rami passanti pel punto η; e, come sopra, dispongo delle sue costanti arbitrarie in modo da determinare una curva d'ordine $2(mn-1)$

$$T - XL \equiv U = 0$$

(nel fascio individuato dai luoghi $T=0$, $XL=0$), la quale passi $mn-1$ volte per η: così che per la curva $U=0$ i punti ξ, η saranno entrambi multipli secondo $mn-1$. Allora si avrà

$$\Delta\Omega\phi = XL + YM + U, \tag{46}$$

donde segue che le coordinate di un punto comune alle curve $f=0$, $F=0$, annullando X e Y, rendono

$$\{\Delta\Omega\phi\} = \{U\}, \tag{47}$$

mentre le coordinate di un punto comune ai tre luoghi $X=0$, $Y=0$, $\Delta=0$, annulleranno anche U.

Ora U si può esprimere come aggregato lineare di mn prodotti, ciascuno de' quali contenga tutt' i fattori lineari di X e di Y, meno due rappresentanti le rette che da ξ e da η vanno ad un punto comune ad $f=0$, $F=0$. Tale aggregato lineare rappresenta in generale una curva d'ordine $2(mn-1)$, che ha $mn-1$ rami incrociati in ciascuno dei punti ξ, η e passa per gli m^2n^2-mn punti semplici, comuni ai luoghi $X=0$, $Y=0$, $\Delta=0$, $U=0$. Le $mn-1$ condizioni arbitrarie, alle quali può ancora soddisfare questo aggregato sono appunto in numero uguale a quelle che, insieme coi due punti $(mn-1)$-pli e cogli m^2n^2-mn punti semplici, individuano $U=0$.

Indicando con $x^{(i)}$ l' i^{mo} punto d'intersezione delle curve $f=0$, $F=0$, avremo dunque

$$U = XY \sum_{i=1}^{i=mn} \frac{k_i}{\Sigma \pm \xi_1 x_2^{(i)} x_3 \,.\, \Sigma \pm \eta_1 x_2^{(i)} x_3}. \tag{48}$$

Per determinare il coefficiente k_i pongo, nell'equazione precedente, $x=x^{(i)}$. Supposto

$$\begin{aligned} X &= X' \,\Sigma \pm \xi_1 x_2^{(i)} x_3 \,, \\ Y &= Y' \,\Sigma \pm \eta_1 x_2^{(i)} x_3 \,, \end{aligned} \tag{49}$$

ne verrà

$$k_i = \left\{ \frac{U}{X'Y'} \right\}_i.$$

Le (49) poi danno

$$\left\{ X(\eta x^{mn-1}) \right\} = -\left\{ X'\Sigma \pm \xi_1 \eta_2 x_3 \right\},$$
$$\left\{ Y(\xi x^{mn-1}) \right\} = \left\{ Y'\Sigma \pm \xi_1 \eta_2 x_3 \right\},$$

dunque

$$k_i = -\left\{ \frac{U(\Sigma \pm \xi_1 \eta_2 x_3)^2}{X(\eta x^{mn-1}) \,.\, Y(\xi x^{mn-1})} \right\}_i,$$

ossia, avuto riguardo alle (47) (45),

$$k_i = \left\{ \frac{\Omega \phi (\Sigma \pm \xi_1 \eta_2 x_3)^2}{R} \right\}_i;$$

epperò la (48) diviene

$$U = XY \sum_{i=1}^{i=mn} \left\{ \frac{\Omega \phi (\Sigma \pm \xi_1 \eta_2 x_3)^2}{R} \right\}_i \frac{1}{\Sigma \pm \xi_1 x_2^{(i)} x_3 \,.\, \Sigma \pm \eta_1 x_2^{(i)} x_3}.$$

Sostituendo poi questa espressione di U nella (46) si ha

$$\frac{\Delta \Omega \phi}{XY} = \frac{M}{X} + \frac{L}{Y} + \sum_{i=1}^{i=mn} \left\{ \frac{\Omega \phi (\Sigma \pm \xi_1 \eta_2 x_3)^2}{R} \right\}_i \frac{1}{\Sigma \pm \xi_1 x_2^{(i)} x_3 \,.\, \Sigma \pm \eta_1 x_2^{(i)} x_3}. \tag{50}$$

In questa identità pongo $x = \mu\xi + \nu\eta$, cioè alle coordinate generiche sostituisco quelle di un punto qualunque della retta $\overline{\xi\eta}$. Siccome questa retta incontra il luogo $X = 0$ nel solo punto ξ (che corrisponde a $\nu = 0$) ed il luogo $Y = 0$ nel solo punto η (che corrisponde a $\mu = 0$), così quella sostituzione darà

$$[X] = \nu^{mn} \,.\, X_0, \quad [Y] = \mu^{mn} \,.\, Y_0,$$

ove le [ ] simboleggiano la sostituzione $x = \mu\xi + \nu\eta$, ed X_0, Y_0 sono costanti, indipendenti da μ e ν. Poi, essendo il punto ξ multiplo secondo il numero $(m-1)(n-1)$ per la curva $M = 0$, e così del pari il punto η per la curva $L = 0$, si avrà

$$[M] = \nu^{(m-1)(n-1)} \,.\, M_0,$$
$$[L] = \mu^{(m-1)(n-1)} \,.\, L_0,$$

ove L_0, M_0 sono funzioni intere omogenee in μ, ν, del grado $m + n - 3$.

Da ultimo, la stessa sostituzione dà

$$[\Sigma \pm \xi_1 x_2^{(i)} x_3] = -\nu\, \Sigma \pm \xi_1 \eta_2 x_3^{(i)},$$
$$[\Sigma \pm \eta_1 x_2^{(i)} x_3] = \mu\, \Sigma \pm \xi_1 \eta_2 x_3^{(i)},$$

e a cagione delle equazioni analoghe alle (19), (20), delle quali si servono i signori CLEBSCH e GORDAN *) per comporre la Ω :

$$\mu\nu[\Omega]=[f].$$

Perciò il risultato della sostituzione nella (50) è

$$\frac{1}{\mu\nu}\left[\frac{\Delta f\phi}{X\,Y}\right]=\frac{M_0}{\nu^{m+n-1}X_0}+\frac{L_0}{\mu^{m+n-1}Y_0}-\frac{1}{\mu\nu}\sum_{i=1}^{i=mn}\left\{\frac{\Omega\,\phi}{R}\right\}_i.$$

Delle tre parti costituenti il 2.° membro di questa identità, la 1.ª è intera rispetto a μ, la 2.ª è intera rispetto a ν, e la 3.ª è il prodotto di $\frac{1}{\mu\nu}$ per una quantità indipendente da μ e ν. Dunque sarà

$$(51)\qquad -\sum_{i=1}^{i=mn}\left\{\frac{\Omega\,\phi}{R}\right\}_i = \text{al coefficiente di } (\mu\nu)^0 \text{ nell'espressione } \left[\frac{\Delta f\phi}{X\,Y}\right],$$

ossia nell'espressione

$$\left[\frac{D\,\phi}{Y}\right]-\left[\frac{B\,\phi}{X}\right],$$

perchè dalle (43) si cava

$$\Delta f = DX - BY.$$

Le frazioni $\frac{D\phi}{Y}$, $\frac{B\phi}{X}$ hanno la dimensione 0, e, ponendovi $x=\mu\xi+\nu\eta$, la prima è intera rispetto a ν, la seconda è intera rispetto a μ; dunque il coefficiente di $(\mu\nu)^0$ in $\left[\frac{D\phi}{Y}-\frac{B\phi}{X}\right]$ sarà uguale al valore della prima frazione, fattovi prima $x=\mu\xi+\nu\eta$ e poi $\nu=0$, meno il valore della seconda frazione, fattovi prima $x=\mu\xi+\nu\eta$ e poi $\mu=0$; cioè sarà uguale a

$$\left(\frac{D\phi}{Y}\right)_{x=\xi}-\left(\frac{B\phi}{X}\right)_{x=\eta}.$$

Ora, siccome i punti ξ, η sono nella curva $f=0$, così dalle (43) si ha

$$X(\eta)=B(\eta).F(\eta),$$
$$Y(\xi)=D(\xi).F(\xi).$$

Dunque la (51) diviene

$$\sum_{i=1}^{i=mn}\left\{\frac{\Omega\,\phi}{R}\right\}_i=\frac{\phi(\eta)}{F(\eta)}-\frac{\phi(\xi)}{F(\xi)},$$

*) Op. cit. p. 23.

epperò dalla (42)

$$V=\int_0^\infty d\lambda\left(\frac{\psi(\eta)}{F(\eta)}-\frac{\psi(\xi)}{F(\xi)}\right).$$

E siccome $F=\varphi+\lambda\psi$, così, vista la (40), avremo finalmente

$$\sum_{i=1}^{i=mn}\left\{\int\frac{\Omega(x^{n-2})\,.\,\Sigma\pm c_1x_2dx_3}{\Sigma\pm\xi_1\eta_2x_3\,.\,f(cx^{n-1})}\right\}_i=\log\frac{\psi(\eta)\,.\,\varphi(\xi)}{\varphi(\eta)\,.\,\psi(\xi)}, \tag{52}$$

formola esprimente il teorema abeliano per gl'integrali normali di 3ª specie.

Si può osservare che $\frac{\psi(\eta)\,.\,\varphi(\xi)}{\varphi(\eta)\,.\,\psi(\xi)}$ è il rapporto anarmonico di quattro curve del fascio $\varphi+\lambda\psi=0$, cioè delle curve corrispondenti a $\lambda=0$, $\lambda=\infty$, $\lambda=-\frac{\varphi(\xi)}{\psi(\xi)}$, $\lambda=-\frac{\varphi(\eta)}{\psi(\eta)}$, delle quali le ultime due sono quelle che passano risp. pei punti ξ, η. Se questi due punti fossero situati in una sola e medesima curva del fascio, cioè se fosse

$$\frac{\varphi(\eta)}{\psi(\eta)}=\frac{\varphi(\xi)}{\psi(\xi)},$$

il detto rapporto anarmonico sarebbe $=1$, epperò il 2° membro della (52) si ridurrebbe a zero.