80.

SULLA TRASFORMAZIONE DELLE CURVE IPERELLITTICHE.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, volume II (1869), pp. 566-571.

Dicesi *iperellittica* una curva le cui coordinate siano esprimibili razionalmente per mezzo di un parametro λ e della radice quadrata di una funzione intera $Q(\lambda)$ del grado $2p+2$. Una curva siffatta può essere trasformata con processo simile a quello adoperato, pel caso di $p=1$ e $p=2$, dai signori CLEBSCH e GORDAN nell'eccellente loro opera *Theorie der Abelschen Functionen* (p. 69 e 77).

Le espressioni delle coordinate siano

$$(1) \qquad x_i \equiv w_i + q_i \sqrt{Q}\,, \quad (i=1,\,2,\,3),$$

dove le w, q siano funzioni intere di λ, rispettivamente de' gradi m e $m-p-1$. Suppongasi

$$Q=h^2(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)\dots(\lambda-a_{2p+2}),$$

dove si fa per brevità

$$h^2=\frac{(a_1-a_2)^{2p}.\,(a_3-a_2)^{2p}.\,(a_3-a_1)}{(a_4-a_2)(a_5-a_2)\dots(a_{2p+2}-a_2)}.$$

Poi pongasi

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} y_1=(a_3-a_2)(\lambda-a_1), \\ y_2=(a_3-a_1)(\lambda-a_2), \end{array}\right.$$

donde segue

$$y_1-y_2=(a_1-a_2)(\lambda-a_3),$$

$$y_1-k_r^2 y_2=\frac{(a_1-a_2)(a_3-a_2)}{a_{r+3}-a_2}(\lambda-a_{r+3}),$$

dove

$$k_r^2=\left(\frac{a_3-a_2}{a_3-a_1}\right):\left(\frac{a_{r+3}-a_2}{a_{r+3}-a_1}\right), \qquad (r=1,\,2,\dots,\,2p-1).$$

Risulta così

$$y_1 y_2 (y_1 - y_2)(y_1 - k_1^2 y_2)(y_1 - k_2^2 y_2) \ldots (y_1 - k_{2p-1}^2 y_2) = Q;$$

epperò, se si pone inoltre

$$(3) \qquad y_3 y_1 y_2 (y_1 - k_1^2 y_2)(y_1 - k_2^2 y_2) \ldots (y_1 - k_{p-2}^2 y_2) = \sqrt{Q},$$

l'eliminazione di λ fra le ultime due equazioni darà

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_1 y_2 (y_1 - k_1^2 y_2)(y_1 - k_2^2 y_2) \ldots (y_1 - k_{p-2}^2 y_2) y_3^2 - \\ -(y_1 - y_2)(y_1 - k_{p-1}^2 y_2) \ldots (y_1 - k_{2p-1}^2 y_2) = 0. \end{array} \right.$$

Quest'equazione rappresenta una curva d'ordine $p+2$, dotata di un punto p-plo in $y_1 = y_2 = 0$, senza altri punti multipli *), epperò del *genere* p: curva, la quale ha inoltre la proprietà speciale che ciascuna delle p rette

$$y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_1 - k_1^2 y_2 = 0,\ y_1 - k_2^2 y_2 = 0, \ldots, y_1 - k_{p-2}^2 y_2 = 0,$$

tangenti ai rami incrociati nel punto multiplo, ha ivi colla curva $p+2$ intersezioni coincidenti, e (per conseguenza) che dal punto multiplo partono *solamente* $p+2$ tangenti

$$y_1 - y_2 = 0,\ y_1 - k_{p-1}^2 y_2 = 0,\ y_1 - k_p^2 y_2 = 0, \ldots, y_1 - k_{2p-1}^2 y_2 = 0,$$

i punti di contatto delle quali sono tutti nella retta $y_3 = 0$. In altre parole, i punti della curva (4) sono conjugati a due a due, in modo che due punti conjugati sono sempre separati armonicamente mediante il punto multiplo e la retta fissa $y_3 = 0$: e le tangenti in due punti conjugati si segano su questa medesima retta fissa e sono separate armonicamente per mezzo di essa e del punto multiplo. Ne segue che la curva ha $8p$ flessi (distinti dal punto multiplo, nel quale ciascuno de' p rami ha un'inflessione), conjugati a due a due; che le $8p(p-1)$ tangenti doppie sono pur esse conjugate a due a due, ecc.; e che, se si trasforma la curva per omologia o prospettiva, mandando la retta $y_3 = 0$ all'infinito, il punto multiplo diventa un centro di simmetria per la curva **). Anche senza fare questa trasformazione, possiamo dire che il punto multiplo è per la curva *un centro di omologia armonica.*

Dalle (2) si ha

$$(5) \qquad \lambda = \frac{a_2 (a_3 - a_1) y_1 - a_1 (a_3 - a_2) y_2}{(a_3 - a_1) y_1 - (a_3 - a_2) y_2},$$

*) Il che si ricava subito dalla considerazione delle intersezioni della curva colle prime polari.

**) Cfr. STEINER, *Ueber solche algebraische Curven, welche Mittelpuncte haben, ecc.* (G. di Crelle, t. 47).

così che, sostituendo nelle (1) i valori di λ e $\sqrt{Q}$ dati dalle (5), (3), si otterranno le x espresse *razionalmente per mezzo* delle y. Le espressioni risultanti siano

$$(6)\qquad x_i \equiv [w_i] + [q_i] y_1 y_2 (y_1 - k_1^2 y_2) \ldots (y_1 - k_{p-2}^2 y_2) y_3,$$

dove le $[w]$, $[q]$ sono funzioni intere, omogenee nelle y_1, y_2, rispettivamente de' gradi m ed $m-p-1$.

Per tal modo la curva (1) è trasformata, punto per punto, nella curva (4) [43]. La curva (1) è dunque del genere p: l'ordine della medesima si determina come segue. Le intersezioni di essa con una retta arbitraria

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0$$

sono date dall'equazione di grado $2m$ in λ:

$$\left(\beta_1[w_1] + \beta_2[w_2] + \beta_3[w_3]\right)^2 - \left(\beta_1[q_1] + \beta_2[q_2] + \beta_3[q_3]\right)^2 \cdot Q = 0,$$

dove Q è dato dalla (3). Ora, è lecito bensì supporre che non vi sia alcun fattore comune a tutte le w e a tutte le q, simultaneamente; ma potranno esservi m_1 fattori comuni a Q ed alle w, ed inoltre m_2 altri fattori comuni alle tre funzioni $w - q^2 Q$. Tali fattori darebbero soluzioni indipendenti dalle β; perciò, detto n l'ordine della curva (1), sarà

$$n = 2m - m_1 - m_2.$$

Ciò si può significare anche in quest'altra maniera. I secondi membri delle (6), uguagliati a zero, danno tre curve d'ordine m individuanti la rete geometrica che servirebbe a trasformare la curva (4) nella curva (1). Tali curve hanno in $y_1 = y_2 = 0$ un punto $(m-1)$-plo con p tangenti comuni; questo punto equivale dunque ad $(m-1)p+p$ intersezioni della curva (3) con una qualunque della rete. Aggiungansi altre $m_1 + m_2$ intersezioni fisse, corrispondenti ai fattori summenzionati, e l'ordine ν della curva trasformata *) sarà

$$\nu = (p+2)m - mp - (m_1 + m_2) = n.$$

La trasformazione suesposta della curva (1) nella curva (4) presenta questa circostanza notabile, ch'essa conduce ad un'equazione della forma

$$y_3^2 \cdot \varphi(y_1, y_2) - \psi(y_1, y_2) = 0,$$

cioè ad una curva d'ordine $p+2$, dotata di un punto p-plo, il quale è per essa un centro di omologia armonica. Ora non sarà forse inopportuno di mostrare direttamente come ad una curva così particolare si possa giungere trasformando, punto per punto, la curva più generale d'ordine n e di genere p, la quale abbia un punto $(n-2)$-plo,

*) Op. cit. p. 35.

epperò inoltre $n-2-p$ punti doppj. Sia o il punto $(n-2)$-plo e $c_1, c_2, \dots, c_{2p+2}$ i punti di contatto delle $2(p+1)$ tangenti che escono da o. Trasformiamo *) questa curva mediante una rete di curve d'ordine $n-1$, aventi lo stesso punto $(n-2)$-plo o, colle stesse tangenti della curva data, e passanti per gli $n-2-p$ punti doppj e pei punti $c_1, c_2, \dots, c_p$ (scelti ad arbitrio fra i $2p+2$ sopra nominati). La curva trasformata sarà dell'ordine

$$\nu = n(n-1)-(n-2)^2-(n-2)-2(n-2-p)-p=p+2.$$

La rete contiene un fascio di curve, ciascuna delle quali è composta delle $n-2-p$ rette che da o vanno ai punti doppj, delle p rette $oc_1, oc_2, \dots, oc_p$ e di una retta variabile $o\gamma$: per ogni curva di questo fascio, i punti $c_1, c_2, \dots, c_p$ fanno le veci di p fra le $p+2$ intersezioni che in generale variano da una ad altra curva della rete; e non rimangono variabili che due punti γ_1, γ_2, situati in $o\gamma$. Perciò, a questo fascio corrisponderà (nel piano della curva trasformata) un fascio di rette incrociate in un punto o', multiplo secondo p per la curva trasformata, il quale ha per corrispondenti i punti $c_1, c_2, \dots, c_p$. Quando $o\gamma$ coincida con oc_r $(r=1, 2, \dots, p)$, i due punti variabili γ_1, γ_2 si riuniscono in c_r; perciò la curva trasformata è toccata in o' da p rette, ciascuna delle quali ha ivi con essa $p+2$ intersezioni coincidenti. Fra le curve del fascio vi sono quelle che si ottengono facendo prendere ad $o\gamma$ una delle posizioni $oc_{p+1}, oc_{p+2}, \dots, oc_{2p+2}$; ad esse corrisponderanno, per la curva trasformata, le rette tangenti che escono da o': e siccome i punti $c_{p+1}, c_{p+2}, \dots, c_{2p+2}$ sono tutti situati in una medesima curva della rete (la prima polare di o rispetto alla curva data), così i punti ove la curva trasformata è toccata dalle $p+2$ tangenti che escono da o' saranno tutti in una stessa retta (la retta corrispondente alla prima polare di o). Osserviamo inoltre che agli $n-2-p$ punti doppj della curva data corrispondono, nella trasformata, altrettante coppie di punti situati su rette del fascio o'. Ne segue che, se fra quelli vi sono $\varkappa$ regressi, così che il numero delle tangenti $oc_{p+1}, oc_{p+2}, \dots$ diminuiscasi di $\varkappa$, la curva trasformata avrà ancora lo stesso numero $p+2$ di tangenti che partono da o', ma i punti di contatto di $\varkappa$ fra esse corrisponderanno ai $\varkappa$ regressi della curva proposta, mentre i punti di contatto delle rimanenti saranno i corrispondenti dei $p+2-\varkappa$ punti $c_{p+1}, c_{p+2}, \dots$.

Per ultimo, vogliamo mettere in evidenza il significato geometrico delle formole (2), (3) che servono a passare dalla curva (1) alla (4). Siccome la (1) si può trasformare in una curva di ordine $p+2$, dotata di un punto p-plo, per la quale esista adunque

*) Questa trasformazione è una di quelle contemplate nelle mie due *Note sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* (Accad. di Bologna, 1863-65) [Queste Opere, n. **40, 62** (t. 2.º)].

un fascio di rette che la segano in *due soli punti variabili*, così per la (1) esisterà un fascio di curve (nella rete che serve alla trasformazione), ciascuna delle quali la incontrerà del pari in due soli punti variabili. Sia $u+\lambda v=0$ l'equazione di questo fascio (il cui ordine dicasi s), e supponiamo essere a_r $(r=1, 2, \ldots, 2p+2)$ i valori di λ corrispondenti a quelle curve del fascio che, riuniti i due punti variabili in uno solo, riescono tangenti alla curva data. Allora la trasformazione si opererà mediante le formole

$$\begin{aligned} y_1 &\equiv (a_3-a_2)(u+a_1 v)\Xi, \\ y_2 &\equiv (a_3-a_1)(u+a_2 v)\Xi, \\ y_3 &\equiv \Phi, \end{aligned}$$

ove $\Xi=0$ sia una curva d'ordine s', passante pei punti ove la curva data è toccata dalle curve

$$u+a_1 v=0,\ u+a_2 v=0, \ldots,\ u+a_p v=0,$$

e $\Phi=0$ sia una curva d'ordine $s+s'$, passante pei punti-base del fascio $u+\lambda v=0$ ed inoltre per le restanti $ns'-p$ intersezioni di Ξ colla curva data. La curva trasformata sarà dunque dell'ordine

$$\nu=n(s+s')-(ns-2)-(ns'-p)=p+2,$$

avrà in $y_1=y_2=0$ un punto p-plo, ed ivi $p+2$ intersezioni coincidenti con ciascuna delle p rette che corrispondono alle curve $u+a_1 v=0$, $u+a_2 v=0, \ldots,$ $u+a_p v=0$: ammetterà inoltre $p+2$ tangenti (le rette corrispondenti alle curve

$$u+a_{p+1} v=0,\ u+a_{p+2} v=0, \ldots,\ u+a_{2p+2} v=0)$$

che escono dal punto p-plo, ed i cui punti di contatto saranno in una retta. Questa retta sia $y_3=0$; possiamo dunque supporre che la curva $\Phi=0$ passi, non solo pei punti-base del fascio $u+\lambda v=0$ e per le $ns'-p$ intersezioni sopranominate di $\Xi=0$ colla curva data, ma anche pei punti ove questa è toccata dalle $p+2$ curve $u+a_{p+1} v=0$, $u+a_{p+2} v=0, \ldots,$ $u+a_{2p+2} v=0$. L'esistenza di questa curva $\Phi=0$, individuata dal fascio $u+\lambda v=0$ e dalla curva $\Xi=0$, costituisce una notabile proprietà delle curve iperellittiche.