## 81.

# INTORNO AL NUMERO DEI MODULI DELLE EQUAZIONI O DELLE CURVE ALGEBRICHE DI UN DATO GENERE.

Osservazioni dei professori F. CASORATI e L. CREMONA.

*Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, serie II, volume II (1869), pp. 620-625.

RIEMANN, nel § 12 della sua *Theorie der Abelschen Functionen* diede $3p-3$ come numero dei moduli delle equazioni o curve algebriche, appartenenti a un dato genere $p$ *). Invece il sig. CAYLEY, guidato da altre considerazioni, è arrivato al numero $4p-6$ **): la qual cosa è stata cagione che quest'argomento non venisse toccato dai professori CLEBSCH e GORDAN nella loro recente ed importante opera *Theorie der Abelschen Functionen* ***). In questi giorni poi è stata stampata nei *Mathematische Annalen* (t. 1.° p. 401), diretti dal medesimo sig. CLEBSCH e dal prof. NEUMANN, una breve nota, dove il sig. BRILL dimostra con trasformazioni analitiche che per $p=4$ il numero dei moduli è appunto il medesimo che è fornito dalla formola riemanniana.

Gli autori della presente comunicazione, in occasione delle lezioni da essi date nel corrente anno agli allievi del corso normale nel R. Istituto tecnico superiore di Milano, ebbero a fare sull'argomento alcune riflessioni, una parte delle quali credono opportuno di qui riprodurre.

*) A scanso d'equivoci in geometria, diciamo *genere* ciò che è detto *Klasse* da RIEMANN e che d'altronde il sig. CLEBSCH chiama pure *Geschlecht;* diciamo cioè appartenenti ad uno stesso genere tutte le equazioni fra due variabili $s$, $z$, o curve algebriche irreducibili, che si possono trasformare le une nelle altre mediante sostituzioni razionali: equazioni o curve che danno le funzioni di $z$, diramate come $s$. Un genere è definito dal numero $p$ e dai valori dei *moduli*, cioè di quelle costanti che non si possono espellere mediante trasformazioni birazionali (*eindeutige Transformationen*).

**) *Proceedings of the London Mathematical Society,* III (16 ottobre 1865).

***) Vedi pag. VII della prefazione.

*Osservazioni* del prof. CASORATI. — L'enumerazione delle costanti che restano essenzialmente arbitrarie conduce al numero $3p-3$, comunque la si faccia, sopra una equazione qualunque o sopra una di quelle di minimo grado, secondo RIEMANN (§ 13 della sua *Theorie*) o secondo CLEBSCH e GORDAN (op. cit. p. 65). Facciamola per quest'ultimo caso. Ivi, mediante la sostituzione

$$y_1 : y_2 : y_3 = \Phi_1 : \Phi_2 : \Phi_3, \tag{1}$$

dove le $\Phi=0$ rappresentano tre curve indipendenti, d'ordine $n-3$, passanti pei $d+r=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-p$ punti doppj e di regresso e per $p-3$ punti semplici di una data curva $f=0$ d'ordine $n$ e genere $p$, si trasforma questa in una *curva normale* d'ordine $p+1$, dotata di $\frac{p(p-3)}{2}$ punti doppj. L'equazione di questa curva normale, nella sua massima generalità, contiene

$$\frac{(p+1)(p+4)}{2}-\frac{p(p-3)}{2}=4p+2$$

costanti arbitrarie. Vediamo ora quanti siano i coefficienti disponibili nelle formole di trasformazione. Una $\Phi$, dovendo essere del grado $n-3$ ed annullarsi pei $d+r$ punti singolari della $f=0$, contiene $p$ coefficienti disponibili. Se fossero dati i $p-3$ punti semplici pei quali hanno a passare le tre $\Phi$, ciascuna di queste conterrebbe ancora soltanto 3 coefficienti disponibili, e le formole (1) ne conterrebbero 8. Aggiungendo dunque il numero $p-3$ delle costanti disponibili rappresentate dai $p-3$ punti suddetti, si ha in totale $p+5$ come numero dei coefficienti disponibili nella trasformazione. Potendosi con questi annullare altrettanti coefficienti della curva normale, le costanti arbitrarie che questa conserverà saranno in numero $4p+2-(p+5)=3p-3$.

Per togliere ogni dubbio su questa conclusione, bisogna però anche dimostrare che esistono veramente nella curva normale $p+5$ funzioni fra loro indipendenti dei $p+5$ coefficienti disponibili nella trasformazione. È per analogo motivo che RIEMANN alla prima aggiunge la seconda delle due dimostrazioni che si leggono nel § 12 della sua celebre Memoria. Lasciando stare questa seconda dimostrazione, contro la quale può muoversi obbiezione d'altra natura, cioè di poggiarsi sul principio di DIRICHLET, sembrerebbe però meno difficile di poter colmare l'accennata lacuna, anzichè quella che è lasciata dalla conclusione del sig. CAYLEY.

*Osservazioni* del prof. CREMONA.— Le precedenti considerazioni suggeriscono d'indagare se la curva normale d'ordine $p+1$, la quale contiene $4p+2$ costanti arbitrarie, possa essere trasformata *geometricamente* (giovandosi di quei $p-3$ punti arbitrarj) in altra analoga che involga soltanto $3p-3$ costanti; come per es. accadrebbe se si sapessero scegliere i $p-3$ punti arbitrarj in modo che la curva trasformata (d'ordine $p+1$) avesse $p-3$ cuspidi e $\frac{(p-2)(p-3)}{2}$ punti doppj. Questa curva conterrebbe $4p+2-(p-3)=3p+5$ costanti arbitrarie, che tosto si ridurrebbero a $3p-3$ mediante una trasformazione omografica *).

Assunta una curva normale d'ordine $p+1$, i suoi $\frac{p(p-3)}{2}$ punti doppj, insieme con $p-3$ punti semplici arbitrarj, costituiscono la base di una rete di curve d'ordine $p-2$, la quale, resa projettiva al sistema delle rette di un altro piano, serve a trasformare la curva data in un'altra curva normale, situata nel nuovo piano. I signori Clebsch e Gordan hanno dimostrato (il che del resto si vede subito coll'intuizione geometrica) che a ciascuno dei $\frac{p(p-3)}{2}$ punti doppj della nuova curva corrisponde una coppia di punti nella curva primitiva: ossia, in questa vi sono $\frac{p(p-3)}{2}$ coppie di punti, determinate dai $p-3$ punti arbitrarj, tali che pei punti di ciascuna coppia passano infinite curve della rete. Dunque, se i $p-3$ punti arbitrarj si suppongono scelti in modo che fra le $\frac{p(p-3)}{2}$ coppie corrispondenti ve ne siano $p-3$ costituite ciascuna da due punti infinitamente vicini, la curva trasformata avrà, fra i suoi $\frac{p(p-3)}{2}$ punti singolari, $p-3$ punti di regresso. Trattiamo ora i casi più semplici, cioè $p=4, 5, 6$ **).

1.° *Caso*, $p=4$. La curva normale è di 5.° ordine ed ha 2 punti doppj $a$, $b$. Prendendo in essa un punto qualunque $c$, le $\frac{p(p-3)}{2}=2$ coppie corrispondenti sono costituite dalle intersezioni della curva colle rette $ac$, $bc$. Dunque, se da $a$ o da $b$ si conduca una retta che tocchi altrove la curva in un punto $m$ e la seghi in un altro punto $n$, la rete delle coniche circoscritte al triangolo $abn$ trasformerà la curva proposta in un'altra dello stesso ordine, dotata di un punto doppio e di un regresso.

---

*) Per esempio: facendo coincidere 4 dei punti doppj o stazionarj coi 4 vertici $x_2=x_3=0$, $x_3=x_1=0$, $x_1=x_2=0$, $x_1=x_2=x_3$ del quadrangolo fondamentale, che definisce il sistema delle coordinate trilineari.

**) Pel caso eccezionale $p=1$ il numero dei moduli è 1. Per $p=2$, si hanno 3 moduli, d'accordo col numero riemanniano. Per $p=3$ le due formole di Riemann e Cayley coincidono somministrando 6 moduli. Basta una trasformazione omografica per ridurre la curva generale di 4.° ordine a contenere 6 sole costanti; per esempio, $x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)+(a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+ +a_{33}x_3^2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1+2a_{12}x_1x_2)^2=0$.

2.° *Caso*, $p=5$. La curva normale è di 6.° ordine ed ha 5 punti doppj $abcde$. Prendendo arbitrariamente un punto $m$ nella curva, la rete delle cubiche passanti per $abcde$ e toccanti in $m$ la medesima curva data determina $\frac{p(p-3)}{2}=5$ coppie di punti: sia $m'$ una delle posizioni che deve prendere $m$ affinchè una delle 5 coppie si riduca ad un punto $m''$ ed al suo infinitamente vicino; sia poi $fg$ una delle restanti 4 coppie. Allora è manifesto che la rete delle cubiche passanti per $abcdefg$ trasformerà la curva proposta in un'altra dello stesso ordine, dotata di 3 punti doppj e di 2 cuspidi (questi ultimi corrispondenti ad $m'$, $m''$).

3.° *Caso*, $p=6$. In questo caso ci gioveremo di considerazioni affatto diverse da quelle che precedono. La curva normale è del 7.° ordine, con 9 punti doppj. Prendansi questi come punti fondamentali per la rappresentazione, sul piano, di una superficie di 4.° ordine dotata di una retta doppia *); la nostra curva sarà allora l'imagine di una curva gobba dell'8.° ordine, che insieme con una del 4.° forma l'intersezione della superficie anzidetta con un'altra del 3.° ordine. La curva gobba non ha punti multipli; epperò, essendo essa del genere 6, il numero de' suoi punti doppj apparenti è $\frac{7.6}{2}-6=15$. Ne segue **) ch'essa ammette 5 rette, ciascuna delle quali incontra la curva in 4 punti. Fissiamo una di queste rette, e siano $abcd$ i suoi punti d'incontro colla curva.

Ora, la citata rappresentazione della superficie di 4.° ordine mostra che si può far corrispondere projettivamente gli elementi di due sistemi lineari, triplamenti infiniti: l'uno costituito dalle curve di 4.° ordine che nel piano rappresentativo passano pei 9 punti fondamentali ed hanno due rami incrociati in uno di questi; l'altro costituito dai piani dello spazio, considerati come seganti la curva gobba. Per tal modo è attuata la trasformazione della curva piana nella curva gobba: e siccome questa ha 4 punti $abcd$ pei quali passano infiniti piani, così quella avrà 4 punti $a'\,b'\,c'\,d'$, pei quali passerà un fascio di curve di 4.° ordine appartenenti al primo sistema lineare sopradetto. Dunque, se trasformeremo la curva data in un'altra pur piana e dello stesso ordine, impiegando la rete delle curve di 4.° ordine che appartengono al sistema lineare e passano anche pel punto $a'$, la curva trasformata avrà (oltre a 6 punti doppj) un punto triplo, corrispondente ai punti $b'\,c'\,d'$ della proposta.

*) Clebsch, *Intorno alla rappresentazione di superficie algebriche sopra un piano* (Rend. Ist. Lomb. 12 nov. 1868, p. 798).

**) Cayley, *On skew surfaces, otherwise scrolls* (Phil. Trans. 1863, p. 455). Dalla teoria delle superficie di 3.° ordine si vede che queste 5 rette ammettono due trasversali rettilinee comuni.

Consideriamo ora come data la curva che abbiamo ottenuta: curva di 7.° ordine dotata di un punto triplo e 6 punti doppj. Prendiamo il punto triplo e 5 de' punti doppj come punti fondamentali per la rappresentazione, sul piano, di una superficie generale del 3.° ordine *); la nostra curva sarà allora l'imagine di una curva gobba dell'8.° ordine, che insieme con una retta costituisce l'intersezione della superficie con un'altra dello stesso ordine. Le due superficie di 3.° ordine si toccano nel punto corrispondente al 6.° punto doppio della curva piana: dunque la curva gobba ha un punto doppio. Ponendo l'occhio in questo punto, la sua prospettiva sarà una curva piana di 6.° ordine con 4 punti doppj; dunque possiamo concludere:

*Le curve per le quali è* $\mathrm{p}=6$ *possono essere trasformate in una curva di 6.° ordine, dotata di 4 punti doppj* **).

Ponendo in questi 4 punti i vertici del quadrangolo fondamentale per le coordinate, l'equazione della curva conterrà solamente $\frac{6.9}{2}-3.4=15$ coefficienti arbitrarj; d'accordo colla formola di RIEMANN.

---

*) *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du 3.e ordre* (G. Crelle-Borchardt, t. 68) [Queste Opere, n. **79**], chap. 8.

**) È naturale il sospettare che consimili abbassamenti abbiano luogo anche per $p>6$.