GRUNDZÜGE

EINER

ALLGEMEINEN THEORIE

DER

OBERFLÄCHEN

IN

SYNTHETISCHER BEHANDLUNG.

VON

DR. LUDWIG CREMONA,
PROFESSOR DER HÖHEREN GEOMETRIE AN DER KÖNIGL. POLYTECHNISCHEN SCHULE ZU MAILAND.

UNTER MITWIRKUNG DES VERFASSERS INS DEUTSCHE ÜBERTRAGEN

VON

MAXIMILIAN CURTZE,
ORDENTLICHEM LEHRER AM GYMNASIUM ZU THORN.

AUTORISIERTE AUSGABE.

BERLIN 1870.
S. CALVARY & COMP.
OBERWASSER-STRASSE 11.

85.

GRUNDZUGE EINER ALLGEMEINEN THEORIE DER OBERFLÄCHEN IN SYNTHETISCHER BEHANDLUNG. [51]

Hochverehrtester Herr Professor!

Als Sie mir vor fast drei Jahren als Geschenk des Herrn Verfassers die erste Abtheilung des Werkes übersandten, das ich in deutschem Gewande Ihnen darzubringen mir erlaube, sprachen Sie in der begleitenden Zuschrift gegen mich den Wunsch einer Uebersetzung aus, den ich hierdurch verwirklicht habe. Ihr Rath kam meiner Neigung entgegen, der Herr Verfasser gab mit liebenswürdiger Bereitwilligkeit seine Einwilligung zur Uebersetzung und verschaffte mir auch die Zustimmung der ACCADEMIA DELLE SCIENZE DELL'ISTITUTO DI BOLOGNA zu diesem Unternehmen, in deren *Memorie* (II^a Serie, T. 6.°, p. 91-136; T. 7.°, p. 19-78) das italiänische Original zunächst erschienen ist. Der Titel desselben lautet in der Separatausgabe «*Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, di LUIGI CREMONA Professore presso il R. Istituto Tecnico Superiore di Milano. Si vende presso il Tipografo FRANCESCO ZANETTI, Milano, via del Senato, 26.» Dasselbe bildet die Fortsetzung zu dem früher erschienenen Werke desselben Verfassers «*Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, pel DR. LUIGI CREMONA, professore di Geometria Superiore nella R. Università di Bologna. Bologna, Tipi Gamberini e Parmeggiani, 1862». Jener gelehrten Körperschaft und dem Herrn Verfasser erlaube ich mir bei dieser Gelegenheit für ihre gütige Erlaubniss meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

Mein verehrter Freund, Herr Professor CREMONA, ging aber noch weiter. Er hat dem Original eine grössere Zahl handschriftlicher Zusätze beigefügt, die im Vereine mit dem dritten Theile, der ebenfalls im Originale nicht vorhanden ist, der Uebersetzung in Bezug auf Vollständigkeit der Untersuchungen wohl einigen Vorzug vor jenem geben, wenn es auch unmöglich sein dürfte, in der Uebertragung den glänzenden, gefälligen Stil des Originals zu erreichen.

Das letzte Capitel des zweiten Theiles und der ganze dritte Theil sind die Uebersetzung der Capitel IV-XI der grossen Abhandlung des Herrn Verfassers über die Flächen dritter Ordnung, welcher 1866 die Hälfte des Steinerschen Preises durch die Berliner Akademie zuerkannt wurde *), und die in den ersten beiden Heften des 68. Bandes des «Journals für die reine und angewandte Mathematik» unter dem Titel erschienen ist: «*Mémoire de Géometrie pure sur les surfaces du troisième ordre.* (Par L. CREMONA à Milan)». Die ersten drei Capitel dieser Abhand-

*) Die andere Hälfte wurde Herrn Dr. RUDOLF STURM zuerkannt, dessen Werk, höchst instructiv und reich an Resultaten, unter dem Titel veröffentlicht ist: *Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung*, Leipzig 1867.

lung kann man als einen kurzen, nur das für die cubischen Flächen Nöthige zusammenfassenden Auszug aus dem italiänischen Werke ansehen.

Dass mir vergönnt war, diese wichtige Abhandlung meiner Uebersetzung einverleiben zu dürfen, verdanke ich zunächst dem Herrn Verfasser, der mir die Erlaubniss zu dieser Arbeit von dem Herausgeber des *Crelle-Borchardtschen Journals* Herrn Professor BORCHARDT und dem Verleger desselben, Herrn Buchhändler REIMER in Berlin erwirkte. Beide Herren haben dazu ihre freundliche Einwilligung bereitwilligst ertheilt, wofür ich ihnen hierdurch meinen verbindlichsten Dank auszusprechen nicht unterlassen kann.

Um Ihnen einen schnellen Ueberblick über den Umfang der Zusätze zu geben, durch welche die deutsche Ausgabe gegen das italiänische Original erweitert ist, erlaube ich mir hier eine Gegenüberstellung der Nummern oder Paragraphen des Originals und der Uebersetzung folgen zu lassen.

ORIGINAL:		UEBERSETZUNG:
N.o 1–44	=	N.o 1–44
———	. . . .	N.o 45–47 (Neu).
N.o 45–57	=	N.o 48–60.
N.o 61 *)–76	=	N.o 61–76.
———	. . . .	N.o 77–82 (Neu).
N.o 77–90	=	N.o 83–96.
———	. . . .	N.o 97–112 (Neu)
N.o 91–95	=	N.o 113–117.
———	. . . .	N.o 118–119 (Neu).
N.o 96–116	=	N.o 120–140
———	. . . .	N.o 141 (Neu).
N.o 117	=	N.o 142.
———	. . . .	N.o 143 (Neu).
N.o 118–131	=	N.o 144–157.
———	. . . .	N.o 158–289 (Neu). [52]

Herr Professor CREMONA hat die weitere Freundlichkeit gehabt, auf meine Bitte die Probeabzüge einer genauen Correctur zu unterziehen, damit dadurch etwaige Missverständnisse meinerseits vermieden würden. Welcher Dienst der Uebersetzung dadurch geleistet ist, kann nur ich hinreichend würdigen.

Was die Uebersetzung selbst anbetrifft, so habe ich mich streng an das Original gehalten, ich habe nur mit Billigung des Herrn Verfassers die Bezeichnung durch das ganze Werk in der Art einheitlich gemacht, dass ich Puncte durch kleine deutsche Buchstaben, Curven durch dergleichen lateinische, Flächen durch grosse lateinische Buchstaben bezeichnete. Zahlenwerthe, also auch die Zahlen für die Singularitäten der Curven und Flächen, sind durch griechische Typen gegeben, Abkürzungssymbole wie Summenzeichen u. dgl., durch grosse deutsche Buchstaben.

. . . .

Thorn den 1. September 1869. M. CURTZE.

*) Die Nummern 58-60 fehlen im Originale.

ERSTER THEIL

. . . .

Capitel VI.

Lineare Flächensysteme. [53]

. . . .

45. Ein Ebenennetz besteht aus allen Ebenen, welche durch ein und denselben Punct (*Mittelpunct*) gehen. *Strahlen* des Netzes heissen die Geraden die durch den Mittelpunct gehen.

Zwei Ebenennetze heissen *reciprok*, wenn die Ebenen des einen den Strahlen des andern einzeln entsprechen, in der Art, dass den Ebenen des einen Netzes, die ein Büschel bilden, das heisst, die durch ein und denselben Strahl gehen, im andern Netze die Strahlen eines Büschels entsprechen, das heisst die Strahlen, die in ein und derselben Ebene durch denselben Punct gehen. Das Ebenenbüschel und das entsprechende Strahlenbüschel sind projectivisch.

Ebene Punctreihe ist der Complex aller an Zahl zweimal unendlicher Puncte einer Ebene. *Strahlen* einer ebenen Punctreihe sind die Geraden, die sie enthält.

Zwei ebene Punctreihen heissen *reciprok*, wenn den Puncten der einen die Strahlen der andern in der Art entsprechen, dass den Puncten der einen Ebene, die eine gerade Punctreihe bilden, das heisst sämmtlich auf einem Strahle liegen, in der andern Ebene die Strahlen eines Büschels, das heisst, die Strahlen entsprechen, die sich in einem Puncte kreuzen. Die gerade Punctreihe und das entsprechende Strahlenbüschel sind projectivisch.

46. Gegeben zwei reciproke Ebenennetze deren Mittelpuncte $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ sind. Man verlangt den Ort P der Puncte, in welchen die Strahlen des ersten Netzes die entsprechenden Ebenen des zweiten Netzes schneiden. Eine Ebene A die beliebig durch $\mathfrak{s}$ gelegt ist, enthält ein Strahlenbüschel des ersten Netzes und schneidet die entsprechenden Ebenen des Netzes ($\mathfrak{s}_1$) in einem zweiten Strahlenbüschel, dessen Mittelpunct der Punct $\mathfrak{a}$ ist, in welchem die Ebene A von dem Strahle a_1 getroffen wird, der ihr im Netze ($\mathfrak{s}_1$) entspricht. Da beide Strah-

lenbüschel projectivisch sind, so erzeugen sie einen Kegelschnitt, der durch $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{a}$ geht, das heisst, jede beliebige Ebene durch $\mathfrak{s}$ schneidet P in einem Kegelschnitte. Da der Punct $\mathfrak{a}$ auf dem Kegelschnitte liegt, so geht die Ebene A_1, welche dem Strahle $\mathfrak{s}\mathfrak{a} \equiv a$ entspricht, durch $\mathfrak{a}$; dieser Punct ist aber auch der Durchschnitt der Ebene A mit dem Strahle $\mathfrak{s}_1\mathfrak{a} \equiv a_1$, und folglich ist die Fläche P auch der Ort der Puncte, in denen die Strahlen des zweiten Netzes die entsprechenden Ebenen des ersten treffen. Man kann daher in derselben Art beweisen, dass P auch von jeder Ebene, die durch $\mathfrak{s}_1$ geht, in einem Kegelschnitte getroffen wird. Die Fläche kann nicht mehr als zwei Puncte mit einer beliebigen Geraden g gemein haben. Denn der Kegelschnitt, welcher P und der Ebene $\mathfrak{s}g$ gemein ist, schneidet g nur in zwei Puncten. Folglich ist P eine Fläche zweiter Ordnung.

Ein Strahl g des ersten Netzes trifft P ausser in $\mathfrak{s}$ noch in einem zweiten Puncte, dem Durchschnittspuncte von g mit der entsprechenden Ebene G_1 des zweiten Netzes. Dieser zweite Punct ist dem Puncte $\mathfrak{s}$ unendlich nahe, wenn G_1 durch $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1$ geht, folglich entspricht dem Strahle $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1$ des zweiten Netzes die Tangentialebene von P in $\mathfrak{s}$, und dem analog entspricht die Tangentialebene in $\mathfrak{s}_1$ dem Strahle $\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}$ des ersten Netzes.

Es sei S die Tangentialebene in $\mathfrak{s}$. Dann bilden die Strahlen, die in dieser Ebene durch $\mathfrak{s}$ gehen, ein Büschel und entsprechen den Ebenen, die durch $\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}$ gehen. Diese schneiden S in Geraden, die ein Büschel bilden. Die Büschel sind projectivisch und haben entweder zwei reelle verschiedene Strahlen gemein, oder zwei zusammenfallende gemeinsame Strahlen, oder keine zusammenfallende Strahlen, oder es fallen endlich alle Strahlen zusammen. Im ersten Falle ist die Fläche windschief, im zweiten ist sie ein Kegel, im dritten ist sie eine Fläche mit elliptischen Puncten (25). Im letzten Falle besteht die Fläche P aus der Ebene S und einer zweiten Ebene. *)

47. Umgekehrt beweist man leicht, dass jede beliebige gegebene Fläche zweiter Ordnung auch auf unendlich verschiedene Arten mittelst zweier reciproker Ebenennetze erzeugt werden kann, deren Mittelpuncte zwei beliebig auf ihr angenommene Puncte sind. Und hieraus ergibt sich die Construction einer Quadrifläche von der neun Puncte gegeben sind. **)

Analog kann man den Satz aussprechen. Sind zwei ebene Punctreihen reciprok, so ist die Enveloppe der Ebenen, die durch einen beliebigen Punct der einen Ebene und den entsprechenden Strahl der anderen Ebene bestimmt werden, eine Oberfläche zweiter Classe. Eine Fläche zweiter Classe kann umgekehrt immer auf unendlich verschiedene Arten mit-

*) SEYDEWITZ, *Konstruktion und Klassifikation der Flächen des zweiten Grades mittelst projektivischer Gebilde* (Grunert's Archiv für Math. und Phys. Bd. 9, S. 187). — Man vergleiche auch REYE, *Geometrie der Lage* (Hannover; 1868) 2. Abth. S. 26.

**) SCHROETER, *Problematis geometrici ad superficiem secundi ordinis per data puncta construendam spectantis solutio nova* (Vratislaviae; 1862).

telst zwei beliebiger von ihren Tangentialebenen erzeugt werden, die reciproke ebene Punctreihen sind.

. . . .

ZWEITER THEIL

Capitel I.

Polarflächen in Bezug auf eine Fläche beliebiger Ordnung. [54]

. . . .

77. Es sei o ein gegebener Pol, P eine beliebige Ebene, a einer der Puncte, in denen die Fundamentalfläche F_ν von dem Strahle geschnitten wird, welcher von o nach dem Puncte p von P geht, endlich a' derjenige Punct desselben Strahles, für welchen das Doppelverhältniss $(opaa')$ einen gegebenen Werth λ hat. Der vom Puncte a' beschriebene Ort, wenn a sich auf F_ν bewegt, ist offenbar eine neue Fläche F'_ν der Ordnung ν, die der gegebenen projectivisch (*homographisch*) ist. Die beiden Flächen werden von der Ebene P in ein und derselben Curve ν-ter Ordnung geschnitten, und haben also (40) noch eine andere Curve der $\nu(\nu-1)$-ten Ordnung gemein, die auf einer Fläche $\mathscr{F}_{\nu-1}$ der $(\nu-1)$-ten Ordnung liegt, die in Verbindung mit der Ebene P eine Fläche des Büschels (F_ν, F'_ν) bildet.

Die Flächen F'_ν, die man erhält, indem man sich den Werth des Verhältnisses λ veränderen lässt, bilden eine Reihe vom Index ν. Denn ist a' ein beliebiger Punct im Raume, und schneidet der Strahl oa' die Fläche F_ν in ν Puncten a und P im Puncte p, so geben die ν Werthe des Doppelverhältnisses $(opaa')$ ν Flächen F'_ν die durch a' gehen. Die Reihe enthält die gegebene Fläche F_ν, die ν-mal gezählte Ebene P, und den Kegel, dessen Scheitel in o liegt, und dessen Directrix die Curve PF_ν ist. Für $\lambda = 1, 0, \infty$ fällt nämlich der Punct a' bezüglich mit a, p, o zusammen.

78. Es sei i ein Punct der Durchschnittscurve der Ebene P mit der ersten Polarfläche von o in Bezug auf F_ν. Die ersten Polarflächen von o in Bezug auf F_ν, F'_ν sind offenbar perspectivisch, und folglich ist i auch ein Punct der ersten Polarfläche von o in Bezug auf F'_ν und folglich auch (74) der ersten Polarfläche von o in Bezug auf jede Fläche des Büschels (F_ν, F'_ν). Umgekert gehen also die Polarebenen von i in Bezug auf die Flächen des genannten Büschels durch o. Unter diesen Flächen betrachten wir diejenige, welche durch i geht. Für diese ist oi entweder Tangente in i, oder i ist ein Doppelpunct. Wäre

aber i kein Doppelpunct, so würde, da die Fläche, um die es sich handelt, aus der Ebene P und aus $\mathcal{F}_{\nu-1}$ zusammengesetzt ist, io nicht Tangente sein können; folglich ist i ein Doppelpunct, das heisst $\mathcal{F}_{\nu-1}$ geht durch i. Die Fläche $\mathcal{F}_{\nu-1}$ geht also durch die Durchschnittscurve der Ebene P und der ersten Polare von o in Bezug auf F_ν.

79. Lässt man λ variieren, so bilden die Flächen $\mathcal{F}_{\nu-1}$ eine Reihe vom Index $\nu-1$. Ist nämlich a_ν ein beliebiger Punct auf F_ν, und der Strahl $o a_\nu$ schneidet F_ν ausserdem noch in $a_1, a_2, \ldots, a_{\nu-1}$ und P in p, so geben die $\nu-1$ Werthe des Doppelverhältnisses $(o p a_\varrho a_\nu)$ die $\nu-1$ Flächen F'_ν die durch a_ν gehen und von F_ν verschieden sind. Ihnen entsprechen ebensoviel Flächen $\mathcal{F}_{\nu-1}$, die ebenfalls durch a_ν gehen. Es ist somit bewiesen, dass durch einen beliebigen Punct von F_ν $\nu-1$ Flächen $\mathcal{F}_{\nu-1}$ gehen, dieselbe Eigenschaft hat also auch für jeden Punct des Raumes statt.

Nähert sich einer der Puncte $a_1, a_2, \ldots, a_{\nu-1}$ unendlich dem Puncte a_ν, so geht die Fläche $\mathcal{F}_{\nu-1}$ durch den Berührungspunct von F_ν mit einer Tangente, welche von o ausgeht; fällt also F'_ν mit F_ν zusammen, so fällt auch $\mathcal{F}_{\nu-1}$ mit der ersten Polarfläche von o in Bezug auf F_ν zusammen. Wenn a_ν in die Ebene P fällt, das heisst, wenn F'_ν in die ν-mal genommene Ebene P degeneriert, so besteht die entsprechende Fläche $\mathcal{F}_{\nu-1}$ aus der nämlichen Ebene $(\nu-1)$-mal genommen.

80. Die Einhüllende (48) der Flächen F'_ν ist der Kegel K der $\nu(\nu-1)$-ten Ordnung, dessen Scheitel o, und der selbst der Fläche F_ν umgeschrieben ist. Wenn nämlich zwei von den Flächen F'_ν, die durch denselben Punct a' gehen, zusammenfallen sollen, so genügt es, wenn oa' mit einer Tangente von F_ν zusammenfällt. Die Doppel-(Knoten-) Curve dieser Einhüllenden besteht aus den $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)$ Bitangenten, welche man von o aus an F_ν legen kann; die Cuspidalcurve entsteht ebenso aus den $\nu(\nu-1)(\nu-2)$ Osculierenden (67).

Der Kegel K berührt F_ν längs einer Curve der $\nu(\nu-1)$-ten Ordnung, die auf einer Fläche $(\nu-1)$-ter Ordnung — der ersten Polarfläche von o — liegt und also F_ν ausserdem längs einer Curve $\nu(\nu-1)(\nu-2)$-ten Ordnung schneidet, die auf einer Fläche $(\nu-1)(\nu-2)$-ter Ordnung liegt.*) Die erste Curve ist der Ort der Puncte für welche eine der Flächen F'_ν mit F_ν zusammenfällt; dagegen fallen in jedem Puncte der zweiten Curve zwei der F'_ν zusammen, die von F_ν verschieden sind. In jedem dieser Puncte fallen auch die beiden entsprechenden Flächen $\mathcal{F}_{\nu-1}$ zusammen, und die zweite Curve ist also der Durchschnitt von F_ν und der Einhüllenden der $\mathcal{F}_{\nu-1}$. Diese Einhüllende ist folglich eine Fläche **S** der $(\nu-1)(\nu-2)$-ten Ordnung.

81. In jedem Puncte der von o ausgehenden Osculierenden fallen drei aufeinanderfolgende F'_ν zusammen, und folglich fallen auch in jedem der $\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)$ Puncten, in welchen F_ν von diesen Geraden geschnitten wird, drei aufeinanderfolgende Flächen

*) Man vergleiche *Einleitung*, N. 138, Anmerkung. [Queste Opere, t.º 1.º, nota a p. 444].

$\mathscr{F}_{\nu-1}$ zusammen und ebenso gibt es in jedem der $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)$ Durchschnittspuncten der F_ν mit den Bitangenten zwei getrennte Paare zusammenfallender Flächen $\mathscr{F}_{\nu-1}$. Die ersten Puncte sind also Stillstandspuncte und die zweiten Doppelpuncte für die Einhüllende S, das heisst, diese Einhüllende hat eine Cuspidalcurve von der Ordnung $(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)$ und eine Doppelcurve von der Ordnung $\frac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)$.

82. Da alle Flächen $\mathscr{F}_{\nu-1}$ durch dieselbe Curve der $(\nu-1)$-ten Ordnung, die in der Ebene P liegt, gehen, so ist die zwei Flächen $\mathscr{F}_{\nu-1}$ gemeinschaftliche Curve und folglich auch die Berührungscurve zwischen einer $\mathscr{F}_{\nu-1}$ und der Einhüllenden S von der Ordnung $(\nu-1)(\nu-2)$. Unter den Flächen $\mathscr{F}_{\nu-1}$ befindet sich auch die erste Polarfläche von o in Bezug auf F_ν, und die Berührungscurve zwischen S und genannter ersten Polarfläche hat $\nu(\nu-1)(\nu-2)$ Puncte mit F_ν gemein, die nichts anderes sind, als die Berührungspuncte der Osculierenden. In jedem dieser Puncte fallen nämlich zwei F'_ν, also auch zwei $\mathscr{F}_{\nu-1}$ zusammen, und da eine der letzteren die erste Polarfläche von o ist, so berühren sich in ihnen die erste Polarfläche von o und S. Durch $\nu(\nu-1)(\nu-2)$ drei Flächen ν-ter, $(\nu-1)$-ter, $(\nu-2)$-ter Ordnung gemeinschaftliche Puncte kann keine weitere Fläche der $(\nu-2)$-ten Ordnung gehen, also berührt S die erste Polarfläche längs einer Curve, die auf der zweiten Polarfläche liegt. Diese Curve ist der Ort der Puncte, für welche zwei $\mathscr{F}_{\nu-1}$ zusammenfallen, deren eine die erste Polarfläche ist.

Die erste Polarfläche und die Fläche S schneiden sich also noch längs einer andern Curve *) der $(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)$-ten Ordnung. In jedem Puncte derselben fallen zwei von der ersten Polarfläche verschiedene $\mathscr{F}_{\nu-1}$ zusammen, und folglich fallen dort auch zwei Flächen $\mathscr{F}_{\nu-2}$ zusammen, wo $\mathscr{F}_{\nu-2}$ die Fläche der $(\nu-2)$-ten Ordnung ist, welche durch die gemeinschaftliche Durchschnittscurve $(\nu-1)(\nu-2)$-ter Ordnung der ersten Polarfläche und $\mathscr{F}_{\nu-1}$ hindurchgeht. Diese Curve der $(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)$-ten Ordnung ist folglich der Durchschnitt der ersten Polarfläche mit der Einhüllenden der $\mathscr{F}_{\nu-2}$. Diese Einhüllende ist also eine Fläche S' der $(\nu-2)(\nu-3)$-ten Ordnung.

Die Flächen $\mathscr{F}_{\nu-2}$ bilden eine Reihe vom Index $\nu-2$. Denn durch einen beliebigen Punct der ersten Polarfläche gehen $\nu-2$ von der ersten Polarfläche verschiedene Flächen $\mathscr{F}_{\nu-1}$, denen ebensoviele Flächen $\mathscr{F}_{\nu-2}$ entsprechen, die durch den nämlichen Punct gehen.

Die Berührungspuncte der Bitangenten sind also die Durchschnitte dreier Flächen: der gegebene F_ν, der ersten Polarfläche von o und der Fläche S', der Einhüllenden der Flächen $\mathscr{F}_{\nu-2}$.

. . . .

*) Von diesen der Fläche S und der ersten Polarfläche gemeinschaftlichen Curven trifft die erste F_ν in den Berührungspuncten der Osculierenden; die zweite in den Berührungspuncten der Bitangenten.

Capitel IV.

Anwendungen auf developpable Flächen. [55]

97. Wir wollen jetzt annehmen, die Fundamentalfläche F sei eine Developpable von der Ordnung ρ und der Classe μ, mit ω Doppelgeneratrixen, θ stationären Generatrixen, einer Cuspidalcurve ν-ter Ordnung, die β stationäre und ε' Doppelpuncte besitzt, und einer Knotencurve von der Ordnung ξ. Es sei ausserdem:

α die Zahl der stationären Tangentialebenen und

γ' die Zahl der Bitangentialebenen von F (das heisst, der längs zweier getrennnter Generatrixen berührenden Ebenen);

ε die Zahl der Geraden, die man von einem beliebigen Puncte so ziehen kann, dass sie die Curve (ν) zweimal treffen;

γ die Zahl der Geraden die gleichzeitig in einer beliebigen Ebene und in zwei Tangentialebenen von F liegen;

η die Classe der doppeltberührenden Developpablen der Curve (ν);

$\varkappa$ die Zahl der Geraden, welche durch einen beliebigen Punct gehen, und die Curve (ξ) in zwei Puncten schneiden;

λ die Zahl der Puncte der Curve (ν), durch welche Gerade gehen, welche diese Curve anderweitig berühren: diese Puncte sind für die Curve (ξ) stationär;

τ die Zahl der Puncte, die in drei getrennten Generatrixen von F liegen: diese Puncte sind offenbar für die Curve (ξ) dreifach.

Zwischen diesen Zahlen haben wir (10, 12) die Gleichungen [56]:

$$\begin{gathered}
\rho=\mu(\mu-1)-2(\gamma+\gamma')-3\alpha\,,\\
\rho=\nu(\nu-1)-2(\varepsilon+\varepsilon')-3\beta\,,\\
\mu=\rho(\rho-1)-2(\xi+\omega)-3(\nu+\theta)\,,\\
\nu=\rho(\rho-1)-2(\eta+\omega)-3(\mu+\theta)\,,\\
3\rho-\theta=3\mu+\nu-\alpha=3\nu+\mu-\beta\,,\\
2(\xi+\omega)+\beta=2(\eta+\omega)+\alpha=\rho(\rho-4)-2\theta\,,
\end{gathered}$$

welche sechs unabhängigen Relationen gleichgelten. Wir wollen jetzt drei andere Gleichungen bestimmen, welche zur Bestimmung von λ, τ, $\varkappa$ dienen *).

98. Es sei o ein willkürlicher Punct. Jede Ebene, die durch o geht, schneidet dann F in einer Curve l von der Ordnung ρ und der Classe μ mit $\xi+\omega$ Doppelpuncten und $\nu+\theta$

*) Cfr. Salmon, *Geometry of three dimensions* (2. ed.) pag. 455 u. ff., wo aber die Singularitäten ω, θ, ε', γ' nicht beachtet sind. Bei der vorliegenden Untersuchung wurde der Verfasser durch den Rath der Herren Cayley und Zeuthen unterstützt, denen er hierdurch seinen herzlichsten Dank ausspricht.

Stillstandspuncten (9). Dieselbe Ebene schneidet die erste Polarfläche von o in Bezug auf F in einer Curve der ($\rho-1$)-ten Ordnung, welche durch die $\xi+\omega$ Doppelpuncte und die $\nu+\theta$ Stillstandspuncte von l hindurchgeht. In diesen letzten Puncten hat sie mit der Curve l dieselben Tangenten*). Daraus folgt, dass die Classe der Curve l gleich ist:

$$\mu=\rho(\rho-1)-2(\xi+\omega)-3(\nu+\theta),$$

da dieses die Zahl der Tangenten ist, die man von o an genannte Curve ziehen kann. Diese Tangenten sind auf der Schnittebene die Spuren der Tangentialebenen von F, die durch o gehen. Die erste Polarfläche von o in Bezug auf F schneidet daher F längs der beiden Curven (ξ), (ν), längs der $\omega+\theta$ doppelten und stationären Generatrixen und längs der Berührungsgeneratrixen der μ Tangentialebenen, die durch o gehen.

Die Gleichung

$$\rho(\rho-1)=\mu+2(\xi+\omega)+3(\nu+\theta)$$

zeigt, dass bei dem vollständigen Durchschnitt von F und der ersten Polarfläche die Curve (ξ) und die ω Geraden zweimal zählen, während die Curve (ν) und die θ Geraden dreimal zu rechnen sind. Die nämliche Gleichung lässt erkennen, dass der umgeschriebene Kegel mit dem Scheitel o aus den μ Tangentialebenen, dem Perspectivkegel der Curve (ξ) zweimal gezählt, dem dreimal gerechneten Perspectivkegel der Curve (ν) und aus den $\omega+\theta$ Ebenen zusammengesetzt ist, welche durch die doppelten und die stationären Geraden hindurchgehen, jene zweimal und diese dreimal gezählt.

99. Ist die schneidende Ebene, die wir durch o gelegt haben, eine der μ Tangentialebenen, und ist t die Berührungsgeneratrix und $\mathfrak{m}$ der Punct, in welchem t die Curve (ν) berührt, dann erhält der Schnitt l der Developpablen F (13) in $\mathfrak{m}$ einen dreifachen Punct mit drei Zweigen, welche von derselben Tangente t berührt werden. Die erste Polarcurve von o in Bezug auf l hat also in $\mathfrak{m}$ eine Spitze mit der Tangente t, und die zweite Polarcurve von o in Bezug auf die nämliche Curve l geht durch $\mathfrak{m}$ und wird in diesem Puncte von der Geraden t berührt. Folglich ist t in $\mathfrak{m}$ Tangente der zweiten Polarfläche von o in Bezug auf F; oder auch:

Die zweite Polarfläche eines beliebigen Punctes o in Bezug auf eine developpable Fläche berührt die Cuspidalcurve in den Puncten, wo diese von Ebenen osculiert wird, welche durch o gehen.

Der Schnitt l ist aus der Geraden t zweimal genommen und einer Curve ($\rho-2$)-ter Ordnung zusammengesetzt, welche von t in $\mathfrak{m}$ berührt und in anderen $\rho-4$ Puncten geschnitten wird — es sind dies die Puncte, in denen die Curve (ξ) von der Ebene ot berührt wird —; diese Puncte sind für l dreifach, also geht durch sie auch die zweite Polarcurve von o in Bezug auf l; wir haben also:

*) *Einleitung*, N.° 74.

Die zweite Polarfläche eines beliebigen Poles o in Bezug auf eine Developpable berührt die Berührungsgeneratrix jeder Tangentialebene, die durch o geht, in dem Puncte, wo sie von der Cuspidalcurve berührt wird, und schneidet sie in den Puncten, wo sie die Knotencurve trifft.

100. Es sei jetzt t eine der θ stationären Generatrixen und $\mathfrak{m}$ der Berührungspunct zwischen t und der Curve (ν). Man lege die Ebene ot bis sie F schneidet, dann besteht der Schnitt l aus der Geraden t zweimal genommen und einer Curve l' von der Ordnung $\rho-2$ und der Classe μ, die in $\mathfrak{m}$ mit t einen vierpunctigen Contact hat, weil t in drei unmittelbar folgenden Tangentialebenen liegt, und man also von einem beliebigen Puncte von t aus $\mu-3$ von t verschiedene Tangenten an den Schnitt legen kann; t repräsentiert daher drei unmittelbar folgende Tangenten von l'. Die Ebene ot schneidet die Curve (ν) in anderen $\nu-3$ Puncten und die anderen stationären Generatrixen in $\theta-1$ Puncten; l' hat also $\nu+\theta-4$ Spitzen. Diese Curve hat folglich

$$\frac{1}{2}\Big((\rho-2)(\rho-3)-\mu-3(\nu+\theta-4)\Big)=\xi+\omega-2\rho+9$$

Doppelpuncte (10) [97]. Diese Puncte gehören der Linie ($\xi+\omega$) an; von den andern Durchschittspuncten der Ebene ot mit der Curve (ξ) sind $2(\rho-6)$ in den $\rho-6$ Durchschnittspuncten zwischen l' und t vereinigt, und folglich fallen die drei übrigen mit $\mathfrak{m}$ zusammen. Die ebenerwähnten $\rho-6$ Puncte sind für die Curve (ξ) Stillstandspuncte, weil in jedem derselben zwei unmittelbar folgende Generatrixen — repräsentiert durch die stationären Generatrixen — von einer nicht folgenden Generatrix geschnitten werden.

Schneidet man F durch die Ebene, welche in $\mathfrak{m}$ einen vierpunctigen Contact mit der Curve (ν) hat, so besteht der Schnitt l aus der Geraden t dreimal gezählt und einer Curve ($\rho-3$)-ter Ordnung und ($\mu-1$)-ter Classe, die in $\mathfrak{m}$ einen dreipunctigen Contact mit t hat, weil t in drei unmittelbar folgenden Tangentialebenen liegt, von denen die eine die Ebene der Curve ist, und folglich zwei unmittelbar folgende Tangenten dieser Curve darstellt. Die Ebene schneidet die Curve (ν) in weiteren $\nu-4$ Puncten und die übrigen stationären Generatrixen in $\theta-1$ Puncten; die Curve ($\rho-3$)-ter Ordnung hat also $\nu+\theta-5$ Spitzen und daher

$$\frac{1}{2}\Big((\rho-3)(\rho-4)-(\mu-1)-3(\nu+\theta-5)\Big)=\xi+\omega-3\rho+14$$

Doppelpuncte. Die Ebene hat also mit der Doppelcurve einen vierpunctigen Contact in $\mathfrak{m}$ und einen dreipunctigen Contact in jedem der $\rho-6$ Durchschnittspuncte von t mit der ebenen Curve ($\rho-3$)-ter Ordnung. Folglich haben die Curven (ν) und (ξ) in $\mathfrak{m}$ dieselbe Singularität, das heisst, dieselbe Tangente t mit dreipunctigem Contact und dieselbe Osculationsebene mit vierpunctigem Contact. Die stationäre Tangente t trifft die Curve (ξ) in $\rho-6$ stationären Puncten, und die Tangenten in diesen Puncten liegen in der Osculationsebene von $\mathfrak{m}$.

Der nämliche Punct $\mathfrak{m}$, in dem die Curven (ν) und (ξ) von der stationären Geraden t osculiert werden, ist für die Developpable F dreifach, weil eine beliebige Ebene durch t F in einer Curve schneidet, die mit drei Zweigen durch $\mathfrak{m}$ geht, das heisst, jede Gerade durch $\mathfrak{m}$ hat hier einen dreipunctigen Contact mit F. Die Geraden, welche in $\mathfrak{m}$ mit F einen vierpunctigen Contact haben, liegen in der Osculationsebene, das heisst (71), [18] der Berührungskegel von F in $\mathfrak{m}$ reduciert sich auf diese Ebene dreimal gezählt. Es folgt noch (85), dass die zweite Polarfläche eines beliebigen Poles in Bezug auf F durch $\mathfrak{m}$ geht und in ihm jene Ebene zur Tangentialebene hat. Ausserdem bemerke man, dass jeder Punct, der der Geraden t und der Curve l' in der Ebene ot gemein ist, für l dreifach sein muss und also auch in der zweiten Polarcurve von o in Bezug auf l liegt; folglich hat die zweite Polarfläche von o in Bezug auf F in $\mathfrak{m}$ eine vierpunctige Berührung mit t. Man hat also:

Die zweite Polarfläche eines beliebigen Poles in Bezug auf eine Developpable hat einen vierpunctigen Contact mit der Cuspidalcurve und mit der Knotencurve in dem Puncte, in dem diese Curven von jeder stationären Generatrix osculiert werden.

Die $\rho-6$ Puncte, in denen t die Curve (ξ) trifft, sind für F dreifache Puncte nach dem nämlichen Raisonnement, das wir schon für den Punct $\mathfrak{m}$ angewandt haben; daher geht die zweite Polarfläche von o durch diese Puncte.

Wenn $\mathfrak{r}$ einer dieser Puncte ist, in denen t von der Geraden geschnitten wird, welche die Curve (ν) in $\mathfrak{n}$ berührt, so ist der Tangentialkegel von F in $\mathfrak{r}$ aus der doppeltgezählten Osculationsebene der Curve (ν) in $\mathfrak{m}$ und der Osculationsebene in $\mathfrak{n}$ zusammengesetzt. Die gemeinschaftliche Gerade dieser Ebenen ist die Cuspidaltangente der Curve (ξ) in $\mathfrak{r}$, und durch sie geht die Tangentialebene in $\mathfrak{r}$ der zweiten Polarfläche von o in Bezug auf F; also zählt $\mathfrak{r}$ für drei Durchschnittspuncte der Curve (ξ) mit der obengenannten zweiten Polarfläche.

101. Es sei jetzt t eine der ω Doppelgeneratrixen, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ ihre Berührungspuncte mit der Curve (ν), und man wende auf sie dieselben Betrachtungen an, die wir für eine stationäre Generatrix durchgeführt haben. Die Ebene ot gibt hier eine Curve l' von der Ordnung $\rho-2$ und der Classe μ mit $\nu+\theta-4$ Spitzen, also mit

$$\frac{1}{2}\Big((\rho-2)(\rho-3)-\mu-3(\nu+\theta-4)\Big)=\xi+\omega-2\rho+9$$

Doppelpuncten, von denen $\omega-1$ in den $\omega-1$ andere Doppelgeneratrixen liegen, während die andern $\xi-2\rho+10$ der Knotencurve angehören. Die Curve l' hat in jedem der Puncte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ mit t einen dreipunctigen Contact, weil diese Gerade in zwei Paar unmittelbar folgenden Tangentialebenen liegt, und folglich fallen von den μ Tangenten von l', die von einem beliebigen Puncte $\mathfrak{p}$ von t ausgehen, zwei mit $\mathfrak{pm}$ und zwei andere mit $\mathfrak{pm}'$ zusammen. Es folgt, dass t die l' in andren $\rho-2-2.3$ Puncten trifft, das heisst, die Doppelgeneratrix t

schneidet $\rho-8$ einfache Generatrixen. Die ebene ot hat folglich mit der Knotencurve $2(\rho-8)$ Durchschnittspuncte, die zu zwei und zwei in obengenannten $\rho-8$ Puncten vereinigt sind, und 6 Durchschnittspuncte, die zu drei und drei in die Puncten $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ zusammenfallen *). Also hat t in $\mathfrak{m}$ und in $\mathfrak{m}'$ einen dreipunctigen Contact mit der Curve (ξ).

Da $\mathfrak{m}$ ein dreifacher Punct von F ist, so geht die zweite Polarfläche von o in Bezug auf F durch $\mathfrak{m}$. Ausserdem hat diese zweite Polarfläche, da jeder gemeinschaftliche Punct von t und l' für den vollständigen Durchschnitt der Ebene ot mit F dreifach ist, in $\mathfrak{m}$ einen dreipunctigen Contact mit t. Diese Gerade hat aber in diesem Puncte eine zweipunctige Berührung mit der Curve (ν) und eine dreipunctige mit der Curve (ξ); folglich hat man:

Die zweite Polarfläche eines beliebigen Punctes in Bezug auf eine Developpable geht durch die Berührungspuncte der Cuspidalcurve mit ihren Doppeltangenten und hat daselbst eine zweipunctige Berührung mit jener Curve und eine dreipunctige mit der Knotencurve.

Die $\rho-8$ für F dreifachen Puncte, in denen t andere Generatrixen schneidet, sind für die Curve (ξ) Doppelpuncte. Ist in der That $\mathfrak{r}$ einer von ihnen, in dem t von der Tangente der Curve (ν) in $\mathfrak{n}$ getroffen wird, so wird dort die Curve (ξ) von den beiden Geraden berührt, längs deren die Osculationsebene in $\mathfrak{n}$ die Osculationsebenen in $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$ schneidet. Folglich stellt jeder dieser $\rho-8$ Puncte zwei Durchschnittspuncte der Knotencurve mit der zweiten Polarfläche von o dar.

Schneidet man die Fläche F durch die Osculationsebene der Curve (ν) in $\mathfrak{m}$, so besteht der Schnitt l aus der Geraden t, dreimal genommen und einer Curve $(\rho-3)$-ter Ordnung und $(\mu-1)$-ter Classe mit $\nu+\theta-5$ Spitzen, welche mit t in $\mathfrak{m}$ eine zweipunctige und in $\mathfrak{m}'$ eine dreipunctige Berührung eingeht. Diese Curve hat also

$$\frac{1}{2}\Big((\rho-3)(\rho-4)-(\mu-1)-3(\nu+\theta-5)\Big)=\xi+\omega-3\rho+14$$

Doppelpuncte, von denen $\xi-3\rho+15$ der Knotencurve angehören. Die andern Durchschnittspuncte der schneidenden Ebene mit der Curve (ξ) sind die $\rho-8$ genannten Puncte, jeder dreimal gezählt, und die Puncte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ zusammen als 9 Puncte gezählt, nämlich $\mathfrak{m}$ sechsmal und $\mathfrak{m}'$ dreimal. Die Ebene also, welche die Curve (ν) in $\mathfrak{m}$ osculiert, hat dort einen sechspunctigen Contact mit der Curve (ξ) und ausserdem mit derselben Curve einen dreipunctigen Contact in $\rho-7$ andern Puncten, von denen einer $\mathfrak{m}'$ ist.

---

*) Dass die Curve (ξ) durch $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ geht, ergibt sich auch, wenn man beachtet, dass z. B. $\mathfrak{m}$ für F ein dreifacher Punct ist, weil sich in ihm drei Tangenten der Curve (ν) schneiden, nämlich die Tangenten in $\mathfrak{m}$, im unendlich nahen Puncte von $\mathfrak{m}$ und im Puncte $\mathfrak{m}'$. Also besitzt der von einer beliebig durch $\mathfrak{m}$ gelegte Ebene auf F erzeugte Schnitt hier drei Zweige, von denen zwei durch die Spur der Osculationsebene in $\mathfrak{m}$ und der dritte von der Spur der Osculationsebene in $\mathfrak{m}'$ berührt werden. Es folgt, dass $\mathfrak{m}$ so viel als eine Spitze und zwei Knotenpuncte des Schnittes gilt; und folglich geht ausser der Curve (ν) und einer der ω Doppelgeraden auch die Curve (ξ) durch $\mathfrak{m}$.

102. Es sei jetzt $\mathfrak{m}$ ein Doppelpunct der Cuspidalcurve; t, t' die Tangenten und P, P′ die Osculationsebenen der beiden Zweige der Curve. Bezeichnen wir durch t_1, t'_1 die zu t, t' unendlich nahen Generatrixen von F, so sieht man unmittelbar, dass $\mathfrak{m}$ ein vierfacher Punct der Fläche F ist, weil er in vier Generatrixen t, t_1, t', t'_1 liegt. Es ist gleichfalls klar, dass $\mathfrak{m}$ auch für die Knotencurve vierfach ist, weil er den Durchschnittspunct von vier Paar nicht unmittelbar folgenden Generatrixen tt', tt'_1, $t't_1$, $t_1t'_1$ darstellt. Die Geraden, welche in $\mathfrak{m}$ einen fünfpunctigen Contact mit F haben, liegen sämmtlich in den Ebenen P, P′; folglich stellen diese Ebenen, zweimal gezählt, den Berührungskegel von F im vierfachen Puncte dar. Die zweite Polarfläche eines beliebigen Punctes o in Bezug auf F hat in $\mathfrak{m}$ einen Biplanarpunct, und die beiden Tangentialebenen gehen durch die Gerade PP′, welche zugleich die Tangente der Curve (ξ) in diesem Puncte ist.

Hieraus ergibt sich gerades Wegs, dass in $\mathfrak{m}$ vier Durchschnittspuncte der Curve (ν) mit der zweiten Polarfläche vereinigt sind.

103. Ein stationärer Punct der Curve (ν) ist für F dreifach, da jede Gerade, die durch diesen Punct gezogen ist, in ihm drei aufeinanderfolgende Generatrixen schneidet. Der Tangentenkegel von F in diesem Puncte besteht aus der dreimal genommenen Ebene, die in ihm einen vierpunctigen Contact mit der Curve (ν) hat, weil diese Ebene der Ort der Geraden ist, die in genanntem Puncte mit F einen vierpunctigen Contact haben; folglich geht die zweite Polarfläche von o durch diesen Punct und hat in ihm genannte Ebene zur Tangentialebene. Also haben wir:

Die zweite Polarfläche eines beliebigen Poles o in Bezug auf eine Developpable, hat mit der Cuspidalcurve in ihren Stillstandspuncten eine vierpunctige Berührung.

104. Die Puncte der Curve (ν), durch welche die zweite Polarfläche von o geht, sind diejenigen, deren Quadripolarflächen durch o gehen, und diejenigen, deren Quadripolarflächen unbestimmt werden. Die ersten Puncte sind diejenigen, in denen die Curve (ν) von den μ Tangentialebenen von F osculiert wird, die durch o gehen. Die zweiten Puncte dagegen sind für die Fläche dreifach oder vierfach (71), das heisst, sie liegen in drei oder vier Generatrixen. Unter diesen Puncten sind in der Cuspidalcurve, ausser den β stationären und den ϑ' Doppelpuncten und ausser den $2\omega+\theta$ Berührungspuncten der doppelten und der stationären Tangenten, auch die λ Puncte, in denen zwei aufeinander folgende Generatrixen von einer nicht unmittelbar folgenden zugleich geschnitten werden. Diese Puncte sind für die Curve (ξ) stationär, aber für die Curve (ν) nur einfach; und diese wird in ihnen von der zweiten Polarfläche nicht berührt. Also hat man:

Die zweite Polarfläche eines beliebigen Poles o in Bezug auf eine Developpable schneidet die Cuspidalcurve in den Puncten, in welchen diese von Geraden geschnitten wird, die sie anderswo berühren.

Auf diese Weise sind die Durchschnittspuncte der zweiten Polarfläche von o mit der Curve (ν) dargestellt durch die Gleichung:

$$\nu(\rho-2)=2\mu+4\theta+2\,.\,2\omega+4\eth'+4\beta+\lambda.$$

Aus ihr ergibt sich:

$$\lambda=\nu\rho-2(\mu+\nu+2\theta+2\omega+2\eth'+2\beta),$$

oder auch mit Hilfe der Formeln von CAYLEY *):

$$\lambda=\nu(\rho+4)-6(\rho+\beta)-4(\omega+\eth')-2\theta.$$

105. Wir haben schon (99) gesehen, dass die zweite Polarfläche von o die Knotencurve (ξ) in den $\mu(\rho-4)$ Puncten schneidet, wo diese von den Berührungsgeneratrixen der μ Tangentialebenen von F, die durch o gehen, getroffen wird. Dies sind diejenigen Puncte der Curve (ξ), deren Quadripolarflächen durch o gehen. Eine solche Polarfläche besteht aus den zwei Ebenen, welche in demselben Puncte die Fläche F berühren und von denen eine durch o geht.

Die übrigen Durchschnittspuncte der zweiten Polarfläche von o sind Puncte, deren Quadripolarfläche unbestimmt ist, das heisst, es sind die dreifachen und vierfachen Puncte von F, deren Zahlen sind:

$$\theta,\ \theta(\rho-6),\ 2\omega,\ \omega(\rho-8),\ \eth',\ \beta,\ \lambda,\ \tau.$$

Wir haben schon gesehen, dass jeder der θ, $\theta(\rho-6)$, 2ω, $\omega(\rho-8)$ Puncte bezüglich für 4, 3, 3, 2 Durchschnittspuncte der Knotencurve mit der zweiten Polarfläche von o gilt; jetzt wollen wir zur Betrachtung der anderen Puncte übergehen.

106. Es sei $\mathfrak{m}$ ein Doppelpunct der Cuspidalcurve und man halte die Benennungen der Nr. 102 fest. Eine beliebig durch $\mathfrak{m}$ gelegte Ebene M schneidet F in einer Curve l von der Ordnung ρ und der Classe μ, die in $\mathfrak{m}$ einen vierfachen Punct hat (vier Doppelpuncten und zwei Spitzen gleichgeltend); in ihm werden zwei Zweige von der Spur von P und die beiden andern von der Spur von P' berührt. Geht die Schnittebene durch die Tangente t, so zerfällt der Schnitt l in die Gerade t und eine Curve l' der (ρ—1)-ten Ordnung und μ-ter Classe, die in $\mathfrak{m}$ einen dreifachen Punct hat. Dort hat ein Zweig t zur Tangente, während die beiden andern von der Spur von P' berührt werden. Die Ebene schneidet die Linie $(\nu+\theta)$ anderswo noch in $\nu+\theta-3$ Puncten, die Spitzen von l' bilden, und da $\mathfrak{m}$ für zwei Doppelpuncte und eine Spitze zu zählen ist, so hat l' noch andere

$$\frac{1}{2}\Big((\rho-1)(\rho-2)-\mu-3(\nu+\theta-2)\Big)-2=\xi+\omega-\rho+2$$

Doppelpuncte, von denen $\xi-\rho+2$ in der Curve (ξ) liegen. Von den andern $\rho-2$ Durchschnittspuncten dieser Curve mit der Ebene sind 4 im Puncte $\mathfrak{m}$ vereinigt und $\rho-6$

*) Das heisst, indem man für μ den gleichgeltenden Ausdruck $3(\rho-\nu)+\beta-\theta$ setzt (97).

befinden sich in den andern Durchschnittspuncten von t und l', das heisst t trifft ausser t noch $\rho-6$ Generatrixen und hat folglich in $\mathfrak{m}$ mit l einen fünfpunctigen Contact.

Wir setzen jetzt voraus, die schneidende Ebene fiele mit der Tangentialebene P zusammen. Dann ist der Schnitt l aus der zweimal genommenen Geraden t und einer Curve l'' der $(\rho-2)$-ten Ordnung und $(\mu-1)$-ten Classe zusammengesetzt, die in $\mathfrak{m}$ einen dreifachen Punct hat — weil alle durch $\mathfrak{m}$ in der Ebene P gezogene Geraden in ihm mit F eine fünfpunctige Berührung eingehen —; in ihm wird ein Zweig von t berührt, und die andern beiden von der Geraden PP'. Die Curve l'' hat andere $\nu+\theta-4$ Spitzen, sie besitzt also ausser den beiden in $\mathfrak{m}$ vereinigten Doppelpuncten noch

$$\frac{1}{2}\Big((\rho-2)(\rho-3)-(\mu-1)-3(\nu+\theta-3)\Big)-2=\xi+\omega-2\rho+6$$

andere. Die übrigen $2\rho-6$ Durchschnittspuncte von P mit der Curve (ξ) werden von den $\rho-6$ Puncten, in denen t andere Generatrixen von F als t' schneidet, und dem Puncte $\mathfrak{m}$ gebildet; folglich hat die Ebene P mit der Curve (ξ) einen zweipunctigen Contact in jedem der genannten $\rho-6$ Puncte und einen sechspunctigen Contact in $\mathfrak{m}$. Ein ähnlicher Schluss lässt sich für die Ebene P' machen, und folglich [57] hat die Gerade PP' mit der Curve (ξ) im Puncte $\mathfrak{m}$ sechs vereinigte gemeinschaftliche Puncte. *) Diese Gerade ist aber auch die Durchschnittsgerade der Tangentialebenen der zweiten Polarfläche von o in dem Biplanarpuncte $\mathfrak{m}$; und also haben wir:

Ein Doppelpunct der Cuspidalcurve ist für die Knotencurve vierfach und gilt fur zwölf Durchschnittspuncte der letzteren Curve mit der zweiten Polarfläche eines beliebigen Poles in Bezug auf die gegebene Developpable.

107. Ist $\mathfrak{m}$ einer der β Stillstandspuncte der Curve (ν), und t die entsprechende Tangente, so schneidet die Ebene, welche F längs t berührt, die Curve (ν) in anderen $\nu-4$ Puncten, das heisst, die Curve $(\rho-2)$-ter Ordnung, welche F und genannter Ebene gemein ist, hat wohl noch $\nu+\theta-3$ Spitzen, wie im Allgemeinen für eine ganz beliebige Tangentialebene, aber eine derselben fällt auf $\mathfrak{m}$. Die ebene Curve hat in $\mathfrak{m}$ die Tangente t, von der sie noch in $\rho-5$ anderen Puncten geschnitten wird, und da sie ausserdem von der $(\mu-1)$-ten Classe ist, so hat sie

$$\frac{1}{2}\Big((\rho-2)(\rho-3)-(\mu-1)-3(\nu+\theta-3)\Big)=\xi+\omega-2\rho+8$$

*) Eine beliebig durch die Gerade PP' gelegte Ebene schneidet F in einer Curve l von der ρ-ten Ordnung und der μ-ten Classe mit vier in $\mathfrak{m}$ sich kreuzenden Zweigen und einer einzigen Tangente PP', mit der sie in diesem Puncte einen sechspunctigen Contact hat. Dieselbe Ebene trifft die Cuspidalcurve in andern $\nu-2$ und die Knotencurve in andern $\xi-6$ Puncten. Die Curve l hat also in $\mathfrak{m}$ eine Singularität, welche 6 Doppelpuncten und 2 damit vereinigten Spitzen entspricht und folglich die Verminderung um $6.2+2.3=18$ in der Classenzahl und von $6.6+2.8=52$ in der Zahl der Wendepuncte hervorbringt.

Doppelpuncte, und folglich berührt die Ebene, welche in $\mathfrak{m}$ einen vierpunctigen Contact mit der Curve (ν) hat, die Curve (ξ) in $\mathfrak{m}$ und in anderen $\rho-5$ Puncten der Geraden t. Die nämliche Ebene berührt in $\mathfrak{m}$ die zweite Polarfläche von o, und man hat also:

Die zweite Polarfläche eines beliebigen Poles in Bezug auf eine Developpable berührt die Knotencurve in den Stillstandspuncten der Cuspidalcurve.

Eine beliebig durch die Cuspidaltangente t der Curve (ν) gelegte Ebene schneidet F in dieser Geraden t und in einer Curve $(\rho-1)$-ter Ordnung und μ-ter Classe, für welche $\mathfrak{m}$ die Verenigung einer Spitze und eines Doppelpunctes darstellt *); es gibt ausserdem noch $\nu+\theta-3$ andere Spitzen und folglich

$$\frac{1}{2}\Big((\rho-1)(\rho-2)-\mu-3(\nu+\theta-2)\Big)-1=\xi+\omega-\rho+3$$

Doppelpuncte. Die Gerade t trifft nur $\rho-5$ von ihr selbst verschiedene Generatrixen, das heisst, sie schneidet die ebene Curve in $\rho-5$ Puncten — oder hat auch in $\mathfrak{m}$ mit ihr einen vierpunctigen Contact — und folglich hat die Ebene mit der Curve (ξ) einen zweipunctigen Contact in $\mathfrak{m}$. Also erhält man:

In den stationären Puncten der Cuspidalcurve einer Developpablen haben die Cuspidal- und Knotencurve dieselben Tangenten.

108. Es sei jetzt $\mathfrak{m}$ einer der λ Puncte der Curve (ν), die in zwei Tangenten liegen. Es sei t die Tangente in $\mathfrak{m}$ und t' die andre Tangente, die auch durch $\mathfrak{m}$ geht. Der Berüh-

*) Eine beliebige Ebene schneidet F in einer Curve l der ρ-ten Ordnung und μ-ter Classe mit $\xi+\omega$ Knotenpuncten und $\nu+\theta$ Spitzen, woraus man

$$\mu=\rho(\rho-1)-2(\xi+\omega)-3(\nu+\theta)$$

zieht. Geht die Ebene durch einen der α Berührungspuncte der stationären Ebenen, so haben wir in ihm eine Spitze, einen Knoten- und einen Wendepunct vereinigt. Die Curve l hat in diesem Puncte zwei Zweige, weil der Punct für F ein Doppelpunct ist, mit derselben Tangente, deren Berührung ferner vierpunctig ist, da diese Tangente in der Wendeebene liegt. Man hat so in der Curve l eine Singularität, welche die Verminderung $3+2$ in der Classe und $8+6+1$ in der Zahl der Wendepuncte hervorbringt.

Geht die schneidende Ebene durch einen der β stationären Puncte der Curve (ν), so hat in ihm die Curve l drei Zweige, die von derselben Tangente vierpunctig berührt werden. Diese Singularität umfasst zwei mit einem Knotenpunct vereinigte Spitzen.

Geht die schneidende Ebene durch einen der λ stationären Puncte der Curve (ξ), so erhalten wir in ihm drei Zweige der Curve l mit zwei verschiedenen Tangenten, eine Singularität, welche der Vereinigung einer Spitze mit zwei Knotenpuncten entspricht.

Geht die schneidende Ebene durch einen der θ Berührungspuncte der Curven (ν), (ξ) mit den stationären Geraden, so hat in ihm die Curve l drei Zweige, die von derselben Tangente vierpunctig berührt werden, und diese Singularität entspricht zwei mit einem Knotenpunct vereinigten Spitzen. U. s. w., u. s. w.

rungskegel von F in $\mathfrak{m}$ — oder auch (71) die cubische Polarfläche von $\mathfrak{m}$ — ist dann aus drei Ebenen zusammengesetzt, von denen zwei mit der Ebene zusammenfallen, welche F längs t berührt, und die dritte ist die Tangentialebene längs t'. Die Durchschnittsgerade t'' dieser beiden Tangentialebenen ist die Cuspidaltangente der Knotencurve in $\mathfrak{m}$.

Die zweite Polarfläche von o geht durch $\mathfrak{m}$ und wird dort von einer Ebene, die durch t'' geht, berührt, das heisst, von einer Ebene, welche mit der Curve ξ einen dreipunctigen Contact hat; folglich hat man:

Die zweite Polarfläche eines beliebigen Poles in Bezug auf eine Developpable hat mit der Knotencurve in jedem Puncte einen dreipunctigen Contact, welcher für diese ein Stillstandspunct und für die Cuspidalcurve ein einfacher Punct ist.

109. Jeder der dreifachen Puncte von F, in dem drei *getrennte* Generatrixen zusammenlaufen, ist offenbar für die Curve (ξ) ebenfalls dreifach und ist auch ein Punct der zweiten Polarfläche von o.

Die Durchschnittspuncte der zweiten Polarfläche von o mit der Curve (ξ) werden daher durch folgende Gleichung repräsentiert:

$$\xi(\rho-2)=\mu(\rho-4)+2\beta+3\lambda+3\tau+4\theta+3\theta(\rho-6)+3.2\omega+2\omega(\rho-8)+12\vartheta'.$$

Setzt man hierin für λ seinen Werth (104), so entsteht:

$$3\tau=(\xi-\mu-3\nu-3\theta-2\omega)(\rho-2)+8\mu+20\theta+10\beta+18\omega.$$

Mittelst des Princips der Dualität erhält man aus den Zahlen λ, τ folgende andere Zahlen:

$$\lambda_1=\mu(\rho+4)-6(\rho+\alpha)-4(\omega+\gamma')-2\theta,$$

$$3\tau_1=(\eta-\nu-3\mu-3\theta-2\omega)(\rho-2)+8\nu+20\theta+10\alpha+18\omega,$$

wo λ_1 die Zahl der Ebenen bedeutet, von denen jede die Curve (ν) in einem Puncte osculiert und in einem andern berührt, und τ_1 die Zahl der Ebenen, welche die Curve (ν) in drei getrennten Puncten berühren.

110. Existieren auf einem Kegel ξ-ter Ordnung zwei Curven, die nicht durch den Scheitel gehen und jede Generatrix bezüglich in σ_1, σ_2 Puncten schneiden, so ist die Zahl der beiden Curven gemeinschaftlichen Puncte gleich $\xi\sigma_1\sigma_2$. Diese Behauptung, die an sich klar ist, wenn die beiden Curven die Durchschnitte des Kegels mit zwei Flächen bezüglich der σ_1-ten, σ_2-ten Ordnung sind, nehmen wir hier für allgemeingiltig an.

Dies vorausgeschickt bemerke man, dass der Perspectivkegel der Knotencurve (ξ) vom Scheitel o mit der Developpablen F die Curve (ξ) gemein hat, die zweimal zu zählen ist, und also diese Fläche noch in einer anderen Curve c der $\xi(\rho-2)$-ten Ordnung schneidet, die mit jeder Generatrix des Kegels $\rho-2$ Puncte gemein hat. Nimmt man auf jeder Generatrix des Kegels die harmonischen Mittelpuncte des $(\rho-3)$-ten Grades des Systems der $(\rho-2)$

Puncte von c in Bezug auf $\mathfrak{o}$ als Pol, so ist der Ort dieser harmonischen Mittelpuncte — genau wie für die ebenen Curven *) — eine Curve c' von der $\xi(\rho-3)$-ten Ordnung und hat mit jeder Generatrix des Kegels $\rho-3$ Puncte gemein. Die beiden Curven c, c' haben $\xi(\rho-2)(\rho-3)$ Puncte gemein, und zwar die folgenden:

a. Die Berührungspuncte der Curve c mit Tangenten, welche gleichzeitig Generatrixen des Kegels (ξ) sind. Aber die Tangenten, welche sich von $\mathfrak{o}$ an F ziehen lassen, haben ihre Berührungspuncte auf μ Geraden (Generatrixen von F), welche (13) den Kegel (ξ) in $\mu(\xi-2\rho+8)$ Puncten, die nicht auf der Curve (ξ) liegen, treffen. Diese $\mu(\xi-2\rho+8)$ Puncte sind folglich ebensoviele Durchschnittspuncte der Curven c, c'.

b. Die Puncte, in welchen die Curve (ξ) von den $\varkappa$ Doppelgeneratrixen des Kegels (ξ) getroffen wird. Es seien $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ zwei Puncte der Curve (ξ) mit $\mathfrak{o}$ in gerader Linie. Wir betrachten die Doppelgeneratrix $\mathfrak{o}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ des Kegels wie zwei verschiedene Generatrixen $\mathfrak{o}\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{o}\mathfrak{p}_2$. Die erste derselben trifft zunächst die Curve (ξ) in $\mathfrak{p}_1$, schneidet dann F in zwei mit $\mathfrak{p}_2$ zusammenfallenden Puncten und ausserdem noch in anderen $\rho-4$ Puncten $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, ... ; die zweite dagegen schneidet, nachdem sie die Curve (ξ) in $\mathfrak{p}_2$ getroffen, die Fläche F in zwei mit $\mathfrak{p}_1$ zusammenfallenden Puncten und ausserdem noch in anderen $\rho-4$ Puncten $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, ... Die Ebene, welche durch $\mathfrak{o}$ und durch die Tangente der Curve (ξ) in $\mathfrak{p}_1$ (oder in $\mathfrak{p}_2$) geht, schneidet die beiden Tangentialebenen von F in $\mathfrak{p}_2$ (oder in $\mathfrak{p}_1$) längs zwei Geraden, welche in $\mathfrak{p}_2$ (oder in $\mathfrak{p}_1$) Tangenten der Curve c sind; die beiden Ebenen, die durch $\mathfrak{o}$ und bezüglich durch die Tangenten der Curve (ξ) in den Puncten $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ gehen, schneiden die Tangentialebene von F in $\mathfrak{q}$ in zwei Geraden, welche die Curve c in $\mathfrak{q}$ berühren. Also sind die Puncte $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, ... sämmtlich für c Doppelpuncte.

Auf der Geraden $\mathfrak{o}\mathfrak{p}_1$, findet man als Puncte der c' die $\rho-3$ harmonischen Mittelpuncte des Systems $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, ... , und auf $\mathfrak{o}\mathfrak{p}_2$ hat dieselbe Curve die $\rho-3$ harmonischen Mittelpuncte des Systems $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, ... , folglich enthält die Doppelgeneratrix $\mathfrak{o}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ des Kegels $2(\rho-3)$ Puncte von c'. Einer davon ist $\mathfrak{p}_1$, ein andrer $\mathfrak{p}_2$. Jeder dieser Puncte ist für c ein Doppelpunct und ein einfacher Punct für c', und vertritt also zwei Durchschnittspuncte der Curven c, c'. Die $\varkappa$ Sehnen der Curve (ξ), welche durch $\mathfrak{o}$ gehen, geben folglich $4\varkappa$ Durchschnittspuncte der Curven c, c'.

c. Die Puncte, in denen die Cuspidalcurve (ν) und die θ stationären Generatrixen von F den Kegel (ξ) treffen. Die Gerade, welche von $\mathfrak{o}$ nach dem Puncte $\mathfrak{p}$ der Curve (ξ) geht, treffe in $\mathfrak{m}$ die Linie $(\nu+\theta)$ und ausserdem F in weiteren $\rho-4$ Puncten $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$,... Da $\mathfrak{m}$ zwei Durchschnittspuncte von $\mathfrak{o}\mathfrak{p}$ mit F darstellt, so ist $\mathfrak{m}$ auch einer der harmonischen Mittelpuncte, deren Ort c' ist. Jede Ebene durch $\mathfrak{m}$ trifft in diesem Puncte c in zwei zusammenfallenden Puncten, weil $\mathfrak{m}$ ein gewöhnlicher Punct für den Kegel (ξ) und ein Doppel-

*) *Einleitung*, N.º 68.

punct (Uniplanarpunct) für F ist. Da nun alle Geraden, die mit F einen dreipunctigen Contact in $\mathfrak{m}$ haben, in einer einzigen Ebene liegen, so ist die Durchschnittsgerade dieser Ebene mit derjenigen, welche den Kegel (ξ) längs $\mathfrak{op}$ berührt, die einzige Tangente der Curve c in $\mathfrak{m}$, und $\mathfrak{m}$ ist folglich für c eine Spitze. Eine beliebig durch $\mathfrak{op}$ gezogene Ebene schneidet den Kegel (ξ) in anderen $\xi-1$ Generatrixen, deren eine $\mathfrak{op}'$ die Curve c in den Puncten $\mathfrak{m}', \mathfrak{m}'', \mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2' \ldots$ trifft. Nähert sich $\mathfrak{op}'$ unendlich der Geraden $\mathfrak{op}$, das heisst, wird die Ebene Tangentialebene des Kegels, so nähern sich die Puncte $\mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots$ unendlich den Puncten $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots$ und die beiden andern $\mathfrak{m}', \mathfrak{m}''$ nähern sich unendlich dem Puncte $\mathfrak{m}$ und also auch sich selbst untereinander. Wenn sich aber die Puncte $\mathfrak{m}', \mathfrak{m}''$ in einen vereinigen, so fällt auch einer der harmonischen Mittelpuncte auf $\mathfrak{op}'$ mit ihm zusammen, das heisst, die beiden Curven c, c' haben in $\mathfrak{m}$ dieselbe Tangente $\mathfrak{mm}'$ oder $\mathfrak{mm}''$. Folglich repräsentiert $\mathfrak{m}$ drei Durchschnittspuncte der Curven c, c'. Die Zahl der zu $\mathfrak{m}$ analogen Puncte ist gleich der Zahl der scheinbaren Durchschnittspuncte der Curve (ξ) mit der Linie ($\nu+\theta$). Die Curven (ξ) und (ν) haben gemein:

1. die Berührungspuncte der α stationären Ebenen;
2. die β Cuspidalpuncte der Curve (ν); jeder derselben zählt für drei Durchschnitts puncte der beiden Curven, weil diese in ihm dieselbe Tangente haben (107);
3. die λ Cuspidalpuncte der Curve (ξ); jeder von ihnen zählt für zwei Durchschnittspuncte, weil in ihnen die beiden Curven nicht dieselbe Tangente haben;
4. die θ Berührungspuncte der stationären Tangenten; jeder derselben zählt für drei Durchschnittspuncte, weil in ihnen die beiden Curven drei Puncte in gerader Linie gemein haben;
5. Die 2ω Berührungspuncte der Doppeltangenten; jeder derselben zählt für zwei Durchschnittspuncte, weil in ihnen die beiden Curven (ν) und (ξ) dieselben Tangenten haben;
6. Die ϑ' Doppelpuncte der Curve (ν), welche, als vierfache Puncte der Curve (ξ), $2.4.\vartheta'$ Durchschnittspuncten gleich gelten.

Die Zahl der scheinbaren Durchschnittspuncte der Curven (ξ), (ν) ist daher

$$\nu\xi-\alpha-3\beta-2\lambda-3\theta-4\omega-8\vartheta'.$$

Jede der θ stationären Geraden hat (100) mit der Curve (ξ) einen dreipunctigen Contact und ausserdem $\rho-6$ gemeinschaftliche Puncte, von denen jeder für die Curve (ξ) stationär ist und folglich zwei wirkliche Durchschnittspuncte darstellt. Die Zahl der scheinbaren Durchschnittspuncte der Curve (ξ) mit der stationären Geraden ist also

$$\xi-2(\rho-6)-3,$$

und folglich ist die Zahl der scheinbaren Durchschnittspuncte der Curve (ξ) mit der Linie ($\nu+\theta$) gleich

$$\nu\xi-\alpha-3\beta-2\lambda-3\theta-4\omega-8\vartheta'+\theta(\xi-2\rho+9).$$

d. Die Puncte, in denen die ω Doppelgeneratrixen von F den Kegel (ξ) treffen. Wenn die von $\mathfrak{o}$ nach einem Puncte $\mathfrak{p}$ der Curve (ξ) gezogene Gerade die Doppelgeneratrix t in $\mathfrak{m}$ trifft, so gilt $\mathfrak{m}$ für zwei Durchschnittspuncte von $\mathfrak{op}$ mit F und ist daher ein Punct der Curve c', des Ortes der harmonischen Mittelpuncte. Ferner ist $\mathfrak{m}$ für die Curve c ein Doppelpunct, weil diese in ihm zwei Tangenten besitzt, welche die Durchschnittsgeraden der Tangentialebene des Kegels (ξ) längs $\mathfrak{op}$ mit den Tangentialebenen von F längs t sind. Die Gerade t hat mit der Curve (ξ) zwei dreipunctige Berührungen und ausserdem noch $\rho-8$ gemeinsame Puncte, die für genannte Curve Doppelpuncte sind; folglich ist die Zahl der scheinbaren Durchschnittspuncte dieser Curve mit den ω Doppelgeneratrixen gleich $\omega\big(\xi-2(\rho-8)-2.3\big)$, das heisst $\omega(\xi-2\rho+10)$. Jeder dieser Puncte zählt für zwei Durchschnittspuncte der Curven c, c'.

e. Die Doppelpuncte der Curve (ν), welche für die Curve (ξ) vierfach sind. Ist $\mathfrak{m}$ einer dieser Puncte, so ist $\mathfrak{om}$ eine vierfache Generatrix des Kegels (ξ). Wir wollen diese Gerade so ansehen, als sei sie durch Uebereinanderlagern von vier verschiedenen Generatrixen erzeugt: in jeder derselben fallen zwei von den $\rho-2$ Puncten der Curve c mit $\mathfrak{m}$ zusammen, folglich ist $\mathfrak{m}$ auch ein harmonischer Mittelpunct, das heisst ein Punct von c'. Der Punct $\mathfrak{m}$ repräsentiert für die Curve c und auf jeder der vier Generatrixen einen Doppelpunct mit zusammenfallenden Tangenten, weil die Tangenten die Durchschnittsgeraden der Tangentialebene des Kegels (ξ) längs $\mathfrak{om}$ mit den Tangentialebenen der Developpablen in $\mathfrak{m}$ sein würden, und diese Geraden zusammenfallen, da diese drei Ebenen durch ein und dieselbe Gerade gehen. (In der That ist die einzige Tangente der Curve (ξ) in $\mathfrak{m}$ genau der Durchschnitt der beiden Tangentialebenen von F). Also gilt $\mathfrak{m}$ für 3.4 Durchschnittspuncte der Curven c, c'.

111. Die Durchschnittspuncte der Curven c, c' sind also durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$\begin{aligned}\xi(\rho-2)(\rho-3)=\mu(\xi-2\rho+8)+4\varkappa+3(\nu\xi-\alpha-3\beta-2\lambda-3\theta-4\omega-8\vartheta')\\ +3\theta(\xi-2\rho+9)+2\omega(\xi-2\rho+10)+12\vartheta'.\end{aligned}$$

Aus der dritten Gleichung der Nr. 97 erhält man aber:

$$\rho(\rho-1)-\mu-3(\nu+\theta)-2\omega=2\xi,$$

also:

$$2\xi(\xi-2\rho+3)=-2\mu(\rho-4)+4\varkappa-3(\alpha+3\beta+2\lambda)-6\theta(\rho-3)-4\omega(\rho-2)-12\vartheta'.$$

Addiert man diese Gleichung zu der mit 4 multiplicierten ersten Gleichung in Nr. 109, und setzt für β den äquivalenten Ausdruck (97):

$$6\rho-8\mu+3\alpha-2\theta,$$

so erhält man:

$$\xi(\xi-1)-2\varkappa-2\omega(\rho-8)-3\lambda-3\theta(\rho-6)-6\tau-18\vartheta'=\rho(\mu-3)-3\alpha.$$

112. Daraus ergibt sich sogleich die Classe der Curve (ξ). Diese Curve hat $\varkappa$ scheinbare Doppelpuncte, $\omega(\rho-8)$ wirkliche Doppelpuncte, $\lambda+\theta(\rho-6)$ stationäre Puncte, τ dreifache und ϑ' vierfache Puncte, von denen jeder sechs Doppelpuncten und zwei Spitzen gleich gilt (106, *Anmerkung*). Ausserdem hat die Curve (ξ) noch weitere γ' Doppelpuncte entsprechend den Ebenen, welche F längs zwei verschiedener Generatrixen berühren.

Betrachten wir nähmlich eine solche Ebene, welche die Curve (ν) in zwei Puncten $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ osculiert und F längs der beiden Geraden $\mathfrak{n}\mathfrak{m}, \mathfrak{n}\mathfrak{m}'$ berührt. Diese Ebene schneidet F längs einer Curve l der ($\rho-4$)-ten Ordnung und ($\mu-2$)-ter Classe, mit $\nu+\theta-6$ Spitzen, also im Besitz von

$$\frac{1}{2}\Big((\rho-4)(\rho-5)-(\mu-2)-3(\nu+\theta-6)\Big)=\xi+\omega-4(\rho-5)$$

Doppelpuncten. Der Punct $\mathfrak{n}$ ist für den vollständigen Schnitt vierfach und stellt also vier Durchschnittspuncte der Ebene $\mathfrak{m}\mathfrak{m}'\mathfrak{n}$ mit der Knotencurve dar, und folglich fallen die übrigen $4(\rho-6)$ Durchschnittspuncte zu zwei und zwei auf die Durchschnittspuncte von l mit den Geraden $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}'\mathfrak{n}$; das heisst, jede von diesen Geraden berührt l in einem Puncte ($\mathfrak{m}$ oder $\mathfrak{m}'$) und schneidet sie noch in andern $\rho-6$ Puncten. Die Ebene $\mathfrak{m}\mathfrak{m}'\mathfrak{n}$ hat also mit der Knotencurve in $\mathfrak{n}$ eine vierpunctige Berührung und noch $2(\rho-6)$ andere zweipunctige Contacte, und jede der Geraden $\mathfrak{n}\mathfrak{m}, \mathfrak{n}\mathfrak{m}'$ trifft nicht mehr als $\rho-6$ andere Generatrixen. Schneiden wir also die Curve (ξ) durch eine Ebene, die durch $\mathfrak{n}\mathfrak{m}$ geht oder auch durch $\mathfrak{n}\mathfrak{m}'$, so gilt $\mathfrak{n}$ immer für zwei zusammenfallende Durchschnittspuncte; das heisst $\mathfrak{n}$ ist ein Doppelpunct für die Curve (ξ). Man sieht nun leicht, dass die beiden Tangenten dieser Curve in $\mathfrak{n}$ in der Ebene $\mathfrak{m}\mathfrak{m}'\mathfrak{n}$ enthalten sind und mit den beiden Generatrixen $\mathfrak{n}\mathfrak{m}, \mathfrak{n}\mathfrak{m}'$ ein harmonisches Büschel bilden *).

Dies vorausgesetzt, ist mit Rücksicht auf die letzte Gleichung der Nr. 111 die Classe der Knotencurve, das heisst die Ordnung der Developpablen, welche von ihren Tangenten erzeugt wird, gleich

$$\rho(\mu-3)-3\alpha-2\gamma'.$$

Gemäss dem Dualitätsprincip ist dann die Ordnung der doppeltberührenden Developpablen der Curve (ν) gleich

$$\rho(\nu-3)-3\beta-2\vartheta'.$$

*) Die correlative Eigenschaft ist: Wenn die Curve (ν) einen Doppelpunct $\mathfrak{m}$ hat, so berührt die Ebene der beiden Tangenten die doppeltberührende Developpable (die von der Classe η ist) längs zwei Geraden, welche durch $\mathfrak{m}$ gehen, und den beiden Tangenten der Cuspidalcurve harmonisch conjugiert sind. [58] Diese beiden Geraden sind die Spuren der Ebenen, welche in $\mathfrak{m}$ mit der Knotencurve einen siebenpunctigen Contact haben.

Capitel V.

Projectivische Flächenbüschel. [59]

. . . .

118. Die Zahl s der Geraden, die durch einen festen Punct o gehen, und jede die Durchschnittscurve zweier Flächen F_{ν_1}, F_{ν_2} in zwei Puncten treffen, kann man auch direct, wie folgt, bestimmen.

Wie es schon anderswo (77-79) gezeigt ist, bilde man für jede der beiden gegebenen Flächen die Reihe der perspectivischen Flächen F'_{ν_1}, F'_{ν_2} und die Reihe der abgeleiteten Flächen $\mathcal{F}_{\nu_1-1}$, $\mathcal{F}_{\nu_2-1}$ entsprechend den verschiedenen Werthen eines gewissen Doppelverhältnisses und zwar unter Benutzung des Poles o und einer willkürlichen Ebene P. Die so bestimmten vier Reihen von Flächen sind projectivisch, wenn man nur als entsprechende Elemente diejenigen Flächen annimmt, die ein und demselben Werthe des Doppelverhältnisses entsprechen.

Die Ordnung und der Index der Reihen, die durch die Flächen F'_{ν_1}, F'_{ν_2} gebildet werden, sind ν_1, ν_2, und also ist *) der Ort der gemeinschaftlichen Curve zweier entsprechender Flächen dieser Reihen von der $2\nu_1\nu_2$-ten Ordnung. In diesem Orte ist ferner die Ebene P $\nu_1\nu_2$-mal enthalten. Denn die ν_1 Flächen der ersten Reihe und die ν_2 Flächen der zweiten Reihe, welche durch einen beliebigen Punct p von P gehen, fallen mit der Ebene P zusammen, weil alle Flächen jeder Reihe durch ein und dieselbe Curve, die in der Ebene P liegt, gehen. Der Punct p gehört daher ν_1 Flächen der ersten und ν_2 Flächen der zweiten Reihe an, und jede beliebige der letzten kann als jeder beliebigen der ersten entsprechend angenommen werden; also ist auch p ein $(\nu_1\nu_2)$-facher Punct für den durch diese beiden Reihen erzeugten Ort.

Dieser Ort ist, von der Ebene P abgesehen, aus einer Fläche $\nu_1\nu_2$-ter Ordnung gebildet, die nichts Anderes ist, als der Kegel K, dessen Scheitel in o liegt, und dessen Directrix die Curve $(\nu_1\nu_2)$ ist, welche beiden Flächen gemein ist; denn dieser Kegel geht durch die gemeinsame Curve irgend zwei entsprechender Flächen F_{ν_1}, F_{ν_2}.

In ähnlicher Weise erzeugen die beiden Reihen der $\mathcal{F}_{\nu_1-1}$, $\mathcal{F}_{\nu_2-1}$ eine Fläche **S** von der Ordnung $(\nu_1-1)(\nu_2-1)$. Nun gehört jeder den Flächen F_{ν_1} und $\mathcal{F}_{\nu_1-1}$ gemeinschaftliche Punct auch der entsprechenden Fläche F'_{ν_1} an, und ebenso jeder den Flächen F_{ν_2} und $\mathcal{F}_{\nu_2-1}$ gemeinschaftliche Punct auch der entsprechenden F'_{ν_2}, und so muss also jeder Punct a', der auf dem Orte **S** liegt — und daher in zwei entsprechenden Flächen $\mathcal{F}_{\nu_1-1}$, $\mathcal{F}_{\nu_2-1}$ — und in der Curve $F_{\nu_1}F_{\nu_2}$, auch in zwei entsprechenden Flächen F'_{ν_1}, F'_{ν_2}, liegen. Der Strahl oa' enthält folglich ausserdem noch einen Punct a, der F_{ν_1} und

*) *Einleitung*, Nr. 83.

F_{ν_2} gemein ist, das heisst, dieser Strahl trifft die Curve $F_{\nu_1}F_{\nu_2}$ in zwei *getrennten* Puncten. Ich sage getrennt, weil zwei homologe Puncte der Flächen F_ν, F'_ν nur zusammenfallen, wenn sie in der ersten Polarfläche von o in Bezug auf F_ν liegen; die beiden Puncte a, a' fallen daher nur dann zusammen, wenn F_{ν_1}, F_{ν_2} mit ihrer ersten Polarflächen einen gemeinsamen Punct haben, oder auch — wegen der Willkürlichkeit des Poles o — wenn F_{ν_1} und F_{ν_2} einen vielfachen Punct gemein haben.

Halten wir also fest, dass o ein ganz beliebig gegebener Punct ist, und dass F_{ν_1}, F_{ν_2} keine gemeinschaftlichen vielfachen Puncte besitzen, wenn sie auch Berührungspuncte haben, so sind die $\nu_1\nu_2(\nu_1-1)(\nu_2-1)$ Durchschnittspuncte von **S** mit der Curve $F_{\nu_1}F_{\nu_2}$ zu zwei und zwei mit dem Pole o in gerader Linie, das heisst, durch o gehen

$$s=\frac{1}{2}\nu_1\nu_2(\nu_1-1)(\nu_2-1)$$

Sehnen der Curve $F_{\nu_1}F_{\nu_2}$.

119. Wenn die Flächen F_{ν_1}, F_{ν_2} einen gemeinschaftlichen Punct a haben, der bezüglich π_1-fach, π_2-fach ist, so ist im Allgemeinen a für die gemeinschaftliche Durchschnittscurve beider Flächen $\pi_1\pi_2$-fach. Da nun der Strahl oa die Fläche F_{ν_1} anderswo nur noch in $\nu_1-\pi_1$ und F_{ν_2} nur noch in $\nu_2-\pi_2$ Puncten trifft, so werden in a

$$(\nu_1-1)-(\nu_1-\pi_1)=\pi_1-1$$

Flächen $\mathscr{F}_{\nu_1-1}$ mit der ersten Polarfläche von o in Bezug auf F_{ν_1} zusammenfallen und ebenso

$$(\nu_2-1)-(\nu_2-\pi_2)=\pi_2-1$$

Flächen $\mathscr{F}_{\nu_2-1}$ mit der ersten Polarfläche von o in Bezug auf F_{ν_2}.

Eine beliebige von diesen π_1-1 Flächen $\mathscr{F}_{\nu_1-1}$ kann man als correspondierende Fläche für jede beliebige der π_2-1 Flächen $\mathscr{F}_{\nu_2-1}$ ansehen, und folglich ist a für **S** ein $(\pi_1-1)(\pi_2-1)$-facher Punct und stellt in Folge dessen $\pi_1\pi_2(\pi_1-1)(\pi_2-1)$ Durchschnittspuncte von **S** und der Curve $F_{\nu_1}F_{\nu_2}$ dar. Die Zahl der Sehnen dieser Curve, welche durch o gehen ist also

$$s=\frac{1}{2}\Big(\nu_1\nu_2(\nu_1-1)(\nu_2-1)-\pi_1\pi_2(\pi_1-1)(\pi_2-1)\Big)$$

Unter derselben Voraussetzung, wie wir sie oben gemacht haben, ist der Punct a für alle ersten Polarflächen in Bezug auf F_{ν_1}, F_{ν_2} bezüglich (π_1-1)-fach und (π_2-1)-fach (85) und ist also für die Fläche $(\nu_1+\nu_2-2)$-ter Ordnung, den Ort der Puncte, deren Polarebenen für die gegebenen Flächen sich auf einer festen Geraden schneiden (117), ein $(\pi_1+\pi_2-2)$-facher Punct. Die Tangenten der Curve $F_{\nu_1}F_{\nu_2}$ bilden also in diesem Falle eine Developpable von der Ordnung

$$\rho=\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)-2\delta-3\sigma-\pi_1\pi_2(\pi_1+\pi_2-2).$$

. . . .

121. . . . .

Haben die beiden Flächen (ν_1), (ν_2) einen gemeinschaftlichen Punct α, der für die Flächen bezüglich π_1-fach, π_2-fach ist und ψ-fach, ψ'-fach für die Curven (φ), (φ'), so dass also $\psi+\psi'=\pi_1\pi_2$ ist, so erhalten wir an Stelle der obigen Gleichungen (120) folgende anderen:

$$\begin{aligned}
&\nu_1\nu_2(\nu_1-1)(\nu_2-1)-\pi_1\pi_2(\pi_1-1)(\pi_2-1)=2(8+8'+\varkappa),\\
&\rho=\varphi(\varphi-1)-2(8+\delta)-3\sigma-\psi(\psi-1),\\
&\rho'=\varphi'(\varphi'-1)-2(8'+\delta')-3\sigma'-\psi'(\psi'-1),\\
&(\nu_1+\nu_2-2)\varphi=\rho+\iota+2\delta+3\sigma+(\pi_1+\pi_2-2)\psi,\\
&(\nu_1+\nu_2-2)\varphi'=\rho'+\iota+2\delta'+3\sigma'+(\pi_1+\pi_2-2)\psi',\\
&\varphi(\nu_1-1)(\nu_2-1)-\psi(\pi_1-1)(\pi_2-1)=28+\varkappa,\\
&\varphi'(\nu_1-1)(\nu_2-1)-\psi'(\pi_1-1)(\pi_2-1)=28'+\varkappa,
\end{aligned}$$

Es hat keine Schwierigkeit die analogen Gleichungen für den Fall aufzustellen, dass die beiden Flächen sich längs drei getrennter Curven schneiden; u. s. w.

. . . .

Capitel VII.

Projectivische lineare Flächensysteme dritter Stufe. [60]

. . . .

141. Hat man fünf Flächen bezüglich von den Ordnungen ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, ν_5, so bilden die ersten Polarflächen der Puncte des Raumes in Bezug auf jene Flächen fünf lineare projectivische Systeme von den Ordnungen ν_1-1, ν_2-1, ν_3-1, ν_4-1, ν_5-1. Man hat also den Satz (140):

Der Ort eines Punctes, dessen Polarebenen in Bezug auf fünf gegebene Flächen von den Ordnungen ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, ν_5, *durch denselben Punct gehen, ist eine Raumcurve von der Ordnung*

$$\nu_1\nu_2+\nu_1\nu_3+\ldots+\nu_4\nu_5-4(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_5)+10.$$

Diese Raumcurve, *die Jacobiana der fünf gegebenen Flächen*, liegt offenbar auf den Jacobianen der gegebenen Flächen zu vier und vier genommen.

Ist $\nu=\nu_1=\nu_2=\nu_3=\nu_4=\nu_5$, so erhält man eine Curve von der $10(\nu-1)^2$-ten Ordnung, den Ort der Puncte, deren Polarebenen in Bezug auf die Flächen eines linearen Systems vierter Stufe und ν-ter Ordnung durch den nämlichen Punct gehen. Diese Curve kann man *die Jacobiana des linearen Systems* nennen.

Ist $\nu_5=1$, so erhält man eine Curve von der Ordnung

$$\nu_1\nu_2+\ldots+\nu_3\nu_4-3(\nu_1+\ldots+\nu_4)+6,$$

Ort eines Punctes, dessen Polarebenen in Bezug auf vier gegebene Flächen auf einer gegebenen Ebene zusammenlaufen. Sind sie alle von derselben Ordnung ν, so findet man dass der Ort eines Punctes, dessen Polarebenen in Bezug auf die Flächen eines linearen Systems dritter Stufe und ν-ter Ordnung in einen Punct einer festen Ebene zusammenlaufen, eine Raumcurve der $6(\nu-1)^2$-ten Ordnung ist.

Für $\nu_4=\nu_5=1$ erhält man den Ort eines Punctes, dessen Polarebenen in Bezug auf drei Flächen sich auf einer gegebenen Geraden treffen. Sind die drei Flächen von der nämlichen Ordnung ν, so ist der Ort eine Curve der $3(\nu-1)^2$-ten Ordnung.

Wäre $\nu_3=\nu_4=\nu_5=1$, so erhielte man den Ort eines Punctes, dessen Polarebenen in Bezug auf zwei gegebene Flächen durch einen festen Punct gehen, das heisst, wir erhalten den Satz:

Die Curve der $(\nu_1-1)(\nu_2-1)$*-ten Ordnung, Durchschnitt der ersten Polarflächen eines gegebenen Punctes in Bezug auf zwei gegebene Flächen* ν_1*-ter und* ν_2*-ter Ordnung, ist die Jacobiana folgender fünf Flächen: der beiden gegebenen und drei beliebiger Ebenen, welche durch den gegebenen Punct gehen.*

. . . .

143. Auch hier kann man als Anwendung dieses Satzes *die Jacobiana von sechs gegebenen Flächen* betrachten, die aus den

$$\nu_1\nu_2\nu_3+\nu_1\nu_2\nu_4+\ldots+\nu_4\nu_5\nu_6-4(\nu_1\nu_2+\ldots)+10(\nu_1+\ldots)-20$$

Puncten besteht, von denen jeder die Eigenschaft hat, dass seine Polarebenen in Bezug auf die sechs gegebenen Flächen der Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_6$ durch den nämlichen Punct gehen. Hierin ist als Specialfall die Zahl der Puncte enthalten, deren Polarebenen in Bezug auf je fünf, vier und drei der gegebenen Flächen sich bezüglich auf einer gegebenen Ebene, einer gegebenen Geraden und in einem gegebenen Puncte treffen. Zum Beispiel findet man den Satz:

Die $(\nu_1-1)(\nu_2-1)(\nu_3-1)$ *gemeinschaftliche Puncte der ersten Polarflächen eines Punctes in Bezug auf drei gegebene Flächen bilden die Jacobiana folgender sechs Flächen: der drei gegebenen und dreier Ebenen, die durch den gegebenen Punct gehen.*

. . . .

Zusatz zu N.° 214. [61]

Von den beiden cubischen Curven, welche der Hessiana und zwei conjugierten Ebenen der Involution gemeinschaftlich sind, enthält die eine die Puncte $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}'$ und die andere die Puncte $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}$ (208); folglich sind die beiden cubischen Curven entsprechende Curven (168).

Dem ebenen Schnitte, der aus der ersten cubischen Curve und der Geraden p besteht, entspricht (199) das durch die andere cubische Curve und die drei Geraden p_1, p_2, p_3 die im Puncte $\mathfrak{p}$ zusammenlaufen, gebildete System. Folglich:

Die cubischen Curven, die man aus der Hessiana mittelst Ebenen schneidet, welche durch die Gerade p gehen, sind zu zwei und zwei correspondierende Curven. Zwei entsprechende cubische Curven werden vom Puncte $\mathfrak{p}$ aus mittelst desselben Kegels gesehen, der folglich die gemischte cubische Polarfläche der Ebenen beider Curven ist.

Ist die schneidende Ebene eine der Doppelebenen der Involution, so entspricht die cubische Curve, welche dann als Durchschnitt mit der Hessiana resultiert, sich selbst; das heisst, ihre Puncte $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$ sind zu zwei und zwei entsprechend. Offenbar ist diese Curve die Hessiana der cubischen Curve, längs deren die nämliche Ebene die Fundamentalfläche schneidet. Die Polarebene von $\mathfrak{c}$ berührt die Hessiana in $\mathfrak{c}'$ (183) und geht folglich durch $\mathfrak{p}$; also liegen (62) alle Puncte $\mathfrak{c}$ auf der ersten Polarfläche von $\mathfrak{p}$. Daraus schliesst man, dass die erste Polarfläche von $\mathfrak{p}$ aus den Doppelebenen der Involution zusammengesetzt ist, von denen in N.° 214 gesprochen wurde.

Wir fügen noch hinzu, dass sämmtliche gemeine und gemischte cubische Polarflächen der durch p gehenden Ebenen in $\mathfrak{p}$ einen Doppelpunct und ausserdem drei andere Doppelpuncte besitzen, die in ein und derselben Ebene durch p und bezüglich auf den Geraden p_1, p_2, p_3 liegen. Eine solche Fläche geht in einen Kegel über, wenn sie sich auf zwei conjugierte Ebenen der obengenannten Involution bezieht.