MÉMOIRE

DE GÉOMÉTRIE PURE

SUR

LES SURFACES DU TROISIÈME ORDRE,

MÉMOIRE QUI A OBTENU LA MOITIÉ DU PRIX STEINER
DÉCERNÉ PAR L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE BERLIN DANS SA SÉANCE DU 5 JUILLET 1866.

PAR

L. CREMONA.

MOTTO:
. . . . Es ist daraus zu sehen, dass diese Flächen fortan fast eben so leicht und einlässlich zu behandeln sind, als bisher die Flächen zweiten Grades.

(Extrait du Journal des mathématiques pures et appliquées, Tome 68.)

BERLIN,
IMPRIMÉ CHEZ GEORGE REIMER.
1868.

79.

MÉMOIRE DE GÉOMÉTRIE PURE SUR LES SURFACES DU TROISIÈME ORDRE. [1]

Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 68 (1868), pp. 1-133.

> .... Es ist daraus zu sehen, dass diese Flächen fortan fast eben so leicht und einlässlich zu behandeln sind, als bisher die Flächen zweiten Grades.
>
> STEINER,
> (*dieses Journal*, B. LIII, p. 133).

Cet écrit, étant destiné au concours publié en 1864 par l'Académie royale des sciences de Berlin, pour le prix fondé par STEINER, contient la démonstration de *tous* les théorèmes énoncés par ce grand géomètre dans son Mémoire *Ueber die Flächen dritten Grades* (1856). On y trouvera, en outre de cela, tous ou presque tous les résultats obtenus par d'autres mathématiciens qui ont traité ce sujet; et l'auteur se flatte qu'on y remarquera aussi plusieurs propriétés qui sont dues à ses propres recherches.

Puis, attendu que la théorie des surfaces du troisième ordre a son principal fondement dans la théorie générale des surfaces d'ordre quelconque, au sujet de laquelle on ne connaît aucun traité géométrique; et que l'exposition d'un grand nombre de propriétés n'offre pas plus de facilité pour les surfaces cubiques, que pour les surfaces d'ordre quelconque; l'auteur a jugé convenable de commencer par quelques chapitres relatifs à ces dernières. Dans ces premiers chapitres, il a disposé les théorèmes fondamentaux touchant les surfaces polaires, les systèmes de surfaces, les surfaces nodales conjuguées *), etc. tout en se bornant à ce qui est susceptible d'être appliqué aux surfaces du troisième ordre.

*) L'auteur s'est permis d'employer les mots *Hessienne* et *Steinerienne* pour distinguer entre elles les deux surfaces qu'on devrait, d'après STEINER, appeler *conjugirte Kernflächen*. De même, il a appelé simplement *surface polaire* d'un plan ou d'une droite, ce que STEINER avait nommé *zweite Polare*. Cette dernière diction est, sans doute, préférable en cas qu'on ait à considérer (pour les surfaces d'ordre plus élevé) toute la série des enveloppes polaires relatives aux points d'un lieu quelconque.

Les chapitres suivants contiennent, outre l'application des principes généraux aux surfaces cubiques *), les propriétés si nombreuses qui résultent de la coïncidence des deux surfaces nodales en une surface unique (*Hessienne*) de quatrième ordre, qui possède dix points doubles et dix droites (sommets et arêtes d'un pentaèdre très-remarquable), et dont les points sont conjugués deux à deux: d'où il suit par exemple une transformation de figures formées par les droites et les plans qui passent par un point double de la Hessienne.

En suite, on trouvera d'autres chapitres touchant les manières différentes d'engendrer une surface cubique; le système des vingt-sept droites, les arrangements de celles-ci; la géométrie des courbes tracées sur une surface cubique (à l'aide de la représentation sur un plan); les systèmes de surfaces de second ordre qui coupent la surface cubique le long de trois coniques; les hyperboloïdes qui la rencontrent suivant six droites; les trièdres conjugués, etc. On donne enfin la classification des surfaces du troisième ordre (et de la douzième classe) en cinq espèces, eu égard à la réalité des vingt-sept droites. Dans ce dernier chapitre on trouvera aussi le moyen de construire toutes les cinq espèces, auquel effet on se sert de la discussion (que nous croyons nouvelle) des cas différents offerts par l'intersection de deux surfaces de second ordre.

Par respect aux souhaits de l'Académie, on aurait dû consacrer des recherches expresses à la courbe gauche du neuvième ordre, qu'on obtient par l'intersection de deux surfaces cubiques. Mais, en premier lieu, il a paru à l'auteur que la géométrie pure ne soit pas encore préparée convenablement à des spéculations d'une si grande difficulté; et secondement, le temps lui a manqué, non seulement pour se vouer à ces recherches, mais aussi pour développer davantage certains autres arguments **), et pour remédier aux graves imperfections dont se ressent ce travail, à cause de sa rédaction précipitée. En défaut d'une véritable théorie de ces courbes du neuvième ordre, l'auteur présente (chapitre 8^e) l'énumération des courbes gauches qui résultent de l'intersection d'une surface cubique avec une surface du second ou du troisième ordre, et l'indication du procédé très-simple pour étudier ces courbes dans leurs représentations sur un plan. A la considération de cela et des contributions apportées à d'autres points de la théorie, l'auteur ose se promettre l'indulgence de l'Académie.

Il nous reste à parler de l'instrument de recherche, avec lequel ce travail a été conduit. Obéissant aux prescriptions de l'Académie et heureux d'ailleurs de pouvoir suivre son propre penchant, l'auteur s'est servi exclusivement de la géométrie pure,

*) On doit entendre la surface cubique *générale, sans points multiples.* A cause de l'extension et de l'importance des matières traitées, le temps nous a fait défaut pour nous occuper aussi des surfaces cubiques d'une classe inférieure à la douzième: ce que, du reste, l'Académie semble n'avoir pas voulu demander.

**) Par ex. la théorie des surfaces qu'on pourrait appeler *covariantes* (art. 65 et suiv.).

dite (peut-être improprement) synthétique; et il se flatte qu'on jugera que le procédé uniforme et facile, qu'il a suivi dans tout le cours de cet écrit, rentre dans l'esprit de ces méthodes puissantes et lumineuses qui ont valu à STEINER la découverte d'un si grand nombre de propriétés très-importantes, propriétés que ce célèbre sphinx géométrique a léguées à ses successeurs, comme autant d'énigmes à déchiffrer.

A ce propos, l'auteur déclare qu'il aurait cru manquer à la probité scientifique, s'il se fût borné à démontrer géométriquement les théorèmes de STEINER, en supposant connues et démontrées les propriétés sur lesquelles ces théorèmes sont naturellement fondés. L'auteur a censé de son strict devoir de s'appuyer seulement sur ce qui avait été démontré *par la géométrie pure;* et dès lors, il a admis, par exemple, comme étant connues, la théorie des courbes planes, la génération des courbes polaires qui demeure la même pour les surfaces polaires, les formules de M. PLÜCKER qui expriment les relations entre les caractéristiques des courbes planes (car ces formules ont été démontrées géométriquement autre part), les formules que M. CAYLEY a déduites sans calcul de celles de M. PLÜCKER et qui établissent des relations entre les caractéristiques d'une courbe gauche, etc. Au contraire, d'autres propriétés (par exemple celles, si importantes et fécondes, des chapitres 2ᵉ et 3ᵉ), qu'on connaissait seulement sous la forme d'identités algébriques, se trouvent ici démontrées par la synthèse, afin qu'elles servent ensuite de base au développement des théorèmes qui sont le véritable sujet de ce travail. De sorte que, quoiqu'en grande partie ces propriétés ne soient pas énoncées ici pour la première fois, néanmoins elles paraîtront nouvelles par leur traitement géométrique.

Du reste, c'est à l'Académie de juger jusqu'à quel point l'auteur a mis du nouveau et du sien propre dans ce Mémoire. Ainsi, par respect à ce jugement, s'est-il abstenu des citations fréquentes; et il se borne à déclarer ici qu'outre le Mémoire de STEINER (objet du concours) et les ouvrages d'argument général des MM. CHASLES, HESSE, JONQUIÈRES etc., il a consulté les écrits suivants qui traitent particulièrement des surfaces du troisième ordre:

CAYLEY, *On the triple tangent planes of surfaces of the third order* (Cambridge and Dublin Math. Journal, IV. 1849).

SALMON, *On the triple tangent planes to a surface of the third order* (ibidem).

SYLVESTER, *On elimination, transformation and canonical forms* (Camb. and Dub. Math. Journal, VI. 1851).

}HESSE, *Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung* (dieses Journal, XLIX. 1854).{ [2]

GRASSMANN, *Die stereometrischen Gleichungen dritten Grades und die dadurch erzeugten Oberflächen* (dieses Journal, XLIX. 1854).

BRIOSCHI, *Intorno ad alcune proprietà delle superficie del terzo ordine* (Annali di scienze mat. e fis. Roma 1855).

SCHLÄFLI, *An attempt to determine the twenty-seven lines upon a surface of the third order etc.* (Quarterly Journ. of Math. II. 1858).

CLEBSCH, *Zur Theorie der algebraischen Flächen* (dieses Journal, LVIII. 1860).

— *Ueber eine Transformation der homogenen Functionen dritter Ordnung mit vier Veränderlichen* (ibidem).

SALMON, *On quaternary cubics* (Philosoph. Transactions, 1860).

CLEBSCH, *Ueber die Knotenpunkte der Hesseschen Fläche, insbesondere bei Oberflächen dritter Ordnung* (dieses Journal, LIX. 1861).

SCHIAPARELLI, *Sulla trasformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla trasformazione iperbolica* (Memorie dell'Accad. di Torino, 1862).

AUGUST, *Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis* (Dissert. inaug. Berolini 1862).

SCHRÖTER, *Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung* (dieses Journal, LXII. 1863).

CLEBSCH, *Zur Theorie der algebraischen Flächen* (dieses Jour., LXIII. 1863).

SCHLÄFLI, *On the distribution of surfaces of the third order into species etc.* (Philosoph. Transact. 1863).

SALMON, *Analytic geometry of three dimensions*, 2d ed. (Dublin 1865).

Avertissement. Les notes renfermées dans les crochets carrés [ ] ont été ajoutées en janvier 1867. [3]

CHAPITRE PREMIER.

Les surfaces polaires par rapport à une surface fondamentale d'ordre quelconque.

1. Considérons une surface *fondamentale* quelconque, d'ordre n. Un point, pris arbitrairement dans l'espace, sera le pole de $n-1$ surfaces polaires, dont la première est de l'ordre $n-1$, la deuxième de l'ordre $n-2, \ldots$ et la dernière est un plan.

Nous omettons la définition de ces polaires, de même que la démonstration de plusieurs propriétés qui suivent, car nous n'aurions qu'à reproduire ce qui a été déjà exposé géométriquement pour les courbes planes *).

*) Voir par ex. la *Teoria geom. delle curve piane* de CREMONA (Bologna 1862). [Queste Opere n. **29** (t. 1.°)].

De plus, notre but n'étant autre chose que l'application de ces propriétés générales aux surfaces du troisième ordre, nous traiterons presque exclusivement de la première et de la dernière polaire.

2. Si la $r^{ème}$ polaire d'un point o passe par un point o', la $(n-r)^{ème}$ polaire de o' passe par o. Donc, par trois points donnés arbitrairement dans l'espace il passe une seule première polaire, dont le pole est l'intersection des plans polaires des points donnés. C'est-à-dire que les premières polaires de tous les points de l'espace forment un *système linéaire* *).

Les premières polaires qui passent par un même point donné ont $(n-1)^3$ points communs et forment un réseau; leurs poles sont dans un plan (le plan polaire du point donné).

Les premières polaires qui passent par deux mêmes points donnés forment un faisceau, dont la base est une courbe gauche de l'ordre $(n-1)^2$; leurs poles sont dans une droite (l'intersection des plans polaires des points donnés).

3. Les plans qui passent par un point donné ont leurs poles dans la première polaire de ce point. Les plans qui passent par une droite ont leurs poles dans la courbe gauche d'ordre $(n-1)^2$, commune aux premières polaires de deux points quelconques de la droite **). Un plan a $(n-1)^3$ poles: ce sont les intersections des premières polaires de trois points quelconques du plan.

4. Le plan polaire d'un point quelconque par rapport à la surface fondamentale est le plan polaire de ce point par rapport aux autres surfaces polaires du même pole.

5. Si le pole se trouve sur la surface fondamentale, toutes les polaires passent par le pole et sont tangentes, en ce point, à cette surface. Le plan polaire coupe la polaire du second ordre (*quadrique polaire*) suivant deux droites qui sont osculatrices au pole, à la surface fondamentale et aux autres surfaces polaires; c'est-à-dire qu'au pole, les coniques indicatrices de la surface fondamentale et des surfaces polaires ont les mêmes asymptotes. Si ces asymptotes coïncident ensemble, la quadrique polaire devient nécessairement un cone; le pole est, dans ce cas, un *point parabolique* pour la surface fondamentale (et pour les autres surfaces polaires).

---

*) On nomme *réseau* de surfaces un assemblage de surfaces du même ordre, tel qu'il n'en passe qu'une seule par deux points quelconques donnés. Parmi les surfaces d'un réseau, toutes celles qui passent par un même point donné forment un faisceau.

Des surfaces du même ordre forment un *système linéaire* quand il n'en passe qu'une par trois points quelconques donnés. Toutes les surfaces d'un système linéaire qui passent par un même point forment un réseau; toutes celles qui passent par deux mêmes points forment un faisceau. [Voir CREMONA, *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, 42. Bologna 1866.] [Queste Opere, n. **70** (t. 2.°)].

**) Nous donnons à cette courbe gauche le nom de *courbe polaire de la droite donnée*.

6. Les points de contact de la surface fondamentale avec les droites tangentes issues d'un point quelconque o, sont les points de la courbe d'ordre $n(n-1)$, intersection de la surface avec la première polaire de o. Donc la classe de la surface fondamentale, c'est-à-dire le nombre des plans tangents qui passent par deux points o, o', est $n(n-1)^2$: ce nombre étant celui des points communs à la surface fondamentale et aux premières polaires de o, o'. On voit encore que la classe d'une section plane de la surface fondamentale, ou, ce qui est la même chose, l'ordre du cone circonscrit (le sommet étant un point quelconque o) est $n(n-1)$.

7. Si o est un point de la surface fondamentale, cette surface et la première polaire de o se touchent en ce point; d'où il suit que o sera un point double pour la courbe d'ordre $n(n-1)$, intersection de ces deux surfaces (6). Le cone circonscrit, de sommet o, se décompose, dans ce cas, dans un cone d'ordre $n(n-1)-2$ et dans le plan polaire de o; et ce plan, étant tangent à ce cone le long des deux droites osculatrices à la surface en o, coupera le même cone suivant $n(n-1)-2-4=(n+2)(n-3)$ autres droites. *Parmi les droites qui sont tangentes à la surface fondamentale en un point donné, il y en a donc $(n+2)(n-3)$ qui la touchent de nouveau ailleurs.*

8. Si une droite menée par un point quelconque o de l'espace est osculatrice à la surface fondamentale en un de ses points, le point de contact appartient évidemment à la première et à la deuxième polaire de o. Donc *le nombre des droites osculatrices qui passent par un point quelconque de l'espace est $n(n-1)(n-2)$.*

Le cone circonscrit, de sommet o, qui est de l'ordre $n(n-1)$ et de la classe $n(n-1)^2$, a donc $n(n-1)(n-2)$ génératrices stationnaires. D'après les formules connues de M. Plücker, ce cone aura en outre:

$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ génératrices doubles; il y a donc *ce nombre de tangentes doubles qu'on peut mener par o à la surface donnée;* $4n(n-1)(n-2)$ plans tangents stationnaires; c'est-à-dire que *ce nombre est la classe de la développable formée par les plans stationnaires* (qui touchent la surface donnée aux points paraboliques (5));

et $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12)$ plans tangents doubles; c'est-à-dire que *ce nombre est la classe de l'enveloppe des plans bitangents* (qui touchent la surface donnée en deux points distincts).

En supposant la surface fondamentale sans lignes multiples, une quelconque de ses sections planes sera de l'ordre n, de la classe $n(n-1)$, sans points multiples, et par suite elle aura $3n(n-2)$ points d'inflexion et $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ tangentes doubles; il y a donc, dans un plan quelconque, ces nombres de droites osculatrices et de droites bitangentes à la surface donnée.

9. Si la surface fondamentale a un point multiple o, dont r soit le degré de multiplicité, ce même point sera multiple suivant $r-1$ pour la première polaire d'un point quelconque: et par conséquent la classe de la surface donnée en sera diminuée de $r(r-1)^2$ unités.

Le même point o sera multiple suivant r pour toutes les surfaces polaires de o; d'où il suit que la polaire $(n-r)^{ème}$ sera un cone d'ordre r, et les polaires d'ordre moins élevé seront indéterminées.

Si la surface fondamentale possède une ligne multiple suivant r, la première polaire d'un point quelconque passe $r-1$ fois par cette ligne. Dans notre but, nous n'avons pas besoin de nous arrêter à chercher l'influence d'une ligne multiple sur la classe de la surface donnée.

Nous nous bornons à observer que, si la surface donnée est le système d'un plan et d'une autre surface, et que le pole soit pris dans ce plan, la première polaire sera composée du même plan et de la première polaire relative à la deuxième surface.

10. Les polaires du même ordre par rapport aux surfaces d'un faisceau, le pole étant un point fixe, forment un autre faisceau qui est projectif au premier. De même, si au lieu d'un faisceau, on a un réseau ou un système linéaire, les premières polaires d'un point fixe forment un réseau ou un système linéaire, respectivement.

Si par la courbe d'intersection de deux surfaces d'ordre n, on peut faire passer un cone du même ordre, le sommet de ce cone aura les mêmes polaires par rapport aux deux surfaces.

11. Soit F_n la surface fondamentale donnée; o, o' deux points quelconques; $P_o, P_{o'}$ les premières polaires de o, o' par rapport à F_n; $P_{oo'}$ la première polaire de o par rapport à $P_{o'}$; et $P_{o'o}$ la première polaire de o' par rapport à P_o. Nous allons démontrer que $P_{oo'}$ et $P_{o'o}$ ne sont qu'une seule et même surface d'ordre $n-2$.

Soit E un plan mené arbitrairement par o'; et K_n le cone dont o est le sommet, et la courbe (EF_n) est la directrice. D'après un théorème connu *), les surfaces F_n, K_n se couperont suivant une autre courbe située sur une surface F_{n-1} d'ordre $n-1$ La surface donnée appartient au faisceau déterminé par le cone K_n et par le lieu composé EF_{n-1}; donc (10) la polaire $P_{o'}$ appartiendra au faisceau déterminé par le cone K_{n-1}, polaire de o' par rapport à K_n, et par le lieu composé EF_{n-2}, où F_{n-2} soit la première polaire de o' par rapport à F_{n-1}; car (9) ce lieu composé est la première

*) On sait que par la courbe commune à deux surfaces d'ordre n il passe un nombre infini de surfaces du même ordre. Par conséquent, si deux surfaces d'ordre n passent par une courbe d'ordre nr $(r<n)$ située dans une surface d'ordre r, elles se couperont en outre suivant une autre courbe d'ordre $n(n-r)$, située dans une surface d'ordre $n-r$.

polaire de o' par rapport au lieu EF_{n-1}. Or la polaire $P_{oo'}$ coïncide (10) avec la première polaire de o par rapport à EF_{n-2}, donc elle passera par la courbe d'intersection de la surface F_{n-2} avec le plan E (9).

Puisque la surface F_n passe par la courbe (K_n, EF_{n-1}), la polaire P_o coïncidera avec la polaire de o par rapport au lieu EF_{n-1} (10), et passera conséquemment (9) par la courbe (EF_{n-1}). Donc la surface $P_{o'o}$ passe par la courbe polaire de o' par rapport au lieu EF_{n-1}, c. à. d. par la courbe (EF_{n-2}).

On conclut d'ici que tout plan E mené par o' coupe les polaires $P_{oo'}$ et $P_{o'o}$ suivant une seule et même courbe d'ordre $(n-2)$. Donc *ces surfaces coïncident* en une seule et même surface, que nous appellerons *deuxième polaire mixte des points oo'*.

Il est très-facile maintenant de passer à un théorème plus général, relatif aux polaires d'un ordre quelconque.

12. Des théorèmes (11), (2) on tire sans peine cet autre énoncé: *Si la première polaire d'un point x par rapport à la première polaire d'un autre point o passe par un troisième point o', la première polaire de x par rapport à la $(n-2)^{ème}$ polaire de o' passera par o.*

Et de même un théorème analogue pour les polaires d'ordre quelconque.

13. Si la première polaire de o a un point double o', la première polaire d'un point quelconque x par rapport à la première polaire de o passera (9) par o', et par conséquent (12) la première polaire de x par rapport à la quadrique polaire de o' passera par o. De plus, puisque la deuxième polaire de o passe par o', il en suit que o est situé dans la quadrique polaire de o' (2). Donc, o est un point double pour la quadrique polaire de o'; c'est-à-dire que la quadrique polaire de o' est un cone de sommet o.

Analoguement, *si la surface $r^{ème}$ polaire de o a un point double o', la surface $(n-r-1)^{ème}$ polaire de o' a un point double en o.*

14. Si le pole parcourt une droite R, de quelle classe est la développable enveloppée par le plan polaire? Les plans passant par un point arbitraire i ont leurs poles dans la première polaire de ce point; cette surface rencontre R en $n-1$ points; l'enveloppe cherchée est donc de la classe $n-1$ *). Nous donnerons à cette surface la dénomination de *développable polaire* de la droite R **).

Les plans tangents de la développable qui passent par un point i sont les plans polaires des $n-1$ points où R est coupée par la première polaire de i; donc, si cette

*) Si la surface fondamentale a un point o multiple suivant r, ce point est multiple suivant $r-1$ pour la première polaire d'un pole quelconque (9); d'où il suit que, si R passe par o, l'enveloppe des plans polaires sera de la classe $n-r$.

**) On démontre pareillement que la développable polaire d'une courbe d'ordre m est de la classe $m(n-1)$.

polaire est tangente à R, le point i appartient à la développable. C'est-à-dire que

La développable enveloppée par les plans polaires des points d'une droite est le lieu des poles des premières polaires tangentes à cette droite.

Chacune des droites génératrices de la développable est le lieu des poles dont les premières polaires touchent R au même point. Parmi ces premières polaires il y en aura une, laquelle sera osculée par R; le pole de cette polaire appartient donc aussi à la génératrice infiniment voisine. Ce qui revient à dire que *la courbe cuspidale de la développable est le lieu d'un point dont la première polaire est osculée par* R. De même, *la courbe nodale de la développable sera le lieu d'un point dont la première polaire a un double contact avec* R.

On peut très-facilement déterminer l'ordre de la développable polaire et de ses courbes singulières. Les points d'une droite arbitraire sont les poles d'un faisceau de premières polaires; dans ce faisceau il y en a $2(n-2)$ tangentes à R; donc *ce nombre est l'ordre de la développable.* Un plan quelconque mené par R coupe les premières polaires de ses points suivant un réseau de courbes d'ordre $n-1$; dans ce réseau il y a $3(n-3)$ courbes osculées par R, et $2(n-3)(n-4)$ courbes touchées par R en deux points distincts; par conséquent, *la courbe cuspidale est de l'ordre* $3(n-3)$, et *la courbe nodale est de l'ordre* $2(n-3)(n-4)$.

D'après les relations connues entre les caractéristiques d'une développable *), on trouve que la courbe cuspidale a $4(n-4)$ points stationnaires, c'est-à-dire qu'il y a autant de points dont les premières polaires ont un contact du troisième ordre avec R; etc.

15. Considérons la surface enveloppée par les plans polaires des points d'une surface donnée S_m d'ordre m. Les plans polaires qui passent par une droite arbitraire ont leurs poles (3) dans une courbe de l'ordre $(n-1)^2$; donc l'enveloppe cherchée est de la classe $m(n-1)^2$. Les plans tangents qu'on peut mener par une droite quelconque à cette surface, que nous désignerons par K, sont les plans polaires des intersections de la surface donnée S_m avec la courbe d'ordre $(n-1)^2$ correspondante à cette droite; donc cette droite sera tangente à K, si la courbe correspondante touche S_m. Par conséquent, si deux droites, se coupant en un point i, correspondent à deux courbes d'ordre $(n-1)^2$ tangentes à S_m {en un même point} [4], le point i appartiendra à K. Or, ces deux courbes, d'après leur définition (3), sont situées sur la première polaire de i; donc *la surface* K *est le lieu d'un point dont la première polaire est tangente à* S_m.

Si $m=1$, K est l'enveloppe des plans polaires des points d'un plan donné E et en même temps le lieu des poles des premières polaires tangentes à ce plan. *Cette surface, de la classe* $(n-1)^2$, *est de l'ordre* $3(n-2)^2$; en effet, les premières polaires des points

*) [Voir la *Teoria geometrica delle superficie* déjà citée, 10-12.]

d'une droite arbitraire sont coupées par E suivant un faisceau de courbes de l'ordre $n-1$, et dans ce faisceau il y a $3(n-2)^2$ courbes avec point double.

Les premières polaires des points d'un plan quelconque coupent E suivant un réseau de courbes d'ordre $n-1$; or, on sait que dans un tel réseau il y a $\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5)$ courbes avec deux points doubles, et $12(n-2)(n-3)$ courbes avec un point stationnaire; *la surface* K *possède donc une courbe nodale et une courbe cuspidale,* dont ces nombres expriment les ordres.

D'après ce qui précède, si la première polaire d'un point i touche le plan E au point i', réciproquement le plan polaire de i' est tangent à K en i. Soit i' un point commun au plan E et à la surface fondamentale; le plan polaire de i' sera tangent en i' à cette surface et en i à K; donc *la surface* K *est inscrite dans la développable qui est circonscrite à la surface fondamentale le long de sa section par le plan* E.

16. On a vu (3) que le lieu des poles des plans passant par une droite est une courbe gauche d'ordre $(n-1)^2$. On peut de même demander le lieu des poles des plans tangents d'une surface quelconque de la classe m.

Si la surface donnée est développable, elle aura $m(n-1)^2$ plans tangents communs avec la surface de classe $(n-1)^2$, enveloppe des plans polaires des points d'un plan quelconque E (15); et dès lors, ce plan E contiendra autant de points du lieu demandé. Donc, *le lieu des poles des plans tangents d'une développable de la classe m est une courbe gauche d'ordre $m(n-1)^2$.*

Si la surface donnée n'est pas développable, elle aura $m(n-1)$ plans tangents communs avec la développable de classe $n-1$ formée par les plans polaires des points d'une droite quelconque R (14); d'où il résulte qu'une droite quelconque contient $m(n-1)$ points du lieu demandé. Ainsi *le lieu des poles des plans tangents d'une surface quelconque de la classe m est une autre surface d'ordre $m(n-1)$.*

Chapitre Deuxième.

Systèmes de surfaces d'ordre quelconque.

17. Si l'on se donne deux faisceaux projectifs de surfaces d'ordre n_1 et n_2 respectivement, *le lieu de la courbe d'intersection de deux surfaces correspondantes est une surface d'ordre n_1+n_2, qui passe par les courbes d'ordre n_1^2* et *n_2^2, bases des faisceaux donnés.*

En un point quelconque de la première base, la surface d'ordre n_1+n_2 est touchée par la surface d'ordre n_1, qui correspond à la surface d'ordre n_2 passant par ce point.

18. Soient donnés trois faisceaux projectifs de surfaces d'ordre n_1, n_2, n_3 resp. Les deux premiers faisceaux engendrent (17) une surface d'ordre n_1+n_2; de même, le

premier et le troisième faisceau donnent une surface d'ordre n_1+n_3. Ces deux surfaces passent par la courbe d'ordre n_1^2, base du premier faisceau, et par suite elles se couperont suivant une autre courbe d'ordre $(n_1+n_2)(n_1+n_3)-n_1^2$, qui passe évidemment par les $n_1^2(n_2+n_3)$ points où la base du premier faisceau rencontre la surface engendrée par les deux autres faisceaux, etc. Donc

Le lieu des points où se coupent trois surfaces correspondantes de trois faisceaux projectifs d'ordre n_1, n_2, n_3, est une courbe gauche d'ordre $n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2$, qui a $n_1^2(n_2+n_3)$ points communs avec la base du premier faisceau, etc.

19. Soient donnés quatre faisceaux projectifs de surfaces d'ordre n_1, n_2, n_3, n_4 resp. Le troisième et le quatrième faisceau engendrent (17) une surface d'ordre n_3+n_4 qui passe par la base du troisième faisceau et a par suite $n_3^2(n_1+n_2)$ points communs avec la courbe d'ordre $n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2$ engendrée (18) par les premiers trois faisceaux. Donc, cette courbe et cette surface se couperont en $(n_3+n_4)(n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2)-n_3^2(n_1+n_2)$ autres points, c'est-à-dire que

Il y a $n_2n_3n_4+n_1n_3n_4+n_1n_2n_4+n_1n_2n_3$ points, dont chacun est commun à quatre surfaces correspondantes de quatre faisceaux projectifs d'ordre n_1, n_2, n_3, n_4.

20. Dans un faisceau de surfaces d'ordre n, combien il y en a qui soient douées d'un point double? Prenons quatre points arbitrairement dans l'espace; leurs premières polaires formeront (10) quatre faisceaux projectifs d'ordre $n-1$. Si une des surfaces données a un point double, la première polaire d'un pole quelconque passe par ce point; et par conséquent les points doubles sont les points de l'espace par lesquels passent quatre surfaces correspondantes des quatre faisceaux de polaires. *Le nombre des surfaces du faisceau donné, qui ont un point double, est donc* (19) $4(n-1)^3$.

21. On demande *le lieu des poles d'un plan par rapport aux surfaces d'ordre n d'un faisceau.* Soient a, b, c trois points pris arbitrairement dans le plan donné; si x est le pole du plan abc, réciproquement (2) les premières polaires de a, b, c passent par m. Or, les premières polaires de a, b, c forment trois faisceaux projectifs d'ordre $n-1$; le lieu cherché est donc (18) *une courbe gauche d'ordre* $3(n-1)^2$, *qui passe par les* $4(n-1)^3$ *points doubles* (20) *du faisceau donné.*

22. Soient donnés deux réseaux projectifs de surfaces d'ordre n_1, n_2; un faisceau quelconque, compris dans le premier réseau, et le faisceau, qui lui correspond dans l'autre réseau, engendrent une surface Φ d'ordre n_1+n_2. Les surfaces Φ forment elles-mêmes un réseau. Soient, en effet, a et b deux points arbitraires dans l'espace. Par a passent deux surfaces correspondantes R, R$'$ des deux réseaux; et de même, deux autres surfaces correspondantes Q, Q$'$ passent par b. Les surfaces (R, Q), (R$'$, Q$'$) déterminent deux faisceaux projectifs, à l'aide desquels on peut engendrer la surface Φ_1: la seule qui passe par a et b.

Soit P, P′ une autre couple de surfaces correspondantes des deux réseaux, qui n'appartiennent pas resp. aux faisceaux (RQ), (R′Q′). Les faisceaux (PR), (P′R′) engendreront une autre surface Φ_2; et de même les faisceaux (QP), (Q′P′) une troisième surface Φ_3. Les surfaces Φ_1, Φ_2 passent par la courbe RR′ d'ordre $n_1 n_2$; elles ont donc une autre courbe commune, de l'ordre $(n_1+n_2)^2-n_1n_2$. Un point quelconque de cette courbe, considéré comme situé sur Φ_1, est commun à deux surfaces correspondantes S, S′ des faisceaux (RQ), (R′Q′); et le même point, considéré comme situé sur Φ_2, appartient aussi à deux surfaces correspondantes T, T′ des faisceaux (PR), (P′R′). Les deux faisceaux (PQ), (TS), appartenant à un même réseau, ont une surface commune U, à laquelle correspondra, dans l'autre réseau, une surface U′ commune aux faisceaux (P′Q′), (T′S′); d'où il suit que tout point de la courbe d'ordre $n_1^2+n_2^2+n_1n_2$, savoir tout point commun aux surfaces S, S′, T, T′, est un point commun aux bases des faisceaux (TS), (T′S′), et par conséquent il est commun aux surfaces U, U′. Donc cette courbe d'ordre $n_1^2+n_2^2+n_1n_2$, commune aux surfaces Φ_1, Φ_2, est située aussi sur Φ_3, et peut être regardée comme base du réseau des surfaces Φ. (Ce réseau est déterminé par les trois surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3, lesquelles n'appartiennent pas au même faisceau, car Φ_3 ne contient pas la courbe RR′).

Concluons donc que *les surfaces d'ordre n_1+n_2, sur lesquelles sont situées les courbes d'intersection des surfaces correspondantes de deux réseaux projectifs d'ordre n_1, n_2, forment un réseau et passent toutes par une même courbe gauche de l'ordre $n_1^2+n_2^2+n_1n_2$.*

Deux surfaces P, Q du premier réseau donné se rencontrent suivant une courbe d'ordre n_1^2, à laquelle correspond une courbe P′Q′ d'ordre n_2^2 dans l'autre réseau. Ces deux courbes, en général, ne se coupent pas; mais pour celles qui se coupent, les points d'intersection appartiennent évidemment à la courbe d'ordre $n_1^2+n_2^2+n_1n_2$. Autrement: *chaque point de cette courbe est commun aux bases de deux faisceaux correspondants*, au lieu que par un point arbitraire de l'espace ne passe plus qu'une couple de surfaces correspondantes.

23. *Trois réseaux projectifs de surfaces d'ordre n_1, n_2, n_3 resp. étant donnés, quel est le lieu d'un point par lequel passent trois surfaces correspondantes?* Soit G une droite arbitraire, x un point quelconque de G. Par x passent deux surfaces correspondantes des premiers deux réseaux; la surface correspondante du troisième rencontrera G en n_3 points x'. Si l'on fixe arbitrairement un point x' sur G, les surfaces du troisième réseau qui passent par x' forment un faisceau, auquel correspondent, dans les autres réseaux, deux faisceaux qui, étant projectifs, engendrent (17) une surface d'ordre n_1+n_2. Cette surface coupera G en n_1+n_2 points x. Il y aura donc, d'après un lemme connu, $(n_1+n_2)+n_3$ coïncidences de x avec x', c'est-à-dire que le lieu cherché *est une surface de l'ordre $n_1+n_2+n_3$*. Il est évident que *cette surface passe* 1.° *par un nombre infini*

de courbes gauches d'ordre $n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2$, *chacune desquelles est engendrée* (18) *par trois faisceaux correspondants dans les trois réseaux donnés;* 2.° *par les* n_1^3 *points communs aux surfaces du premier réseau, et de même pour les autres réseaux;* 3.° *par la courbe d'ordre* $n_1^2+n_2^2+n_1n_2$ *engendrée* (22) *par les deux premiers réseaux; et de même pour les autres combinaisons binaires des trois réseaux.*

24. On donne quatre réseaux projectifs de surfaces d'ordre n_1, n_2, n_3, n_4 resp.; cherchons le lieu d'un point où se coupent quatre surfaces correspondantes. Les surfaces correspondantes des premiers trois réseaux se coupent sur une surface (23) d'ordre $n_1+n_2+n_3$; et de même le premier, le deuxième et le quatrième réseau donnent une surface d'ordre $n_1+n_2+n_4$. Ces deux surfaces ont en commun la courbe d'ordre $n_1^2+n_2^2+n_1n_2$ engendrée (22) par les premiers deux réseaux, elles se couperont donc suivant une autre courbe d'ordre $(n_1+n_2+n_3)(n_1+n_2+n_4)-(n_1^2+n_2^2+n_1n_2)$; d'où il suit que

Le lieu d'un point par lequel passent quatre surfaces correspondantes de quatre réseaux projectifs d'ordre n_1, n_2, n_3, n_4 *est une courbe gauche de l'ordre*

$$n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2+n_1n_4+n_2n_4+n_3n_4.$$

Cette courbe contient évidemment un nombre infini de systèmes de $n_2n_3n_4+n_1n_3n_4+n_1n_2n_4+n_1n_2n_3$ points, chaque système étant engendré (19) par quatre faisceaux correspondants dans les réseaux donnés.

25. *Dans quel lieu sont distribués les points doubles des surfaces d'un réseau d'ordre* n? Les premières polaires de quatre points arbitraires de l'espace (20) forment quatre réseaux projectifs d'ordre $n-1$, dans lesquels les surfaces correspondantes se coupent, quatre à quatre, sur *une courbe gauche* (24) *de l'ordre* $6(n-1)^2$. *Cette courbe est donc le lieu demandé.* Elle contiendra évidemment les $4(n-1)^3$ points doubles de chaque faisceau compris dans le réseau donné.

26. De quel ordre est le lieu d'un point x, dont les plans polaires par rapport à deux surfaces d'ordre μ, ν se coupent sur une droite fixe G? Si les plans polaires de x passent par un point y de G, réciproquement les premières polaires de y se couperont en x. Si y parcourt la droite G, les premières polaires de y forment deux faisceaux projectifs d'ordre $\mu-1, \nu-1$, qui engendreront (17) une surface d'ordre $\mu+\nu-2$. Cette surface est donc le lieu demandé.

Tout point commun à cette surface et à la courbe d'ordre $\mu\nu$, intersection des surfaces données, a pour plans polaires les plans tangents, au même point, aux deux surfaces; la droite commune à ces plans est donc tangente en ce point à la courbe. Or, cette droite est rencontrée par G; il y a donc autant d'intersections de la surface d'ordre $\mu+\nu-2$ avec la courbe d'ordre $\mu\nu$, que de tangentes de cette courbe rencontrées par G; c'est-à-dire que *les droites tangentes à la courbe d'intersection de deux surfaces d'ordre* μ, ν *forment une développable de l'ordre* $\mu\nu(\mu+\nu-2)$.

27. Revenons maintenant aux surfaces Φ_1, Φ_2 (22), que nous avons vues se couper suivant deux courbes, dont l'une est de l'ordre $n_1^2+n_2^2+n_1n_2$ et l'autre est l'intersection de deux surfaces d'ordre n_1, n_2. La surface, lieu d'un point dont les plans polaires par rapport à Φ_1, Φ_2 se coupent sur une droite donnée, est (26) de l'ordre $2(n_1+n_2-1)$ et rencontre la première courbe, non-seulement aux points où celle-ci est touchée par des droites croisées par la droite donnée (soit r le nombre de ces points, savoir l'ordre de la développable osculatrice de cette courbe), mais encore aux *points* (soit s leur nombre) *où la première courbe est rencontrée par l'autre.* En effet chacun de ces points est un point de contact entre Φ_1 et Φ_2, et par suite il a même plan polaire par rapport à ces surfaces. Nous aurons donc

$$2(n_1+n_2-1)(n_1^2+n_2^2+n_1n_2)=r+s.$$

En faisant le même raisonnement pour la deuxième courbe, et en observant que pour celle-ci l'ordre de la développable osculatrice (26) est $n_1n_2(n_1+n_2-2)$, on aura

$$2(n_1+n_2-1)n_1n_2=n_1n_2(n_1+n_2-2)+s,$$

d'où l'on tire

$$s=n_1n_2(n_1+n_2),$$
$$r=2(n_1^2+n_2^2)(n_1+n_2-1)+n_1n_2(n_1+n_2-2) \text{ *)}.$$

28. Considérons de la même manière les deux surfaces d'ordre $n_1+n_2+n_3$ et $n_1+n_2+n_4$ (24) qui se coupent suivant deux courbes, dont l'une est de l'ordre $n_1^2+n_2^2+n_1n_2$ et l'autre de l'ordre $n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2+n_1n_4+n_2n_4+n_3n_4$. Soit r' l'ordre de la développable osculatrice de la dernière courbe, et s' *le nombre des intersections des deux courbes;* nous aurons, comme ci-devant,

$$(2n_1+2n_2+n_3+n_4-2)(n_2n_3+n_3n_1+\dots)=r'+s',$$
$$(2n_1+2n_2+n_3+n_4-2)(n_1^2+n_2^2+n_1n_2) \quad =r+s',$$

et par conséquent

$$s'=(n_3+n_4)(n_1^2+n_2^2+n_1n_2)+n_1n_2(n_1+n_2),$$
$$r'=(n_2n_3+n_3n_1+\dots)(n_1+n_2+n_3+n_4-2)+(n_2n_3n_4+n_1n_3n_4+\dots).$$

---

*) Salmon, *Analyt. Geom. of three dimensions,* 2 ed., p. 274.

29. Soient donnés cinq réseaux projectifs de surfaces d'ordre $n_1, n_2, \ldots n_5$ resp.; on demande en combien de points se coupent cinq surfaces correspondantes. Les deux premiers réseaux, combinés successivement avec les autres, donnent (23) trois surfaces d'ordre $n_1+n_2+n_3$, $n_1+n_2+n_4$, $n_1+n_2+n_5$ resp. qui passent toutes par la courbe d'ordre $n_1^2+n_2^2+n_1n_2$, engendrée (22) par les deux premiers réseaux. De ces trois surfaces, les deux premières se rencontrent suivant une autre courbe qui (28) a s' points communs avec celle mentionnée tout-à-l'heure; donc cette autre courbe, qui est de l'ordre $n_2n_3+n_3n_1+\ldots$ rencontrera la troisième surface en $(n_2n_3+n_3n_1+\ldots)(n_1+n_2+n_5)-s'$ autres points. Donc:

Il y a $n_1n_2n_3+n_1n_2n_4+\ldots+n_3n_4n_5$ points, chacun desquels est situé à la fois sur cinq surfaces correspondantes de cinq réseaux projectifs d'ordre $n_1, n_2, \ldots n_5$.

30. *Quel est le lieu des poles d'un plan donné par rapport aux surfaces d'ordre n d'un réseau?* Soient a, b, c trois points arbitraires du plan donné (21); les premières polaires de ces points forment trois réseaux projectifs d'ordre $n-1$; le lieu demandé *est donc* (23) *une surface de l'ordre* $3(n-1)$, *qui contient un nombre infini de courbes gauches d'ordre* $3(n-1)^2$, chacune de celles-ci étant le lieu des poles du plan donné par rapport aux surfaces d'un faisceau (21) contenu dans le réseau proposé.

La courbe d'intersection de la surface d'ordre $3(n-1)$ avec le plan donné est évidemment le lieu des points où ce plan est tangent aux surfaces du réseau.

31. Quel est le lieu d'un point qui ait même plan polaire par rapport à une surface fixe d'ordre n et à une des surfaces d'un réseau d'ordre m? Soit x un point pris arbitrairement sur une droite quelconque G; X le plan polaire de x par rapport à la surface fixe. Le lieu des poles de X par rapport aux surfaces du réseau est (30) une surface qui rencontrera G en $3(m-1)$ points x'. Inversement, si x' est un point quelconque de G, les plans polaires de x' par rapport aux surfaces du réseau forment un autre réseau, c'est-à-dire qu'ils passent par un même point; et par suite il y en aura $n-1$ tangents à la développable (14) polaire de G par rapport à la surface fixe. Ces $n-1$ plans sont les polaires (par rapport à la surface fixe) d'autant de point x de G. Le lieu demandé sera donc une surface de l'ordre

$$3(m-1)+n-1=3m+n-4.$$

Tout point commun à cette surface et à la surface fixe est situé dans son plan polaire; donc *le lieu des points de contact entre une surface d'ordre n et les surfaces d'un réseau d'ordre m est une courbe gauche d'ordre $n(3m+n-4)$.*

32. On se donne un faisceau de surfaces d'ordre n et un réseau de surfaces d'ordre m; et on demande *le lieu des points de contact entre les surfaces du faisceau et celles du réseau.* Ce lieu passe par la courbe d'ordre n^2, base du faisceau, car les surfaces du réseau qui passent par un point de la base forment un autre faisceau, dans lequel

il y a une surface qui touche une des surfaces d'ordre n *). De plus, chacune de ces dernières surfaces contient une courbe d'ordre $n(3m+n-4)$, lieu des points de contact entre cette surface et celles du réseau (31). D'où il suit qu'une surface quelconque du faisceau donné rencontre le lieu demandé suivant une courbe (composée) d'ordre $n^2+n(3m+n-4)$; ce lieu *est donc de l'ordre* $3m+2n-4$.

Si $n=m$, et que le faisceau et le réseau aient une surface commune (ce qui arrive lorsque l'un et l'autre font partie d'un même système linéaire), cette surface appartient tout entière au lieu. D'ailleurs, toute surface passant par la courbe commune à deux surfaces d'un système linéaire appartient à ce même système; et si deux surfaces d'un faisceau ont un point de contact, ce point est double pour une autre surface du faisceau; donc

Le lieu des points de contact des surfaces d'un système linéaire d'ordre **n**, *ou bien le lieu de leurs points doubles, est une surface de l'ordre* $4(n-1)$.

33. Cherchons le lieu d'un point dont le plan polaire par rapport à une surface fixe d'ordre n coïncide avec le plan polaire par rapport à une des surfaces d'un faisceau d'ordre m. Soit E un plan arbitraire; x un point quelconque de ce plan; X le plan polaire de x par rapport à la surface fixe; le lieu des poles de X par rapport aux surfaces du faisceau est une courbe (21) qui rencontre E en $3(m-1)^2$ points x'. Réciproquement, si x' est pris arbitrairement dans E, les plans polaires de x' par rapport aux surfaces du faisceau forment un autre faisceau, dans lequel il y a $(n-1)^2$ plans tangents à la surface enveloppe (15) des plans polaires des points de E par rapport à la surface fixe; et ces $(n-1)^2$ plans sont les polaires d'autant de points x de E. Si le point x décrit une droite quelconque en E, le plan X enveloppe (14) une développable de la classe $n-1$, au lieu que les plans polaires des points de la même droite, par rapport aux surfaces du faisceau, enveloppent une surface de la classe $2(m-1)$: en effet, cette droite est tangente à $2(m-1)$ surfaces du faisceau. Il y a donc $2(m-1)(n-1)$ plans, chacun desquels a sur la droite considérée un pole par rapport à la surface fixe et un pole par rapport à une des surfaces du faisceau; c'est-à-dire que, si x décrit une droite, le lieu de x' est une courbe de l'ordre $2(m-1)(n-1)$. Par conséquent, d'après un théorème connu **) [5], le plan E contient $3(m-1)^2+(n-1)^2+2(m-1)(n-1)$

*) Lorsque les bases de deux faisceaux de surfaces ont un point commun o, il y a toujours une surface du premier faisceau et une surface du second, qui se touchent en o. En effet, les plans tangents en o aux surfaces du premier faisceau passent par une même droite, qui est la tangente en o à la courbe-base de ce faisceau; de même pour l'autre faisceau. Par conséquent, le plan qui contient les droites tangentes en o aux deux courbes-bases touchera, en ce point, une surface de chacun des deux faisceaux.

**) Supposons que, dans un plan donné, à un point quelconque x correspondent deux courbes d'ordres μ et ν resp., qui se coupent en $\mu\nu$ points x'; de manière qu'au point x correspondront points x, chacun desquels coïncide avec un des points correspondants x'; autrement, le lieu cherché est une courbe gauche dont l'ordre est exprimé par ce nombre. Cette courbe passe par les $4(m-1)^3$ points doubles (20) du faisceau donné, car le plan polaire d'un point double, par rapport à la surface à laquelle celui-ci appartient, est indéterminé (9).

Des intersections du lieu trouvé avec la surface fixe, on déduit que *dans un faisceau d'ordre m il y a* $n\big(3(m-1)^2+(n-1)^2+2(m-1)(n-1)\big)$ *surfaces qui ont un point de contact avec une surface donnée d'ordre n.*

34. *Deux systèmes (linéaires) projectifs de surfaces d'ordres* n_1 *et* n_2 *resp. donnent lieu à un nombre infini de surfaces d'ordre* n_1+n_2, chacune desquelles est engendrée (17) par deux faisceaux correspondants. Soient P, Q, R, S, ... des surfaces du premier système, et P′, Q′, R′, S′, ... les surfaces correspondantes de l'autre système. Les trois couples de faisceaux correspondants (PQ), (P′Q′); (PR), (P′R′); (PS), (P′S′) engendrent trois surfaces d'ordre n_1+n_2 qui passent toutes par la courbe PP′ d'ordre $n_1 n_2$, et par suite *) ont $(n_1+n_2)(n_1^2+n_2^2)$ autres points communs. Chacun de ces points est

---

$\mu\nu$ points x'. Réciproquement, supposons qu'aux courbes (μ) passant par un point x' correspondent les points x d'une courbe d'ordre μ', et qu'aux courbes (ν) passant par le même point x' correspondent les points x d'une courbe d'ordre ν'; d'où il s'ensuit qu'à un point x' correspondent $\mu'\nu'$ points x. Considérons les points x d'une droite; les courbes (μ) correspondantes à ces points forment une série d'indice μ' (suivant la dénomination de M. Jonquières), et les courbes (ν) correspondantes aux mêmes points forment, de même, une série d'indice ν'; et le lieu des intersections x' des courbes correspondantes est (par un théorème dû au même géomètre) une courbe d'ordre $\mu\nu'+\mu'\nu$. Analoguement, si x' décrit une droite, le lieu de x est une courbe d'ordre $\mu\nu'+\mu'\nu$.

Si le point x est situé dans sa courbe correspondante (μ), quel est le lieu de x? A un point quelconque x d'une droite arbitraire G correspond une courbe (μ) qui coupe G en μ points x'; au lieu qu'à un point x' de la même droite correspond une courbe (μ') qui coupe G en μ' points x. Le lieu demandé est donc de l'ordre $\mu+\mu'$. De même, si x doit être situé dans sa courbe correspondante (ν), le lieu de x est une courbe de l'ordre $\nu+\nu'$. Les $(\mu+\mu')(\nu+\nu')$ intersections de ces courbes sont évidemment les points x dont chacun coïncide avec un des points correspondants x'. Or on a identiquement $\mu\nu+\mu'\nu'+(\mu\nu'+\mu'\nu)=(\mu+\mu')(\nu+\nu')$, donc: si, dans un plan, on a deux systèmes de points correspondants, tels qu'à chaque point du premier système correspondent α points de l'autre; qu'à chaque point du second système correspondent β points du premier; et qu'une droite quelconque contienne γ couples de points correspondants, il y aura $\alpha+\beta+\gamma$ points doubles (Salmon, *Anal. Geom. of three dim.* p. 511).

*) Deux surfaces d'ordre n_1+n_2 passant par une courbe d'ordre $n_1 n_2$, se coupent suivant une autre courbe d'ordre $n_1^2+n_2^2+n_1 n_2$ qui rencontre la première (27) en $n_1 n_2(n_1+n_2)$ points. D'où il suit qu'une autre surface d'ordre n_1+n_2 passant par la même courbe d'ordre $n_1 n_2$ rencontrera la deuxième courbe en $(n_1+n_2)(n_1^2+n_2^2+n_1 n_2)-n_1 n_2(n_1+n_2)=(n_1+n_2)(n_1^2+n_2^2)$ points non situés sur la première.

situé sur des surfaces Q_1, R_1, S_1, appartenant resp. aux faisceaux (P Q), (PR), (PS), et aussi sur les surfaces correspondantes Q'_1, R'_1, S'_1, qui appartiendront aux faisceaux (P′ Q′), (P′ R′), (P′ S′) resp. Donc, le point considéré est commun aux bases des faisceaux $(Q_1 R_1)$, $(Q'_1 R'_1)$; dont le premier a une surface commune avec le faisceau (Q R), et le second a une surface commune avec le faisceau (Q′ R′). Ces deux surfaces étant correspondantes, il en suit que le point, dont il s'agit, est situé sur la surface d'ordre n_1+n_2 engendrée par les faisceaux (Q R), (Q′ R′). *Toutes ces surfaces d'ordre n_1+n_2 ont donc en commun les $(n_1+n_2)(n_1^2+n_2^2)$ points* ci-dessus mentionnés. *Par chacun de ces points passe un nombre infini de faisceaux correspondants;* en d'autres termes, *chacun de ces points est commun à toutes les surfaces de deux réseaux correspondants.*

35. Soient donnés trois systèmes (linéaires) projectifs de surfaces d'ordres n_1, n_2, n_3, resp. Un réseau quelconque du premier système, combiné avec les réseaux correspondants dans les autres systèmes, donne (23) une surface Ψ d'ordre $n_1+n_2+n_3$. Toutes ces surfaces Ψ forment un nouveau système linéaire. Soient, en effet, a, b, c trois points arbitraires dans l'espace. Les surfaces (n_1) passant par a forment un réseau; dans le réseau correspondant du deuxième système il y a un faisceau de surfaces qui passent par a; et dans le faisceau correspondant du troisième système il y a une surface qui passe par a. C'est-à-dire qu'il y a trois surfaces correspondantes P, P′, P″ qui passent par a. De même, il y aura trois surfaces correspondantes Q, Q′, Q″ passant par b, et trois surfaces correspondantes R, R′, R″ passant par c. Ces surfaces déterminent trois réseaux projectifs (P Q R), (P′ Q′ R′), (P″ Q″ R″), qui engendreront une surface Ψ_4, la seule qui passe par a, b, c.

Soit S, S′, S″ une autre terne de surfaces correspondantes, qui n'appartiennent pas aux trois réseaux mentionnés. Les ternes de réseaux correspondants (Q R S), (Q′ R′ S′), (Q″ R″ S″); (R P S), (R′ P′ S′), (R″ P″ S″); (P Q S), (P′ Q′ S′), (P″ Q″ S″) engendreront trois autres surfaces Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3. Les surfaces Ψ_1, Ψ_2 contiennent la courbe d'ordre $n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2$ engendrée (18) par les trois faisceaux correspondants (R S), (R′ S′), (R″ S″); elles se couperont donc suivant une autre courbe de l'ordre $(n_1+n_2+n_3)^2-(n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2)$. Un point quelconque x de cette courbe, considéré comme appartenant à Ψ_1, est commun à trois surfaces correspondantes A, A′, A″ des trois réseaux qui engendrent Ψ_1; et analoguement, le même point x, considéré comme situé sur Ψ_2, sera commun à trois surfaces correspondantes B, B′, B″ des trois réseaux générateurs de Ψ_2. Or, le réseau (P Q S) et le faisceau (A B), faisant partie d'un même système linéaire, ont une surface commune C, à laquelle correspondront, dans le deuxième système une surface C′ commune au réseau (P′ Q′ S′) et au faisceau (A′ B′), et dans le troisième système une surface C″ commune au réseau (P″ Q″ S″) et au faisceau (A″ B″). Par conséquent, le point x, étant situé sur les surfaces A, A′, A″, B, B′, B″, c'est-à-dire sur les bases des faisceaux (A B), (A′B′), (A″B″), sera un point commun aux surfaces C, C′, C″, et par suite commun à trois surfaces correspondantes des réseaux (PQS), (P′Q′S′), (P″Q″S″); ce qui revient à dire que x est un point de Ψ_3. On démontre de la même manière que x est situé sur Ψ_4; donc *toutes les surfaces* Ψ *forment un système linéaire et passent par la courbe d'ordre* $n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2$.

Cette courbe est, d'après ce qui précède, *le lieu d'un point où se croise une infinité de ternes de surfaces correspondantes*; en d'autres termes, *le lieu d'un point commun aux courbes-bases de trois faisceaux correspondants;* ou bien encore, *le lieu d'un point commun à trois courbes d'ordres* n_1^2, n_2^2, n_3^2, *correspondantes dans les systèmes donnés.*

Cette même courbe contient évidemment les $(n_1+n_2)(n_1^2+n_2^2)$ points engendrés (34) par les deux premiers systèmes; et de même pour les autres combinaisons binaires des systèmes donnés.

36. On se donne quatre systèmes (linéaires) projectifs de surfaces d'ordres n_1, n_2, n_3, n_4 resp. et on demande l'ordre du lieu d'un point commun à quatre surfaces correspondantes. Soit G une droite arbitraire et x un point quelconque de G. On peut faire passer par x une (seule) terne de surfaces correspondantes des trois premiers systèmes (35); la surface correspondante du quatrième système coupera G en n_4 points x'. Réci proquement, si l'on prend arbitrairement un point x' sur G, les surfaces (n_4) passant par x' forment un réseau, et les réseaux correspondants dans les trois premiers systèmes engendrent (23) une surface qui rencontrera G en $n_1+n_2+n_3$ points x. Donc

Le lieu d'un point où se coupent quatre surfaces correspondantes de quatre systèmes linéaires projectifs d'ordres n_1, n_2, n_3, n_4 *est une surface de l'ordre* $n_1+n_2+n_3+n_4$.

Cette surface contient évidemment une infinité de courbes gauches d'ordre n_2n_3+ $+n_3n_1+n_1n_2+n_1n_4+n_2n_4+n_3n_4$, chacune desquelles est engendrée (24) par quatre réseaux correspondants. La même surface passe par la courbe d'ordre $n_1^2+n_2^2+n_3^2+$ $+n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2$ engendrée (35) par les trois premiers systèmes; et de même pour es autres combinaisons ternaires des quatre systèmes donnés.

37. Quel est *le lieu d'un point x dont les plans polaires, par rapport à quatre surfaces données d'ordres* n_1, n_2, n_3, n_4 *resp., passent par un même point x'?* Les premières polaires de x' doivent passer par x; et d'ailleurs les premières polaires des points de l'espace, par rapport aux quatre surfaces données, forment quatre systèmes linéaires projectifs d'ordres $n_1-1, n_2-1, n_3-1, n_4-1$; donc (36) le lieu du point x où se coupent quatre surfaces correspondantes, c'est-à-dire le lieu demandé, *est une surface de l'ordre* $n_1+n_2+n_3+n_4-4$. On donne à cette surface le nom de *Jacobienne des quatre surfaces données.* Il est évident que la Jacobienne passe par les points multiples des surfaces données, car chacun de ces points a un plan polaire indéterminé.

Soit $n_4=n_3$; dans ce cas on a deux surfaces d'ordres n_1, n_2, et un faisceau de surfaces d'ordre n_3; et la Jacobienne devient une surface de l'ordre $n_1+n_2+2(n_3-2)$, lieu d'un point dont les plans polaires, par rapport aux surfaces d'ordres n_1, n_2, et à toutes celles du faisceau, ont un point commun: ou, ce qui est la même chose, *lieu d'un point dont les plans polaires, par rapport aux surfaces d'ordres* n_1, n_2 *et à une des surfaces du faisceau, passent par une même droite.* Cette Jacobienne passe par les $4(n_3-1)^2$ points doubles des surfaces du faisceau (20). Si une des surfaces du faisceau touche la courbe d'intersection des deux surfaces fixes, le point de contact appartient à la Jacobienne, car trois plans polaires de ce point passent par une même droite (la tangente à la courbe); *il y a* donc, *dans un faisceau d'ordre* n_3, *le nombre* $n_1 n_2(n_1+n_2+2n_3-4)$ *de surfaces qui sont tangentes à la courbe d'intersection de deux surfaces donneés d'ordres* n_1, n_2.

Si $n_4=n_3=n_2$, nous aurons une surface fixe d'ordre n_1 et un réseau de surfaces d'ordre n_2; et la Jacobienne, surface d'ordre n_1+3n_2-4, deviendra le lieu d'un point dont le plan polaire par rapport à la surface fixe coïncide avec le plan polaire par rapport à une des surfaces du réseau (31). Cette Jacobienne contiendra la courbe gauche d'ordre $6(n_2-1)^2$, lieu des points doubles des surfaces du réseau (25).

Si $n_1=n_2=n_3=n_4=n$, *la Jacobienne*, surface d'ordre $4(n-1)$, *devient le lieu d'un point* x *dont les plans polaires par rapport à toutes les surfaces d'un système linéaire d'ordre* n *passent par un même point* x'. Il résulte de ce qui précède que *cette surface est aussi le lieu des points doubles des surfaces du système*, et contient par suite un nombre infini de courbes gauches d'ordre $6(n-1)^2$, chacune de celles-ci étant le lieu des points doubles d'un réseau appartenant au système. On peut dire encore (32) que *la Jacobienne d'un système linéaire est le lieu des points de contact entre les surfaces du système.*

Si $n=2$, le système est formé par des surfaces quadriques. Dans ce cas, les plans polaires de x passant par x', réciproquement les plans polaires de x' passeront par x; c'est-à-dire que x' est lui-même un point de la Jacobienne. *La Jacobienne (surface du quatrième ordre) d'un système linéaire de quadriques est* donc, *non-seulement le lieu des sommets des cones du système, mais encore le lieu des couples des poles conjugués par rapport à toutes les surfaces du système.*

38. Cherchons maintenant *le lieu d'un point dont les plans polaires, par rapport à trois surfaces données d'ordres* n_1, n_2, n_3, *passent par une même droite.* Les premières polaires des points de l'espace, par rapport aux trois surfaces données, forment trois systèmes (linéaires) projectifs d'ordres n_1-1, n_2-1, n_3-1 resp. Un point du lieu doit être commun aux premières polaires de tous les points d'une droite, c'est-à-dire que par ce point passe un nombre infini de ternes de surfaces correspondantes des trois systèmes projectifs; le lieu cherché *est* donc (35) *une courbe gauche de l'ordre*

$(n_1-1)^2+(n_2-1)^2+(n_3-1)^2+(n_2-1)(n_3-1)+(n_3-1)(n_1-1)+(n_1-1)(n_2-1)=$ $=n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2-4(n_1+n_2+n_3)+6$, qui passe évidemment *par les points multiples des surfaces données* *).

Si $n_3=n_2$, la courbe obtenue devient le lieu d'un point dont le plan polaire par rapport à une surface fixe d'ordre n, coïncide avec le plan polaire relatif à une des surfaces d'un faisceau d'ordre n_2; on retombe ainsi sur un résultat déjà obtenu autrement (33).

Si $n_1=n_2=n_3=n$, on retrouve *la courbe gauche d'ordre* $6(n-1)^2$, *lieu des points doubles des surfaces d'un réseau d'ordre n* (25); cette courbe *est* donc *aussi le lieu d'un point dont les plans polaires, par rapport à toutes les surfaces du réseau, passent par une même droite.*

39. On se donne deux surfaces d'ordres n_1, n_2; les premières polaires de tous les points de l'espace, par rapport à ces surfaces, formeront deux systèmes linéaires projectifs d'ordres n_1-1, n_2-1. Si un point x a même plan polaire par rapport aux surfaces données, les premières polaires de tous les points de ce plan passeront par x, c'est-à-dire que x est commun à toutes les surfaces de deux réseaux correspondants. Concluons donc (34) que *le nombre des points dont chacun a même plan polaire par rapport aux deux surfaces données est* $\big((n_1-1)+(n_2-1)\big)\big((n_1-1)^2+(n_2-1)^2\big)\ldots$ **).

Si $n_1=n_2$, on a le nombre des points doubles d'un faisceau; chacun de ces points a, en effet, même plan polaire par rapport à toutes les surfaces du faisceau.

40. *Quel est le lieu d'un point par lequel passent cinq surfaces correspondantes de cinq systèmes (linéaires) projectifs, d'ordres $n_1, n_2, \ldots n_5$ resp.?* Les trois premiers systèmes combinés successivement avec le quatrième et le cinquième, donnent (36) deux surfaces d'ordres $n_1+n_2+n_3+n_4, n_1+n_2+n_3+n_5$ resp., qui passent ensemble par la courbe gauche d'ordre $n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2$ engendrée (35) par les trois premiers systèmes; elles se couperont donc suivant *une* autre *courbe gauche de l'ordre* $n_1n_2+n_1n_3+\ldots+n_4n_5$, *qui est le lieu demandé.* Naturellement cette courbe contient une infinité de groupes de $n_1n_2n_3+\ldots+n_3n_4n_5$ points, chacun desquels est engendré (29) par cinq réseaux correspondants, appartenant aux systèmes donnés.

41. On se donne six systèmes (linéaires) projectifs de surfaces d'ordres $n_1, n_2, \ldots n_6$ resp.; cherchons le nombre des points où se rencontrent six surfaces correspondantes. Les trois premiers systèmes, combinés successivement avec le quatrième, le cinquième et le sixième, donnent (36) trois surfaces d'ordres $n_1+n_2+n_3+n_4$, $n_1+n_2+n_3+n_5$, $n_1+n_2+n_3+n_6$ resp. qui ont en commun la courbe d'ordre $n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2$,

*) [On peut appeler cette courbe *Jacobienne des trois surfaces* données.]

**) [Nous pouvons dire que ces points forment *la Jacobienne des deux surfaces* données.]

due (35) aux trois premiers systèmes. Outre cette courbe, les deux surfaces d'ordres $n_1+\ldots+n_4$, $n_1+\ldots+n_5$ passent ensemble par une autre courbe de l'ordre $n_1n_2+\ldots+n_4n_5$, qui rencontre la première en $n_1^2n_2+\ldots+n_2n_3^2+(n_4+n_5)(n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2)+2n_1n_2n_3$ *) points. En calculant l'excès du nombre total des intersections de la courbe d'ordre $n_1n_2+\ldots+n_4n_5$ avec la surface d'ordre $n_1+\ldots+n_6$, sur le nombre précédent, on trouve le nombre cherché. Donc il y a $n_1n_2n_3+\ldots+n_4n_5n_6$ *points dont chacun est commun à six surfaces correspondantes de six systèmes (linéaires) projectifs d'ordres* $n_1, n_2, \ldots n_6$.

Chapitre Troisième.

Assemblages symétriques. [6]

42. Si deux faisceaux projectifs de surfaces du même ordre n ont une surface commune P_{12}, mais qui ne correspond pas à soi-même, on voit sans peine que la surface Φ d'ordre $2n$, engendrée par les deux faisceaux, sera touchée le long de la courbe-base du premier faisceau par la surface P_{11} de ce même faisceau, qui correspond à la surface P_{12} de l'autre **), et sera touchée le long de la courbe-base du second faisceau par la surface P_{22} de celui-ci, correspondante à la surface P_{12} du premier. Aux points communs aux surfaces P_{11}, P_{12}, P_{22}, c'est-à-dire aux points communs aux bases des deux faisceaux, la surface Φ sera touchée par P_{11} et par P_{22}; or ces deux surfaces, étant quelconques, n'ont en général aucun point de contact; donc les points communs à P_{11}, P_{12}, P_{22} sont doubles pour la surface Φ. C'est-à-dire que *la surface engendrée par deux faisceaux projectifs d'ordre n formant un assemblage symétrique a n^3 points doubles.*

43. Les surfaces correspondantes de trois réseaux projectifs du même ordre n soient représentées resp. par

$$\begin{array}{ccccc} P_{11}, & P_{12}, & P_{13}, & P_{14}, & \ldots \\ P_{21}, & P_{22}, & P_{23}, & P_{24}, & \ldots \\ P_{31}, & P_{32}, & P_{33}, & P_{34}, & \ldots \end{array}$$

et supposons que P_{rs} et P_{sr} soient toujours une seule et même surface. Dans cette hypothèse, les trois réseaux forment un assemblage symétrique. Soit Ψ la surface d'ordre $3n$, lieu d'un point où se coupent trois surfaces correspondantes; on peut obtenir cette surface de la manière suivante.

*) On calcule ce nombre par la méthode employée ailleurs (27 et 28).

**) En effet, la surface du deuxième faisceau qui passe par un point quelconque de la base du premier est P_{12} (17).

Les deux faisceaux correspondants (P_{22}, P_{23}), (P_{32}, P_{33}) engendrent une surface Φ_{11} d'ordre $2n$, qui (42) est touchée par P_{33} le long de la courbe-base du second faisceau. De même, les faisceaux correspondants (P_{11}, P_{13}), (P_{31}, P_{33}) engendrent une surface Φ_{22} d'ordre $2n$, touchée par P_{33} le long de la courbe $P_{31}P_{33}$. Et les deux faisceaux correspondants (P_{21}, P_{23}), (P_{31}, P_{33}), ou (ce qui revient au même *)) les faisceaux correspondants (P_{12}, P_{13}), (P_{32}, P_{33}), [7] engendreront une surface Φ_{12} ou Φ_{21} d'ordre $2n$, rencontrée par P_{33} suivant les courbes $P_{13}P_{33}$, $P_{23}P_{33}$, et, à cause de cela, touchée par la même surface P_{33} aux points communs aux surfaces P_{13}, P_{23}, P_{33}.

Les surfaces analogues à Φ_{11}, Φ_{12}, engendrées à l'aide de faisceaux correspondants du deuxième et du troisième réseau, forment un nouveau réseau (22), et chacune d'elles peut être regardée comme étant déterminée par le faisceau du troisième réseau qu'on emploie pour l'engendrer. De même pour les surfaces analogues à Φ_{21}, Φ_{22}, engendrées à l'aide de faisceaux correspondants du premier et du troisième réseau.

La surface Φ_{11} (du réseau $\Phi_{11}, \Phi_{12}, \ldots$) et la surface Φ_{21} (du réseau $\Phi_{21}, \Phi_{22}, \ldots$) correspondent au même faisceau (P_{32}, P_{33}) du troisième réseau donné, et resp. aux faisceaux (P_{22}, P_{23}), (P_{12}, P_{13}) du second et du premier réseau; ces surfaces contiennent donc, outre la courbe $P_{32}P_{33}$, la courbe lieu des points où se coupent trois surfaces correspondantes de ces trois faisceaux, qui sont projectifs. Et cette seconde courbe appartient aussi à Ψ, car ces trois faisceaux sont correspondants dans les trois réseaux donnés.

Analoguement, la surface Φ_{12} (du réseau $\Phi_{11}, \Phi_{12}, \ldots$) et la surface Φ_{22} (du réseau $\Phi_{21}, \Phi_{22}, \ldots$) correspondent au même faisceau (P_{31}, P_{33}) du troisième réseau donné et resp. aux faisceaux (P_{21}, P_{23}), (P_{11}, P_{13}) du second et du premier réseau; par conséquent, ces surfaces contiendront, outre la courbe $P_{31}P_{33}$, la courbe engendrée par ces trois faisceaux, qui sont projectifs: courbe, qui est aussi située sur Ψ, parce que ces faisceaux sont correspondants dans les réseaux donnés.

De même, une surface quelconque Φ_{1r} du faisceau (Φ_{11}, Φ_{12}) et la surface *correspondante* Φ_{2r} du faisceau (Φ_{21}, Φ_{22}) (les deux surfaces étant relatives à un même faisceau du troisième réseau donné) auront en commun, non-seulement une courbe d'ordre n^2 située sur P_{33} et sur une surface du faisceau (P_{31}, P_{32}), mais aussi une courbe d'ordre $3n^2$ si-

*) Une surface d'ordre $2n$, engendrée par deux faisceaux projectifs (U, V), (U', V') d'ordre n, peut aussi être engendrée par deux autres faisceaux projectifs (U, U'), (V, V'), où à une surface U'' du premier faisceau correspond une surface V'' de l'autre, de la manière suivante: U'' rencontre la surface $(2n)$ suivant la base UU' et une autre courbe K d'ordre n^2, par laquelle et par la base VV' on peut faire passer une surface V'' d'ordre n. En effet, K a n^3 points communs avec la base VV' (les points communs aux surfaces U'', V, V'); donc une surface d'ordre n, passant par la base VV' et par un point de K non situé sur cette base, aura n^3+1 points communs avec K, et par conséquent contiendra cette courbe, tout entière.

tuée sur Ψ. Les surfaces Ψ et P_{33} forment donc ensemble le lieu complet engendré par les faisceaux projectifs (Φ_{11}, Φ_{12}), (Φ_{21}, Φ_{22}). D'où il suit que, Φ_{12} et Φ_{21} étant une seule et même surface, *la surface Ψ est touchée par Φ_{11} et Φ_{22} le long de deux courbes d'ordre $3n^2$ situées sur Φ_{12}* (42); et que *les points doubles de Ψ sont les points communs aux trois surfaces Φ_{11}, Φ_{12}, Φ_{22}*. Or nous avons vu que ces surfaces sont touchées à la fois par P_{33}, aux points communs aux surfaces P_{13}, P_{23}, P_{33}; et chacun de ces points de contact absorbe quatre points d'intersection des trois surfaces Φ *); *la surface Ψ a donc $(2n)^3-4n^3=4n^3$ points doubles*. Et par ces points passe toute surface Φ, engendrée par deux faisceaux correspondants dans deux des réseaux donnés.

44. On peut, d'une manière analogue, construire la surface Ψ lieu d'un point où se coupent trois surfaces correspondantes des trois réseaux projectifs (P, Q, R), (P′, Q′, R′), (P″, Q″, R″), d'ordres n_1, n_2, n_3, lesquels ne forment pas un assemblage symétrique (23).

Les deux faisceaux (Q′, R′), (Q″, R″) engendrent une surface Φ_1 d'ordre n_2+n_3, qui est coupée par R″ suivant deux courbes, R″Q″ et R″R′.

Les deux faisceaux (Q, R), (Q″, R″) engendrent une surface Φ'_1 d'ordre n_1+n_3, qui est coupée par R″ suivant deux courbes, R″Q″ et R″R.

Les deux faisceaux (P′, R′) (P″, R″) engendrent une surface Φ_2 d'ordre n_2+n_3, qui est coupée par R″ suivant deux courbes, R″P″ et R″R′.

Et les deux faisceaux (P, R), (P″, R″) engendrent une surface Φ'_2 d'ordre n_1+n_3, qui est coupée par R″ suivant deux courbes, R″P″ et R″R.

Les surfaces Φ_1, Φ_2 déterminent un faisceau d'ordre n_2+n_3 projectif au faisceau (Q″, P″). Si S″ est une surface quelconque de ce dernier faisceau, les faisceaux correspondants (S′, R′), (S″, R″) engendreront la surface Φ (du faisceau (Φ_1, Φ_2)) qui correspond à S″.

De même, les surfaces Φ'_1, Φ'_2 déterminent un faisceau d'ordre n_1+n_3 qui est, lui aussi, projectif au faisceau (Q″, P″). La surface Φ' correspondante à S″ est engendrée par les faisceaux correspondants (S, R), (S″, R″).

Les surfaces Φ, Φ', outre la courbe R″S″, contiennent évidemment la courbe lieu d'un point où se croisent trois surfaces correspondantes des faisceaux projectifs (S, R), (S′, R′), (S″, R″): courbe qui est située sur Ψ, car ces trois faisceaux sont correspondants dans les réseaux donnés. Les faisceaux projectifs (Φ_1, Φ_2), (Φ'_1, Φ'_2) engendrent donc un lieu qui est composé des surfaces R″ et Ψ.

45. Dans la recherche précédente soit $n_1=n_2=n_3=n$. Dans ce cas ((43), *note*) une surface quelconque R_0 du faisceau (R′, R″) coupe Φ_1 et Φ_2 suivant deux courbes situées

*) Cela est évident pour deux surfaces quelconques et un plan qui se touchent en un même point.

resp. sur deux surfaces Q_0, P_0 appartenant aux faisceaux (Q', Q''), (P', P''). D'où il suit que les réseaux projectifs (P, Q, R), (P_0, Q_0, R_0), (P'', Q'', R'') donneront naissance aux mêmes surfaces Φ_1, Φ_2, Φ'_1, Φ'_2, et engendreront une surface d'ordre $3n$ qui, ayant quatre courbes d'ordre $3n^2$ en commun avec Ψ, coïncidera avec cette dernière surface. C'est-à-dire que, *si une surface d'ordre* $3n$ *est engendrée par trois réseaux projectifs* $(P, Q, R, \ldots)$, $(P', Q', R', \ldots)$, $(P'', Q'', R'', \ldots)$ *d'ordre* n, on peut substituer à l'un de ceux-ci, par ex. au deuxième, un nouveau réseau $(P_0, Q_0, R_0, \ldots)$ projectif aux donnés, et formé par des surfaces qui appartiennent resp. aux faisceaux (P', P''), (Q', Q'') (R', R''),....

Analoguement, nous pourrons remplacer un autre des réseaux donnés, $(P, Q, R, \ldots)$ par un nouveau réseau $(P''', Q''', R''', \ldots)$ projectif au précédent, où les surfaces P''', Q''', R''',... appartiennent resp. aux faisceaux (P, P_0), (Q, Q_0), (R, R_0), ou, ce qui est la même chose, aux réseaux (P, P', P''), (Q, Q', Q'') et (R, R', R''). Donc enfin, *on pourra engendrer la même surface* Ψ *par trois nouveaux réseaux* $(P''', Q''', R''', \ldots)$, $(P^{IV}, Q^{IV}, R^{IV}, \ldots)$, $(P^{V}, Q^{V}, R^{V}, \ldots)$ *projectifs aux donnés et formés par des surfaces appartenant resp. aux réseaux* $(P, P', P'', \ldots)$, $(Q, Q', Q'', \ldots)$, $(R, R', R'', \ldots)$.

De plus: *les réseaux projectifs* $(P, P', P'', P''', \ldots)$ $(Q, Q', Q'', Q''', \ldots)$ *et* $(R, R', R'', R''', \ldots)$ *engendrent une surface d'ordre* $3n^2$ *qui* contient les quatre courbes $\Phi_1\Phi_2$, $\Phi_1\Phi'_1$, $\Phi'_1\Phi'_2$, $\Phi_2\Phi'_2$ d'ordre $3n^2$, et par suite *coïncide avec* Ψ.

46. Représentons par

$$\begin{array}{cccccc}
P_{11}, & P_{12}, & P_{13}, & P_{14}, & P_{15}, & \ldots \\
P_{21}, & P_{22}, & P_{23}, & P_{24}, & P_{25}, & \ldots \\
P_{31}, & P_{32}, & P_{33}, & P_{34}, & P_{35}, & \ldots \\
P_{41}, & P_{42}, & P_{43}, & P_{44}, & P_{45}, & \ldots
\end{array}$$

les surfaces correspondantes de quatre systèmes linéaires projectifs du même ordre n et supposons que P_{rs} et P_{sr} soit toujours une seule et même surface. Dans cette hypothèse, les quatre systèmes forment un assemblage symétrique. La surface Δ d'ordre $4n$, lieu d'un point où se coupent quatre surfaces correspondantes (36), peut être construite de la manière suivante.

Les trois réseaux correspondants (P_{22}, P_{23}, P_{24}), (P_{32}, P_{33}, P_{34}), (P_{42}, P_{43}, P_{44}) donnent (43) une surface Ψ_{11} d'ordre $3n$, qui est touchée par la surface Φ engendrée par les faisceaux (P_{33}, P_{34}), (P_{43}, P_{44}) suivant une courbe d'ordre $3n^2$ (située sur la surface engendrée par les faisceaux (P_{32}, P_{34}), (P_{42}, P_{44}), ou par les faisceaux (P_{23}, P_{24}), (P_{43}, P_{44})), laquelle est le lieu d'un point où se coupent trois surfaces correspondantes des faisceaux projectifs (P_{23}, P_{24}), (P_{33}, P_{34}), (P_{43}, P_{44}).

D'une manière semblable, les trois réseaux correspondants (P_{11}, P_{13}, P_{14}), (P_{31}, P_{33}, P_{34}), (P_{41}, P_{43}, P_{44}) engendrent (43) une surface Ψ_{22} d'ordre $3n$, qui est touchée par la surface

Φ suivant une courbe d'ordre $3n^2$ (située sur la surface engendrée par les faisceaux (P_{13}, P_{14}), (P_{43}, P_{44}) ou par les faisceaux (P_{31}, P_{34}), (P_{41}, P_{44})), laquelle est le lieu des intersections de trois surfaces correspondantes des faisceaux projectifs (P_{13}, P_{14}), (P_{33}, P_{34}), (P_{43}, P_{44}).

Enfin, les trois réseaux correspondants (P_{21}, P_{23}, P_{24}), (P_{31}, P_{33}, P_{34}), (P_{41}, P_{43}, P_{44}), ou ce qui revient au même (45), les trois réseaux correspondants (P_{12}, P_{13}, P_{14}), (P_{32}, P_{33}, P_{34}), (P_{42}, P_{43}, P_{44}), [8] engendrent (44) une surface Ψ_{12} ou Ψ_{21} d'ordre $3n$, qui est coupée par Φ suivant les deux courbes d'ordre $3n^2$ déjà mentionnées. D'où il suit que les points communs à ces deux courbes, c'est-à-dire les $4n^3$ points (19) par lesquels passent quatre surfaces correspondantes des faisceaux projectifs (P_{13}, P_{14}), (P_{23}, P_{24}), (P_{33}, P_{34}), (P_{43}, P_{44}), sont tels que la surface Φ y est tangente à chacune des surfaces Ψ_{11}, Ψ_{22}, Ψ_{12}.

Les surfaces Ψ_{11}, Ψ_{12} déterminent un faisceau projectif au faisceau (P_{42}, P_{41}). Si P_{4r} est une surface quelconque de ce dernier faisceau, et si P_{3r}, P_{2r}, P_{1r} sont les surfaces correspondantes des faisceaux (P_{32}, P_{31}), (P_{22}, P_{21}), (P_{12}, P_{11}), la surface correspondante Ψ_{1r} du faisceau (Ψ_{11}, Ψ_{12}) sera engendrée (44) par les réseaux (P_{2r}, P_{23}, P_{24}), (P_{3r}, P_{33}, P_{34}), (P_{4r}, P_{43}, P_{44}).

Les surfaces Ψ_{21}, Ψ_{22} déterminent un autre faisceau projectif au même faisceau (P_{42}, P_{41}). La surface Ψ_{2r} du faisceau (Ψ_{21}, Ψ_{22}), qui correspond à P_{4r}, est engendrée par les réseaux (P_{1r}, P_{13}, P_{14}), (P_{3r}, P_{33}, P_{34}), (P_{4r}, P_{43}, P_{44}).

Les deux surfaces Ψ_{1r}, Ψ_{2r} d'ordre $3n$ passent ensemble par la courbe d'ordre $3n^2$ engendrée par les faisceaux (P_{r3}, P_{r4}), (P_{33}, P_{34}), (P_{43}, P_{44}) et située sur la surface Φ; elles se couperont donc suivant une autre courbe de l'ordre $6n^2$, lieu d'un point (24) par lequel passent à la fois quatre surfaces correspondantes des quatre réseaux projectifs (P_{1r}, P_{13}, P_{14}), (P_{2r}, P_{23}, P_{24}), (P_{3r}, P_{33}, P_{34}), (P_{4r}, P_{43}, P_{44}). Cette courbe appartient à Δ, car ces quatre réseaux sont correspondants dans les systèmes donnés; les faisceaux projectifs (Ψ_{11}, Ψ_{12}), (Ψ_{21}, Ψ_{22}) engendrent donc un lieu composé de la surface Φ d'ordre $2n$ et de la surface Δ d'ordre $4n$.

On en conclut (42) que les points doubles du lieu composé $\Delta\Phi$ sont les intersections des trois surfaces Ψ_{11}, Ψ_{22}, Ψ_{12}. Nous avons vu que ces trois surfaces ont $4n^3$ points de contact, qui sont équivalents à $4 . 4n$ intersections; le nombre des points doubles est donc $(3n)^3 - 16n^3 = 11n^3$. Mais les points doubles de Φ sont (42) les n^3 intersections des surfaces P_{33}, P_{44}, P_{34}; ainsi *Δ a $10n^3$ points doubles, situés sur toutes les surfaces* analogues à Ψ_{11}, Ψ_{22}, Ψ_{12}, ...

De ce que Δ est engendrée au moyen de faisceaux projectifs formant un assemblage symétrique (42), il suit encore que *cette surface est touchée par Ψ_{11} et Ψ_{22} suivant deux courbes d'ordre $6n^2$, situées sur Ψ_{12}.*

Chapitre Quatrième.

Propriétés relatives aux surfaces nodales conjuguées.

47. Revenons à la considération d'une surface fondamentale F_n d'ordre n (générale, sans points multiples) et des surfaces polaires. On a vu (2) que les premières polaires de tous les points de l'espace forment un système linéaire d'ordre $n-1$. La Jacobienne de ce système, c'est-à-dire le lieu des points doubles des premières polaires, ou bien encore (13) le lieu d'un point dont la quadrique polaire est un cone, sera (37) une surface de l'ordre $4(n-2)$. On appelle cette surface la *Hessienne* ou la *surface nodale* de la surface fondamentale.

Soient P_1, P_2, P_3, P_4 les premières polaires de quatre points quelconques **1**, **2**, **3**, **4** (non situés dans un même plan); on peut regarder (37) la Hessienne comme Jacobienne de ces quatre surfaces d'ordre $n-1$. Les premières polaires de tous les points de l'espace, par rapport à ces quatre surfaces, forment, d'après le théorème (11), un assemblage symétrique de quatre systèmes linéaires projectifs d'ordre $n-2$; donc (46), *la Hessienne a* $10(n-2)^3$ *points doubles, situés sur un nombre infini de surfaces* (Ψ_{11}, Ψ_{12}, ...) *d'ordre* $3(n-2)$.

En designant par P_{rs} la deuxième polaire mixte de deux points rs, et en conservant du reste les symboles adoptés ci-dessus (46), on voit tout de suite que Ψ_{12} *est le lieu des poles du plan* **134** *par rapport aux premières polaires des points du plan* **234** (30), *et aussi le lieu des poles du plan* **234** *par rapport aux premières polaires des points du plan* **134**. Or, d'après le théorème (11), si le plan **134** est la polaire $(n-2)^{ème}$ d'un point x, par rapport à la première polaire d'un point r du plan **234**, le même plan **134** est aussi la première polaire de r, par rapport à la polaire $(n-2)^{ème}$ de x, c'est-à-dire que **134** est le plan polaire de r par rapport à la quadrique polaire de x. Donc, Ψ_{12} *est le lieu d'un point x tel que les plans* **134**, **234** *sont conjugués par rapport à la quadrique polaire de x* *).

Comme cas particulier, Ψ_{11} *est le lieu des poles du plan* **234** *par rapport aux premières polaires des points de ce même plan, et aussi le lieu d'un point dont la quadrique polaire est tangente au plan* **234**; et Ψ_{22} aura la même signification par rapport au plan **134**. Appelons ces surfaces Ψ_{11}, Ψ_{22} *surfaces polaires pures* des plans **234**, **134** resp., et Ψ_{12} *surface polaire mixte* de ces mêmes plans. Donc (46):

La Hessienne est touchée par la surface polaire pure d'un plan quelconque suivant une courbe gauche d'ordre $6(n-2)^2$, *qui est le lieu des points doubles des premières polaires dont*

*) La section de Ψ_{12} par l'un des plans **234**, **134** est évidemment le lieu des points de contact de ce plan avec les premières polaires des points de l'autre.

les poles sont dans le plan donné. Les deux courbes de contact entre la Hessienne et les surfaces polaires pures de deux plans quelconques sont situées ensemble sur la surface polaire mixte de ces deux plans. Toutes ces surfaces polaires pures et mixtes, et dès lors toutes ces courbes gauches d'ordre $6(n-2)^2$ *passent par les* $10(n-2)^3$ *points doubles de la Hessienne.*

48. La surface Ψ, polaire pure d'un plan quelconque **123**, a $4(n-2)^3$ points doubles (43) situés sur un nombre infini de surfaces (Φ_{11}, Φ_{12}, ...) d'ordre $2(n-2)$. Si r, s sont deux points fixes d'une droite donnée, et que x soit un point mobile sur une autre droite donnée G, les surfaces P_{rx}, P_{sx} formeront deux faisceaux projectifs, générateurs d'*une surface* Φ *d'ordre* $2(n-2)$, *qui sera le lieu des courbes polaires* (*d'ordre* $(n-2)^2$) *de la droite rs par rapport aux premières polaires des points de* G (3). Or, d'après le théorème (12), si les premières polaires de r, s par rapport à la première polaire de x passent par un point y, réciproquement la première polaire de x par rapport à la $(n-2)^{ème}$ polaire de y passera par r, s; c'est-à-dire que le plan polaire de x par rapport à la quadrique polaire de y passera par la droite rs. Donc, Φ *est le lieu d'un point y tel que la droite réciproque de la droite* G, *par rapport à la quadrique polaire de y, est rencontrée par la droite rs.* Dans cette définition, on peut évidemment permuter entre elles les droites rs, G; donc Φ *est aussi le lieu des courbes polaires de* G *par rapport aux premières polaires des points de rs* *). D'après ce qui précède, la surface P_{rx} coupe Φ suivant deux courbes d'ordre $(n-2)^2$, dont l'une est la courbe polaire de la droite rs par rapport à la première polaire du point x de G, et l'autre est la courbe polaire de G par rapport à la première polaire du point r de rs; or, les $(n-2)^3$ points communs à ces deux courbes sont autant de points de contact entre P_{rx} et Φ; donc Φ *est aussi l'enveloppe de la deuxième polaire mixte de deux poles mobiles, l'un sur* G, *l'autre sur rs.* Nous appelons cette surface Φ *surface polaire mixte* des droites G et rs.

En revenant à la surface Ψ, on voit que Φ_{12} est la surface polaire mixte des droites **13**, **23**. Aussi, Φ_{11} a la même signification par rapport à deux droites coïncidentes: c'est-à-dire que Φ_{11} *est le lieu des poles dont les quadriques polaires sont tangentes à la droite* **23**, etc. Appelons ce lieu *surface polaire pure* de la droite **23**. Ainsi, en résumé (43):

---

*) Si l'on convient d'appeler *Jacobienne* de quatre surfaces, dont quelques-unes soient des plans, le lieu d'un point où se coupent les premières polaires d'un point situé dans les plans donnés par rapport aux autres surfaces données; Φ sera la Jacobienne de deux plans passant par G et des surfaces P_r, P_s. De même, Ψ_{12} est la Jacobienne du plan **134** et des surfaces P_2, P_3, P_4; etc.

La surface polaire (pure) d'un plan donné est touchée par la surface polaire pure d'une droite quelconque située dans ce plan, suivant une courbe gauche d'ordre $3(n-2)^2$, *qui est le lieu des poles du plan par rapport aux premières polaires des points de la droite. Les deux courbes de contact entre la surface polaire du plan et les surfaces polaires pures de deux droites tracées dans ce plan, sont placées sur la surface polaire mixte des deux droites. Toutes ces surfaces polaires pures et mixtes (des droites du plan), et par suite toutes ces courbes gauches d'ordre* $3(n-2)^2$, *passent par les* $4(n-2)^3$ *points doubles de la surface polaire du plan donné.*

49. La surface P_{rs} (deuxième polaire mixte des points r, s) admet, elle aussi, une définition analogue à celles des surfaces Ψ_{12} et Φ_{12}. En effet, si la première polaire de r par rapport à la première polaire de s passe par un point x, réciproquement, d'après le théorème (12), la première polaire de s par rapport à la $(n-2)^{ème}$ polaire de x passera par r, c'est-à-dire que le plan polaire de s par rapport à la quadrique polaire de x passe par r. Donc, P_{rs} *est le lieu d'un point x tel que les points r, s sont conjugués par rapport à la quadrique polaire de x.* Si les points r, s coïncident, on retombe sur la définition de P_{rr} *(deuxième polaire pure* du point *r).*

50. La surface Φ, polaire pure d'une droite quelconque **12**, a $(n-2)^3$ points doubles (42) situés dans un nombre infini de surfaces $(P_{11}, P_{12}, \ldots)$ d'ordre $n-2$. On est ainsi conduit à dire que:

La surface polaire (pure) d'une droite donnée est touchée par la deuxième polaire pure d'un point quelconque de cette droite suivant une courbe gauche d'ordre $(n-2)^2$, *qui est la courbe polaire de la droite par rapport à la première polaire du point. Les deux courbes de contact entre la surface polaire de la droite et les deuxièmes polaires pures de deux points quelconques de la même droite, sont placées sur la deuxième polaire mixte de ces points. Toutes ces deuxièmes polaires pures et mixtes (des points de la droite), et dès lors toutes ces courbes d'ordre* $(n-2)^2$, *passent par les* $(n-2)^3$ *points doubles de la surface polaire de la droite donnée.*

51. Il résulte de ce qui précède (48, 50) que *la surface polaire pure d'un plan est l'enveloppe des surfaces polaires pures des droites situées dans ce plan,* et que *la surface polaire pure d'une droite est l'enveloppe des deuxièmes polaires pures des points de cette droite.* On peut ajouter, d'après (43, 46), que *les surfaces polaires pures et mixte de deux droites, situées dans un même plan, sont touchées aux mêmes* $(n-2)^3$ *points par la deuxième polaire pure du point de concours de ces droites* (d'où il résulte que *la surface polaire pure d'un plan est aussi l'enveloppe des deuxièmes polaires pures des points du plan);* et que les surfaces polaires pures et mixte de deux plans sont touchées aux mêmes $4(n-2)^3$ points par la surface polaire pure de la droite commune à ces plans. Et en outre (44): la courbe gauche d'ordre $3(n-2)^2$, lieu des poles d'un

plan donné par rapport aux premières polaires des points d'une droite donnée, est placée sur la surface polaire mixte de ce plan et d'un autre plan quelconque passant par la droite donnée, et aussi sur la surface polaire mixte de cette droite et d'une autre droite quelconque située dans le plan donné. Etc. etc.

52. Les premières polaires des points d'une droite quelconque forment un faisceau, qui contient $4(n-2)^3$ surfaces douées d'un point double (20). Donc, *le lieu des poles dont les premières polaires ont un point double, est une surface d'ordre* $4(n-2)^3$. On l'appelle *surface nodale conjuguée* ou *surface Steinerienne.*

Nous pouvons dire (13) que *la Hessienne est le lieu des points dont les quadriques polaires sont des cones*, et que *la Steinerienne est le lieu des sommets de ces cones.*

La Hessienne et la Steinerienne se correspondent, point à point. Si o est un point double de la première polaire d'un point o', c'est-à-dire, si o est le pole d'un cone quadrique de sommet o', les points o, o' seront deux points correspondants de la Hessienne et de la Steinerienne.

53. *La Hessienne est aussi le lieu des points de contact entre les premières polaires* (32). Soient o, o' deux points correspondants des deux surfaces nodales conjuguées; la première polaire de o' et une autre première polaire { dont p soit le pole { passant par o détermineront un faisceau de surfaces touchées en o par un même plan E. { Le plan E est le plan polaire de o par rapport à la première polaire de p, c'est-à-dire le plan polaire de p par rapport au cone quadrique polaire de o, dont le sommet est o'. Donc E passe par o' { [9], c'est-à-dire que *le plan* E *passe toujours par la droite* oo'.

54. Soient o, o_1 deux points, infiniment voisins, de la Hessienne; o', o'_1 leurs points correspondants sur la Steinerienne. Dès que les premières polaires de o', o'_1 sont consécutives et douées des points doubles o, o_1, leur courbe d'intersection passera par o, et conséquemment le plan polaire de o passera par $o'o'_1$, qui est une droite tangente en o' à la Steinerienne [10]. Cela subsiste quelle que soit la direction de cette tangente; donc *le plan polaire d'un point de la Hessienne est tangent à la Steinerienne au point correspondant.*

On déduit de là que *la Steinerienne est une surface de la classe* $4(n-1)^2(n-2)$, car ce nombre est celui des intersections de la Hessienne avec la courbe polaire d'une droite quelconque.

55. Les poles d'un plan (par rapport à la surface fondamentale) sont (3) les $(n-1)^3$ intersections des premières polaires de trois points a, b, c de ce plan. Soit a un point de la Steinerienne, et soit abc le plan tangent à cette surface en ce point; dans ce cas, la première polaire de a est douée d'un point double a', et les premières polaires de b et c passent par a'. D'où il suit que *le plan tangent à la Steinerienne, en un de ses points, a deux poles coïncidents au point correspondant de la Hessienne.*

56. Un point double ω de la Hessienne est situé sur la surface polaire mixte de deux plans quelconques (47); c'est-à-dire qu'il y a dans un plan quelconque un point tel que le plan polaire de ω, par rapport à la première polaire de ce point, est indéterminé [11]: autrement, il y a dans un plan quelconque un point dont la première polaire a un point double en ω. Donc, ω est le point double d'un nombre infini de premières polaires, les poles desquelles, appartenant naturellement à la Steinerienne (52), sont en ligne droite (car il y a un tel pole dans un plan quelconque). Ainsi, *au point* ω *correspond sur la Steinerienne*, au lieu d'un point unique, *une droite*, dont chaque point sera, par conséquent, double pour la quadrique polaire de ω; c'est-à-dire que *la quadrique polaire de* ω *est une couple de plans passant par cette droite.* Et *le plan polaire de* ω *sera tangent à la Steinerienne tout le long de cette même droite.* Donc:

La Steinerienne contient $10(n-2)^3$ *droites, dont chacune correspond à un des points doubles de la Hessienne.*

57. Deux courbes situées resp. sur la Hessienne et sur la Steinerienne peuvent être nommées *correspondantes*, lorsque l'une est le lieu des points correspondants aux points de l'autre. Ainsi par ex. la courbe plane d'ordre $4(n-2)^3$, où la Steinerienne est coupée par un plan quelconque E, et la courbe gauche d'ordre $6(n-2)^2$, au long de laquelle la Hessienne est touchée par la surface polaire (pure) de E (47), sont deux courbes correspondantes; parce que la deuxième courbe est le lieu des points doubles des premières polaires des points de E.

On peut très-facilement déterminer la courbe qui correspond à l'intersection de la Hessienne avec une surface quelconque S_m d'ordre m. Soit K la surface enveloppe des plans polaires des points de S_m: surface qui est aussi le lieu d'un point dont la première polaire est tangente à S_m (15). Si o est un point commun à S_m et à la Hessienne, le plan polaire de o touchera à la fois K et la Steinerienne au point correspondant o' (54). Or, la première polaire de o', ayant un point double en o, touche S_m en ce point; donc o' appartient aussi à K, et par suite la Steinerienne et la surface K ont un point de contact en o'. Donc K *est tangente à la Steinerienne tout le long de la courbe qui correspond à l'intersection de la Hessienne avec* S_m *).

Les points où cette courbe de contact est rencontrée par un plan quelconque correspondent aux points communs à S_m et à une courbe d'ordre $6(n-2)^2$; *l'ordre de la courbe de contact est* donc $6m(n-2)^2$.

On peut demander aussi l'ordre de K. Les points où cette surface est rencontrée

*) Ce même raisonnement prouve aussi que la développable polaire d'une droite touche la Steinerienne aux points correspondants aux intersections de la Hessienne avec cette droite. (Et de même pour une ligne quelconque).

par une droite arbitraire sont les poles d'autant de surfaces d'un faisceau, qui touchent S_m; donc (33) K *est de l'ordre* $m(3(n-2)^2+(m-1)^2+2(n-2)(m-1))$. Si $m=1$, l'ordre de K (lieu d'un point dont la première polaire est tangente à un plan donné) est $3(n-2)^2$: ainsi qu'on l'a déjà trouvé (15).

58. Nous avons vu (5) que la quadrique polaire d'un point parabolique de la surface fondamentale est un cone. Réciproquement, il est évident que tout point de la surface fondamentale, dont la quadrique polaire soit un cone (n'ayant pas son sommet au pole, auquel cas on aurait un point double), est un point parabolique. Par conséquent, *le lieu des points paraboliques est la courbe gauche d'ordre* $4n(n-2)$, *intersection de la surface fondamentale avec la Hessienne.* Naturellement, cette courbe partage la surface F_n en deux régions, dont l'une contient les points hyperboliques (à indicatrice hyperbolique) et l'autre les points elliptiques (à indicatrice elliptique). C'est-à-dire que le plan tangent, en un point de la surface F_n, coupe celle-ci dans une courbe pour laquelle le point de contact est un nœud ou un point isolé, suivant que ce point appartient à la première ou à la deuxième région.

59. Un plan tangent de F_n est stationnaire si le point de contact est parabolique. Or, la première polaire d'un point quelconque de l'espace rencontre la courbe parabolique en $4n(n-1)(n-2)$ points; ce nombre exprime donc, combien de plans stationnaires passent par ce point arbitraire: ainsi qu'on l'a déjà trouvé ailleurs (8).

60. Supposons que la surface fondamentale F_n contienne une droite A. Un plan mené arbitrairement par A coupe F_n dans une courbe d'ordre $n-1$; et une surface d'ordre $n-1$, menée aussi arbitrairement par cette courbe, rencontrera de nouveau F_n dans une courbe gauche C d'ordre $(n-1)^2$, qu'on peut prendre comme base d'un faisceau d'ordre $n-1$. Une surface quelconque S de ce faisceau coupe F dans une courbe plane d'ordre $n-1$, dont le plan E passe par la droite A (car cette dernière courbe doit contenir les $n-1$ intersections de S avec A). Ainsi, la surface F_n peut être engendrée à l'aide de deux faisceaux projectifs, l'un de plans E par A, l'autre de surfaces S par C.

Tout plan E est tangent à F_n en $n-1$ points: c'est-à-dire aux points où A rencontre la surface S correspondante à E; car ces points sont doubles pour la section de F_n par E. On peut demander le nombre des plans E qui touchent F_n hors de la droite A. Un plan E mené arbitrairement par A touche $3(n-2)^2$ surfaces S′ (car celles-ci forment un faisceau), auxquelles correspondent autant de plans E′. Réciproquement, la surface S′ correspondante à un plan arbitraire E′ est de la classe $(n-1)(n-2)^2$, et par suite elle est touchée par autant de plans E. Il y aura donc $3(n-2)^2+(n-1)(n-2)^2$ coïncidences de E avec E′, c'est-à-dire qu'*il y aura* $(n+2)(n-2)^2$ *plans* E *dont chacun coupera* F_n *suivant une courbe (d'ordre* $n-1$*) douée de point double.*

Dans le faisceau des surfaces S il y en a $2(n-2)$ qui touchent A; les points de contact sont les points doubles de l'involution d'ordre $n-1$ formée sur A par les surfaces S, ou, ce qui est la même chose, par les courbes d'ordre $n-1$ communes à F_n et aux plans E. Ces $2(n-2)$ points sont les seuls points paraboliques qui se trouvent sur A; car si un point de A est parabolique, le plan E tangent à F_n en ce point doit couper cette surface suivant une courbe (d'ordre $(n-1)$) touchée en ce point par A. Mais d'un autre côté, la Hessienne étant de l'ordre $4(n-2)$, ces $2(n-2)$ points doivent représenter les $4(n-2)$ intersections de cette surface avec la droite A; donc

Toute droite située sur la surface fondamentale est tangente en $2(n-2)$ *points à la surface Hessienne, et par suite à la courbe parabolique.*

61. Cherchons l'ordre du *lieu des paires de droites osculatrices à la surface fondamentale, aux points de l'intersection de celle-ci avec une autre surface* S_m *d'ordre* m. Souvenons-nous que les droites osculatrices en un point de F_n forment l'intersection du plan polaire et de la quadrique polaire de ce point (5). Soit donc G une droite arbitraire; x un point quelconque de cette droite. Si une quadrique polaire passe par x, le lieu du pole est la deuxième polaire de x qui coupera la courbe (mn) en $mn(n-2)$ points; et les plans polaires de ces points rencontreront G en $mn(n-2)$ points x'. Réciproquement, les plans polaires qui passent par un point quelconque x' de G ont leurs poles dans la première polaire de x', qui traversera la courbe (mn) en $mn(n-1)$ points, dont les quadriques polaires donnent $2mn(n-1)$ points x sur G. Il y aura donc, sur G, $mn(n-2)+2mn(n-1)$ coïncidences de x avec x', c'est-à-dire que *le lieu demandé est une surface de l'ordre* $mn(3n-4)$.

Pour cette surface (gauche, en général) la courbe (mn) est double, car chacun de ses points est l'intersection de deux génératrices rectilignes. Si $m=1$, le lieu en question coupe le plan S suivant la section de F_n par S et les $3n(n-2)$ tangentes stationnaires de cette courbe plane.

Si $m=4(n-2)$, l'ordre du lieu devient $4n(n-2)(3n-4)$; mais, si S_m est la Hessienne, il faut prendre la moitié seulement de ce nombre, parce que la courbe (mn) est, dans ce cas, la courbe parabolique (58), et par conséquent, en chacun de ses points les deux droites osculatrices sont coïncidentes.

Dans ce même cas, le lieu est une surface développable, car le plan tangent à F_n en un point parabolique est stationnaire (c'est-à-dire qu'il doit être regardé comme un plan bitangent, dont les deux points de contact sont infiniment voisins), et deux plans stationnaires consécutifs passent par la droite osculatrice *); d'où il suit que *le lieu des droites osculatrices, le long de la courbe parabolique, coïncide avec la surface*

*) [*Teoria geometrica delle superficie*, 31].

enveloppée par les plans stationnaires *), dont nous avons déjà déterminé la classe (8). **)

62. On demande à connaître *la développable circonscrite à la surface fondamentale suivant la courbe d'ordre n, intersection de celle-ci avec un plan donné* E.

La première polaire d'un point arbitraire x de l'espace rencontre la courbe (n) en $n(n-1)$ points; *la classe de la développable* est donc $n(n-1)$.

Si deux de ces $n(n-1)$ points coïncident, le point x appartiendra à la développable; combien de points de cette espèce y a-t-il dans une droite arbitraire G? Les premières polaires des points de G forment un faisceau et par suite coupent le plan E suivant un faisceau d'ordre $n-1$, dans lequel il y a $n(3n-5)$ courbes ***) qui touchent la courbe (n), celle-ci étant supposée sans points multiples. Si cette courbe a δ points doubles et k rebroussements (c'est-à-dire, si le plan E a δ contacts ordinaires et k contacts stationnaires avec F_n), le nombre précédent deviendra $n(3n-5)-(2\delta+3k)$. *Ce nombre exprime* donc *l'ordre de notre développable.*

Si, parmi les $n(n-1)$ intersections de la première polaire de x avec la courbe (n), il y a trois points coïncidents, le point x appartiendra à la courbe cuspidale de la développable; et si, au contraire, la première polaire de x a deux contacts avec la courbe (n), x sera un point de la courbe double de la développable. On peut donc demander combien de points x de cette espèce sont contenus dans un plan quelconque. Les premières polaires des points de ce plan coupent E suivant un réseau d'ordre $n-1$, dans lequel il y a $6n(n-2)-(6\delta+8k)$ courbes osculatrices à la courbe (n), et $\frac{1}{2}\left(n(3n-5)-(2\delta+3k)\right)^2-n(11n-21)+10\delta+\frac{27}{2}k$ courbes qui touchent la même courbe en deux points distincts. *Ces nombres expriment* donc *l'ordre de la courbe cuspidale et l'ordre de la courbe nodale de la développable* dont il s'agit.

63. Quel est *le lieu d'un point tel que sa quadrique polaire* (par rapport à F_n) *passe par les sommets d'un tétraèdre conjugué à une surface donnée* S *de second ordre?* Soient a, b deux points quelconques {conjugués par rapport à S}; C la courbe d'ordre $(n-2)^2$, intersection des deuxièmes polaires de a et b, et dès lors lieu des poles des quadriques polaires qui passent par ces points; a', b' les points où S coupe la droite réciproque de ab par rapport à S. Les quadriques polaires passant par a et b, forment une

---

*) *Cette développable est circonscrite à la Steinerienne suivant la courbe d'ordre* $6n(n-2)^2$ *qui correspond* (57) *à la courbe parabolique.* En effet, si o est un point parabolique, le plan (stationnaire) polaire de o touche en ce point la surface fondamentale, et au point correspondant, la Steinerienne (54).

**) {Ces droites osculatrices ne sont pas les tangentes de la courbe parabolique.}

***) Ce nombre et les autres qui suivent sont empruntés aux traités géométriques des courbes planes. [*Teoria geometrica delle curve piane,* 87 et 103.]

série telle qu'il y en a $(n-2)^3$ passant par un troisième point quelconque donné; donc, il y aura $(n-2)^3$ quadriques de cette même série qui diviseront harmoniquement le segment $a'b'$; c'est-à-dire que la courbe C rencontre le lieu cherché en $(n-2)^3$ points. Conséquemment ce lieu *est une surface d'ordre* $(n-2)^3 : (n-2)^2 = n-2$.

Tout point commun à ce lieu et à la Hessienne est dès lors le pole d'un cone (quadrique) polaire circonscrit à un trièdre conjugué à S. Donc (57) *le lieu des sommets des cones* (quadriques) *polaires circonscrits à des trièdres conjugués à la quadrique donnée est une courbe gauche d'ordre* $6(n-2)^3$.

64. Quel est *le lieu d'un point tel que sa quadrique polaire soit inscrite dans un tétraèdre conjugué à une surface donnée* S *de second ordre?* Soient A, B deux plans quelconques $\{$conjugués par rapport à S$\}$; C la courbe d'ordre $9(n-2)^2$, intersection des surfaces polaires (pures) des plans A, B, et dès lors lieu des poles des quadriques polaires qui touchent chacun de ces plans; A', B' les plans tangents de S menés par la droite qui est réciproque de la droite AB par rapport à S. Les quadriques polaires tangentes à A et à B forment une série telle qu'il y en a $27(n-2)^3$ tangentes à un troisième plan quelconque; donc il y en a aussi $27(n-2)^3$ telles qui seront conjuguées aux plans A', B'. Ainsi la courbe C contient $27(n-2)^3$ points du lieu demandé; donc ce lieu *est une surface de l'ordre* $27(n-2)^3 : 9(n-2)^2 = 3(n-2)$.

Si le tétraèdre conjugué à S a un sommet x sur S, la face opposée sera le plan tangent à cette surface en x, et, des trois autres faces, une coïncidera avec ce même plan tangent, et les deux restantes seront deux plans quelconques menés par deux tangentes conjuguées de S en x. Un tel tétraèdre peut donc être regardé comme étant circonscrit à un cone quadrique quelconque de sommet x. Par conséquent, si x est un point commun à S et à la Steinerienne, le pole du cone polaire de sommet x appartiendra au lieu dont il s'agit; c'est-à-dire que *ce lieu coupe la Hessienne suivant la courbe correspondante à l'intersection de la Steinerienne avec S.*

Si S est le système de deux plans, le lieu considéré devient évidemment la surface polaire mixte de ces plans (45).

65. Cherchons *le lieu d'un point tel que sa quadrique polaire, par rapport à la surface fondamentale* F_n, *passe par les sommets d'un tétraèdre conjugué à la quadrique polaire du même point, par rapport à la Hessienne.* Soit G une droite arbitraire; x un point de G. Le lieu des poles des quadriques polaires relatives à F_n, circonscrites à des tétraèdres conjugués à la quadrique polaire du point x par rapport à la Hessienne, coupe la droite G en $n-2$ points x' (63). Réciproquement, si une quadrique polaire relative à la Hessienne doit être conjuguée à un tétraèdre inscrit à la quadrique polaire d'un point x', par rapport à F_n (c'est-à-dire, si la première quadrique doit être inscrite à un tétraèdre conjugué à l'autre), le lieu sera (64) une surface d'ordre

$3\left(4(n-2)-2\right)$, qui coupera G en autant de points x. Cette droite contient donc $n-2+12(n-2)-6$ coïncidences de x avec x'; en d'autres termes, le lieu demandé *est une surface d'ordre* $13n-32$.

Considérant les points communs à cette surface et à la Hessienne, nous pouvons ajouter que le lieu d'un point (sur la Hessienne) dont le cone polaire est circonscrit à un trièdre conjugué à la quadrique polaire du même point, par rapport à la Hessienne, est une courbe gauche de l'ordre $4(n-2)(13n-32)$.

66. Pareillement, on trouve que *le lieu d'un point tel que sa quadrique polaire par rapport à* F_n *soit inscrite à un tétraèdre conjugué à la quadrique polaire du même point par rapport à la Hessienne, est une surface* T *de l'ordre* $4(n-2)-2+3(n-2)=7n-16$.

Cette surface coupera la Hessienne suivant une courbe, chaque point de laquelle sera le pole (relativement a F_n) d'un cone quadrique ayant son sommet sur la quadrique polaire du même point par rapport à la Hessienne. Donc, *le lieu d'un point (sur la Hessienne) dont la quadrique polaire par rapport à la Hessienne, passe par le point correspondant de la Steinerienne, est une courbe gauche d'ordre* $4(n-2)(7n-16)$, *située dans la surface* T. Cette courbe passe deux fois par les $10(n-2)^3$ points doubles de la Hessienne, car chacun de ces points a un nombre infini de points correspondants sur une droite (56) qui coupera deux fois la quadrique polaire de ce point, relative à la Hessienne.

67. Quel est *le lieu d'un point, le plan polaire duquel par rapport à la Hessienne est tangent à la quadrique polaire du même point relativement à* F_n? Soit G une droite arbitraire; x un point de G; X le plan polaire de x par rapport à la Hessienne. Les quadriques polaires relatives à F_n, qui touchent le plan X, ont leurs poles dans la surface polaire (pure) de ce plan (47), qui coupera G en $3(n-2)$ points x'. Réciproquement, si une surface polaire doit passer par x', le plan correspondant sera tangent à la quadrique polaire de x'; or, les poles (relatifs à la Hessienne) des plans tangents d'une surface quadrique, se trouvent sur une surface (16) d'ordre $2\left(4(n-2)-1\right)$, qui coupera G en autant de points x; donc G contiendra $3(n-2)+8(n-2)-2$ coïncidences de x avec x', et par suite le lieu demandé *est une surface* Θ *d'ordre* $11n-24$.

Un point x de la surface T (66) est le sommet d'un tétraèdre circonscrit à la quadrique polaire (de x) par rapport à F_n et conjugué à la quadrique polaire (du même point) relative à la Hessienne, pourvu que ce point x soit situé sur la polaire réciproque de la première quadrique par rapport à l'autre; auquel cas le plan polaire de x par rapport à la Hessienne est tangent à la quadrique polaire du même point par rapport à F_n; c'est-à-dire que, dans cette hypothèse, x est aussi un point de Θ. Donc *le lieu d'un point qui soit un sommet d'un tétraèdre circonscrit et conjugué resp. aux quadriques polaires du même point par rapport à* F_n *et à la Hessienne, est une courbe gauche d'ordre* $(11n-24)(7n-16)$, *intersection des surfaces* Θ *et* T.

68. Quel est *le lieu d'un point tel que son plan polaire par rapport à la Hessienne soit conjugué à un plan donné* E, *par rapport à la quadrique polaire du même point relative à* F_n? Si x est un point d'une droite G, et X le plan polaire de x par rapport à la Hessienne; le lieu des poles des quadriques polaires (relatives à F_n), pour lesquelles E et X sont deux plans conjugués (47), coupera G en $3(n-2)$ points x'. Réciproquement, si y est le pole du plan E par rapport à la quadrique polaire d'un point x', relative à la surface fondamentale, la première polaire de y par rapport à la Hessienne coupera G en $4(n-2)-1$ points x. La droite G contiendra donc $3(n-2)+4(n-2)-1$ coïncidences de x avec x', c'est-à-dire que le lieu cherché *est une surface* Σ_E *d'ordre* $7n-15$.

Si x est un point de la Hessienne, dont le cone polaire ait son sommet sur le plan donné, ou sur le plan polaire de x par rapport à la Hessienne, ce point x appartiendra au lieu Σ_E; car, comme le plan passant par le sommet a un nombre infini de poles (sur la droite polaire du plan, relative au cone), il est conjugué à tout autre plan quelconque. Le premier cas a lieu pour les poles des cones polaires, dont les sommets appartiennent à la courbe d'intersection de la Steinerienne avec le plan E; donc, *le lieu* Σ_E *passe par la courbe gauche d'ordre* $6(n-2)^2$ *qui correspond à la section plane* E *de la Steinerienne* *).

On vérifie la seconde hypothèse, si le plan tangent en x à la Hessienne passe par le sommet x' du cone polaire; auquel cas le point x appartient aussi évidemment à la surface Θ (67). Donc le lieu Σ_E, quel que soit le plan E, passe par la courbe commune à Θ et à la Hessienne **). Cette courbe est de l'ordre $4(n-2)(7n-15)-6(n-2)^2 = 2(n-2)(11n-24)$, nombre qui est la moitié du produit des ordres de Θ et de la Hessienne; donc, *ces deux surfaces se touchent (partout où elles se rencontrent) suivant une courbe gauche d'ordre* $2(n-2)(11n-24)$, *lieu d'un point dont le plan polaire par rapport à la Hessienne passe par le point correspondant de la Steinerienne.*

Toutes ces surfaces Σ d'ordre $7n-15$, passant par une même courbe gauche d'ordre $2(n-2)(11n-24)$, forment un système linéaire. En effet, si a, b, c sont trois points donnés arbitrairement dans l'espace; A, B, C les plans polaires de a, b, c par rapport

*) Le lieu Σ_E et la surface polaire (pure) du plan E se coupent suivant une autre courbe gauche d'ordre $3(n-2)(5n-11)$, qui est évidemment le lieu d'un point tel que sa quadrique polaire par rapport à F_n touche le plan E, et que le plan polaire du même point par rapport à la Hessienne passe par le point de contact.

**) Tout point commun à Θ et à la Hessienne appartient aussi à Σ, car si le plan polaire relatif à la Hessienne doit toucher le cone polaire, il passera par le sommet de celui-ci. Dans le cas de $n=3$, la courbe commune à Θ et à la Hessienne est la courbe correspondante à la courbe parabolique.

à la Hessienne; et a', b', c' les poles des plans A, B, C, par rapport aux quadriques polaires de a, b, c relatives à F_n, le plan $E \equiv a'b'c'$ déterminera la surface (unique) Σ qui passe par a, b, c.

69. On demande *le lieu d'un point tel que la droite commune à un plan donné* E *et au plan polaire de ce point par rapport à la Hessienne soit tangente à la quadrique polaire du même point par rapport à la surface fondamentale.* Pour résoudre cette question, prenons un point x sur une droite quelconque G; le plan polaire de x relatif à la Hessienne coupera E suivant une certaine droite; et le lieu des poles des quadriques polaires, relatives à F_n, qui sont tangentes à cette droite, coupera G en $2(n-2)$ points x' (48). Réciproquement, la quadrique polaire (par rapport à F_n) d'un point x' est coupée par le plan E suivant une conique, qui a $2(4n-9)$ tangentes communes avec la section faite par ce même plan dans l'enveloppe (de classe $4(n-2)-1 \ldots (14)$) des plans polaires des points de G, par rapport à la Hessienne. Le lieu demandé *est* donc *une surface* Ξ_E *d'ordre* $2(n-2)+2(4n-9)=2(5n-11)$.

La surface Θ et la surface Σ_E, relative au plan donné E (68), ayant en commun une courbe d'ordre $2(n-2)(11n-24)$, se couperont suivant une autre courbe gauche d'ordre

$$(7n-15)(11n-24)-2(n-2)(11n-24)=(5n-11)(11n-24).$$

Chaque point x de cette courbe sera tel que son plan polaire par rapport à la Hessienne touchera la quadrique polaire du même point par rapport à F_n (67), et que le plan susdit sera conjugué à E par rapport à la même quadrique (68); donc, E passe par le point où le plan polaire touche la quadrique, et dès lors l'intersection de E par le plan polaire est une droite tangente à la quadrique. Il en suit que x sera un point du lieu Ξ_E. Le même raisonnement prouve que tout point de la courbe d'ordre $3(n-2)(5n-11)$ [v. note au n. 68], commune à la surface polaire (pure) du plan E et au lieu Σ_E, appartient aussi à Ξ_E. Donc, cette surface Ξ_E coupe Σ_E suivant une courbe d'ordre $(5n-11)(11n-24)$ située sur Θ, et suivant une autre courbe d'ordre $3(n-2)(5n-11)$ située sur la surface polaire (pure) du plan E.

Or, on voit sans peine que, d'après les définitions de ces lieux, tout point commun à Ξ_E et à Θ, et tout point commun à Ξ_E et à la surface polaire de E, appartiennent nécessairement à Σ_E; donc *la surface* Ξ_E *est touchée par la surface* Θ *suivant la courbe gauche d'ordre* $(5n-11)(11n-24)$, *et par la surface polaire pure du plan* E *suivant la courbe gauche d'ordre* $3(n-2)(5n-11)$; *et ces courbes de contact sont placées ensemble sur la surface* Σ_E *).

*) Il résulte de là que l'ensemble de la Hessienne, de Ξ_E et d'une surface arbitraire Φ d'ordre $4n-9$ peut être engendré au moyen de deux faisceaux projectifs (Θ, $\Sigma_E \Phi$, ...) d'ordre $11n-24$ et (Σ_E, $S_E \Phi$, ...) d'ordre $7n-15$: où S_E désigne la surface polaire pure du plan E.

70. On demande *le lieu d'un point tel que son plan polaire par rapport à la Hessienne coupe la quadrique polaire du même point, relative à F_n, et deux plans donnés* E, E', *suivant une conique et deux droites conjuguées à celle-ci.* Soit x un point d'une droite arbitraire G; X le plan polaire de x par rapport à la Hessienne; le lieu des poles des quadriques polaires (relatives à F_n) qui coupent ce plan X suivant des coniques conjuguées aux droites XE, XE', est la surface polaire mixte de ces droites (48), qui coupera G en $2(n-2)$ points x'. Réciproquement, soit Q la quadrique polaire d'un point x' par rapport à F_n; on sait que les plans qui coupent la quadrique Q et les plans donnés E, E' suivant une conique et deux droites conjuguées, enveloppent une autre surface quadrique. Cette surface et l'enveloppe des plans polaires des points de G, par rapport à la Hessienne, ont $2(4(n-2)-1)$ plans tangents communs, auxquels correspondront autant de poles x sur G. Le lieu demandé *est* donc *une surface* $\Xi_{EE'}$ *d'ordre* $2(n-2)+2(4n-9)=2(5n-11)$.

Tout point x commun à Θ et au lieu Ξ_E (69) est tel que son plan polaire par rapport à la Hessienne coupe la quadrique polaire de x relative à F_n et le plan E suivant trois droites passant par un seul et même point. La dernière de ces droites a un nombre infini de poles (en ligne droite) par rapport à la conique formée par les deux premières droites, d'où il suit que, relativement à cette conique, la dernière droite est conjuguée à toute droite tracée dans le dit plan polaire de x; donc x est aussi un point du lieu $\Xi_{EE'}$. C'est-à-dire que *ce lieu passe par les deux courbes gauches d'ordre* $(5n-11)(11n-24)$, *suivant lesquelles la surface* Θ *est touchée par les lieux* Ξ_E *et* $\Xi_{E'}$.

71. On demande *le lieu d'un point tel que ses plans polaires par rapport à* F_n *et à la Hessienne, et sa quadrique polaire par rapport à* F_n *aient un point commun sur un plan donné* E. Soit x un point d'une droite arbitraire G; la droite commune aux plans polaires de x rencontre E en un point y, et les quadriques polaires relatives à F_n qui passent par y ont leurs poles sur la deuxième polaire de ce point, laquelle coupera G en $n-2$ points x'. Réciproquement, la quadrique polaire d'un point x' (par rapport à F_n) coupera le plan E suivant une certaine conique $\mathcal{K}$. Or, il y a sur G $10(n-2)$ points x, dont chacun a la propriété que ses plans polaires, relatifs à F_n et à la Hessienne, se rencontrent sur $\mathcal{K}$ *); donc, le lieu demandé *est une surface d'ordre* $11(n-2)$.

Quel que soit le plan E, cette surface passe par les $2(n-2)$ points α où la Hessienne

*) Par un point quelconque i d'une droite R on peut mener deux premières polaires relatives à F_n, les poles desquelles sont les intersections de $\mathcal{K}$ avec le plan polaire de i; et les premières polaires de ces poles, par rapport à la Hessienne, couperont R en $2(4n-9)$ points i'. Réciproquement, par un point i' on peut faire passer deux premières polaires relatives à la Hessienne, dont les poles sont les intersections de $\mathcal{K}$ avec le plan polaire de i' (relatif à la Hessienne). Les premières polaires de ces poles, par rapport à F_n, couperont R en $2(n-1)$ points i. Donc il y aura, sur R, $2(4n-9)+2(n-1)=10(n-2)$ coïncidences de i avec i', q. d. e.

est touchée par une droite a située dans la surface fondamentale (60); car les plans polaires et la quadrique polaire de α passent ensemble par la droite a et dès lors ont un point commun avec tout plan donné . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Chapitre Cinquième.

Application des propriétés générales à une surface fondamentale du troisième ordre.

72. La surface fondamentale sera désormais une surface F_3 du troisième ordre, tout à fait générale, c'est-à-dire sans points et lignes multiples. Les théorèmes démontrés précédemment contiennent déjà un grand nombre de propriétés des surfaces cubiques; mais nous ne nous arrêterons pas à donner les énoncés particuliers. Nous nous proposons seulement de développer ce qu'il y a de spécial et de caractéristique à la surface du troisième ordre.

La première polaire étant, dans le cas actuel, la quadrique polaire, *la surface Hessienne et la Steinerienne coïncident en une seule et même surface du quatrième ordre et de la seizième classe* (52, 54). *Les points de cette surface se correspondent deux à deux*; *o et o' étant deux points correspondants, chacun d'eux est le sommet d'un cone quadrique polaire dont l'autre est le pole; et en chacun de ces points la Hessienne a pour plan tangent le plan polaire de l'autre.* Ces mêmes points sont conjugués par rapport à toutes les quadriques polaires (37).

73. La deuxième polaire mixte de deux points a, b devient un plan, lieu d'un tel point, que par rapport à sa quadrique polaire les points a, b sont conjugués (49). Si l'on se donne un des points a, b, et leur plan polaire mixte, on trouve l'autre point de la manière suivante: les quadriques polaires des points du plan donné forment un réseau, et les plans polaires de a par rapport à ces surfaces passent par un même point b, qui sera le point cherché *).

Si a est fixe, et que le plan polaire mixte tourne autour d'une droite donnée G le point b décrira una droite G', intersection des plans polaires de a par rapport aux

*) | Si le plan polaire mixte est un plan donné ε, et si le point a décrit un plan ε', le lieu de b sera une surface du 3e ordre, la polaire mixte des deux plans $\varepsilon\,\varepsilon'$. |

quadriques polaires des points de G. Or, G coupe la Hessienne en quatre points, donc *les plans polaires d'un point donné a par rapport aux cones polaires enveloppent une surface de la quatrième classe* [12]. Si a est un point de la Hessienne, le plan polaire mixte passe toujours par a' (sommet du cone polaire de a) [13].

Si a est donné arbitrairement dans l'espace, et b est variable dans un plan fixe E, le plan polaire mixte passe toujours par un point fixe e: le pole de E par rapport à la quadrique polaire de a. Donc, si b décrit la courbe d'intersection de la Hessienne avec le plan E, le plan polaire mixte enveloppe un cone de sommet e, de la quatrième classe (circonscrit à la surface qu'on obtient lorsque b parcourt la Hessienne); c'est-à-dire que *les plans polaires d'un point fixe, par rapport à tous les cones polaires dont les sommets sont dans un même plan, enveloppent un cone de la quatrième classe.*

74. Ce que nous avons nommé en général *surface polaire mixte* de deux droites G, G' devient une quadrique (un hyperboloïde); et puisque, dans le cas actuel, la courbe polaire d'une droite par rapport à une première polaire (3) devient la droite réciproque de la droite donnée par rapport à une surface quadrique; il s'ensuit que *l'hyperboloïde polaire des deux droites* G, G' *est le lieu des droites réciproques de chacune de ces droites par rapport aux quadriques polaires des points de l'autre*, ou bien le lieu d'un point tel que la réciproque de l'une des droites données par rapport à la quadrique polaire de ce point, rencontre l'autre droite donnée.

Si i est un point variable en G, et a, b deux points fixes sur G', l'hyperboloïde polaire est engendré (48) par deux faisceaux projectifs, dans lesquels le plan polaire mixte de a, i correspond au plan polaire mixte de b, i. Or les points a, b peuvent être remplacés par deux autres points quelconques de G'; *l'hyperboloïde polaire de deux droites est* donc *aussi l'enveloppe du plan polaire mixte de deux points variables sur les droites données, respectivement.*

75. Si G, G' coïncident, nous aurons la surface polaire pure d'une droite G, qui sera *un cone du second ordre* (14, 48), dont le sommet est le pole de la quadrique polaire qui passe par G, et dont les génératrices sont les droites réciproques de G par rapport aux quadriques polaires des points de G. *Ce cone est l'enveloppe des plans polaires des points de* G, et par conséquent il est aussi le lieu des poles des quadriques polaires tangentes à G. Nous donnerons à cette surface le nom de *cone polaire* de la droite G, qu'il ne faut pas confondre avec le cone polaire d'un point de la Hessienne.

76. *La surface polaire mixte de deux plans* E, E' est du troisième ordre (47); elle *est le lieu des poles d'un plan par rapport aux quadriques polaires des points de l'autre plan, ou bien* (ce qui revient au même) *le lieu du pole d'une quadrique polaire, par rapport à laquelle les plans* E, E' *sont conjugués.*

Le lieu des poles d'un plan E *par rapport aux quadriques polaires des points d'une* *droite* G (30) *est une cubique* (courbe du troisième ordre) *gauche*, qui se trouve sur l'hyperboloïde polaire de G et d'une autre droite située dans E, et aussi sur la surface polaire mixte de E et d'un autre plan passant par G (51). D'où il suit que l'hyperboloïde polaire de deux droites G, G', si G est fixe et G' variable dans un plan E, engendre un réseau de surfaces passant par une cubique gauche fixe.

77. Si les plans E, E' coïncident, on a *la surface polaire pure d'un plan* E, qui sera l'enveloppe des cones polaires des droites situées dans le plan donné (48), et aussi le lieu des poles du plan par rapport aux quadriques polaires des points de ce même plan (47). Cette deuxième définition revient à dire que cette surface est le lieu d'un point dont la quadrique polaire est tangente au plan donné; donc (15, 51) la même surface se confond avec *l'enveloppe des plans polaires des points du plan donné.* Elle est du troisième ordre, de la quatrième classe, et a quatre points doubles, situés dans les cones polaires et dans les hyperboloïdes polaires de toutes les droites du plan donné*).

Soit a un point de cette surface; la quadrique polaire de a étant tangente au plan E, coupera ce plan suivant deux droites croisées au point de contact a'. Les plans polaires des points de ces droites doivent passer par a, et toucher ailleurs la surface; *un point quelconque de cette surface est* donc *le sommet de deux cones quadriques circonscrits à la surface* (ils sont les cones polaires des deux droites croisées en a'). Le plan polaire de a' est tangent à la surface en a.

Si a est l'un des points doubles de la surface, les deux cones tangents doivent coïncider; et par suite la quadrique polaire de a coupera E suivant deux droites coïncidentes. *Parmi les quadriques polaires tangentes à un plan* E *il y a* donc *quatre cones; leurs poles* (qui appartiendront aussi à la Hessienne) *sont les points doubles de la surface polaire pure du plan.*

Cette surface est la réciproque de la *surface Romaine* de Steiner **).

78. Si un plan E est fixe et qu'un autre plan E' soit mobile autour d'une droite G, la surface polaire mixte des plans E, E' engendre un faisceau; en effet, si cette surface doit passer par un point donné x, le plan E' passera par le pole de E relatif à la première polaire de x. La base du faisceau est composée d'une courbe gauche du sixième ordre (lieu des points doubles des quadriques polaires des points du plan

*) Si un point est à distance infinie, son plan polaire est un plan diamétral de la surface fondamentale. *L'enveloppe des plans diamétraux est* donc *la surface polaire pure du plan à l'infini.* Cette surface est inscrite dans la développable circonscrite à F_n suivant la section à l'infini (15).

) [Voir les Monatsberichte de la r. Acad. de Berlin (juillet et novembre 1863), et le tome LXIII de ce journal, p. 315]. [Queste Opere, n. **55 (t.º 2.º)].

fixe) et d'une cubique gauche (lieu des poles du plan fixe par rapport aux quadriques polaires des points de la droite donnée) (47, 76).

La surface polaire mixte des deux plans E, E' et leurs surfaces polaires pures sont touchées ensemble (51) par le cone polaire de la droite EE' en quatre points de la Hessienne (correspondants aux intersections de cette surface avec la droite EE'), et passent par les dix points doubles de la Hessienne (47). Ces points étant équivalents à $4 \,.\, 4 + 10$ intersections, les trois surfaces nommées, qui sont du troisième ordre, auront un autre et seul point commun: c'est le pole de la quadrique polaire qui passe par la droite EE'.

Chapitre Sixième.

Propriétés de la surface Hessienne d'une surface fondamentale du troisième ordre.

79. Les plans polaires qui passent par un point donné p ont leurs poles sur la quadrique polaire de p. Si ces plans doivent toucher la Hessienne, les poles seront distribués sur la courbe du huitième ordre, intersection de la Hessienne avec la polaire quadrique de p (72). Les points de contact forment une courbe du douzième ordre, intersection de la Hessienne avec la première polaire de p par rapport à la Hessienne. Ces deux courbes du huitième et du douzième ordre sont donc correspondantes (57).

80. Considérons les droites qui passent par p et qui touchent la Hessienne. Aux droites qui passent par p correspond un réseau *) de courbes gauches du quatrième ordre (3) situées sur une surface S du second ordre (la quadrique polaire de p). Chacune de ces courbes gauches résulte de l'intersection de S par une autre quadrique polaire, et par suite (79) les points doubles de ces courbes (points de contact entre S et les autres quadriques polaires) seront situés dans la courbe C du huitième ordre, intersection de la Hessienne avec S. Aux courbes du réseau, qui forment un faisceau, correspondent des droites par p, situées dans un plan; or, dans ce faisceau il y a douze courbes avec point double **); c'est-à-dire que *les droites par p, auxquelles correspondent des courbes gauches du quatrième ordre avec point double, forment un cone Σ du douzième ordre.* A un point quelconque o de la courbe C correspond une génératrice de Σ, qui joint p au point o' qui, dans la Hessienne, correspond à o. Le lieu des points o' est donc une courbe C' du douzième ordre (79). Le plan polaire de o passe par p et touche

*) Un tel réseau résulte des intersections de S avec un réseau d'autres surfaces quadriques polaires.

**) Car, dans un faisceau de quadriques, il y a douze surfaces tangentes à S (33).

la Hessienne (72) en o', et, par suite, il contient la droite tangente à C' en o'; donc, ce plan est tangent au cone Σ suivant la droite po'. C'est-à-dire que le cone Σ est circonscrit à la Hessienne suivant la courbe C'.

La quadrique polaire d'un point quelconque coupe C en seize points: de là résulte que Σ (et par suite la Hessienne) est de la seizième classe (54).

Si l'on considère une droite G passant par p, comme intersection de deux plans tangents du cone Σ, chacun de ces plans aura un pole sur C, et la courbe gauche (du réseau sur S) qui passe par ces deux poles sera la correspondante de G. Si les deux poles coïncident, la courbe gauche devient tangente à C; d'où il suit qu'aux droites tracées sur le cone Σ et dans ses plans stationnaires, correspondent des courbes gauches (du réseau sur S) tangentes à C.

81. Les points où la Hessienne est osculée par des droites issues de p, sont les intersections de cette surface avec la première et la deuxième polaire de p, par rapport à la même surface. Ainsi, parmi les courbes gauches du réseau en S il y a en a $4.3.2=24$ qui ont un point de rebroussement.

Ainsi le cone Σ est du 12^e ordre et de la 16^e classe, et a 24 génératrices stationnaires; il aura donc (à cause des formules de PLÜCKER) 22 génératrices doubles. Parmi ces génératrices doubles, dix sont dues aux points doubles de la Hessienne et correspondent à des courbes du réseau composées de deux coniques (chaque point double a, en effet, pour quadrique polaire une couple de plans (56)); les autres douze génératrices doubles correspondront à autant de courbes du réseau composées d'une cubique gauche et d'une droite.

Pour démontrer cette assertion, considérons le réseau de courbes gauches du quatrième ordre sur la surface quadrique S, et, à cause de brièveté, nommons *génératrices* et *directrices* les droites des deux systèmes qui existent sur cette surface. Soient L, M, N trois génératrices de S; une courbe quelconque du quatrième ordre qui soit tracée sur S coupe en deux points chacune de ces droites; et si trois de ces points (un sur chaque droite) tombent en ligne droite, la courbe se décompose en deux parties, une cubique gauche et une droite (directrice). Si l est un point quelconque de L, la directrice qui passe par l coupera M, N en deux points m, n, et la courbe du réseau qui passe par m, n rencontrera L en deux points l'. Réciproquement, si l' est un point quelconque de L, les courbes du réseau qui passent par l' forment un faisceau et, par suite, déterminent sur M et N deux involutions (quadratiques) projectives. Si une courbe du faisceau coupe M en $m\,m'$ et N en $n\,n'$, le lieu des droites analogues à mn, mn', $m'n$, $m'n'$ est une surface du quatrième ordre (pour laquelle M et N sont des droites doubles), qui coupera L en quatre points l. Il y aura donc, en L, six coïncidences de l avec l', c'est-à-dire qu'il y a six courbes du réseau, dont chacune est composée d'une cubique gauche et d'une droite directrice. Analoguement, il y aura six autres courbes composées d'une cubique gauche et d'une génératrice.

Ainsi, *dans un réseau de courbes gauches de quatrième ordre, tracées sur une surface quadrique,* [14] *il y a:* 1.° *douze courbes composées d'une cubique gauche et d'une droite;* 2.° *dix courbes composées de deux coniques;* 3.° *vingt-quatre courbes avec rebroussement.*

82. Si p est un point de la Hessienne, le cone Σ est du 10^e ordre et de la 16^e classe, avec 10 génératrices doubles (dirigées aux points doubles de la Hessienne) et 18 génératrices stationnaires. C'est-à-dire que *dans un réseau de courbes gauches du quatrième ordre tracées sur un cone (quadrique* polaire de p) *il y en a:* 1.° *dix composées de deux coniques;* 2.° *dix-huit avec rebroussement;* 3.° *six composées d'une droite et d'une cubique gauche* (correspondantes aux six droites qui touchent la Hessienne en p et ailleurs (7)); 4.° *deux avec rebroussement au sommet du cone:* celles-ci correspondent aux deux droites qui osculent la Hessienne en p.

83. Si p est un point double de la Hessienne, cette surface est touchée en p par un nombre infini de plans, dont l'enveloppe est un cone quadrique; la première polaire de p aura donc un nombre infini de points doubles en ligne droite, c'est-à-dire qu'elle sera le système de deux plans se coupant suivant une droite π, située dans la Hessienne: ainsi qu'il résulte même de la théorie générale (56). Les points de cette droite seront les poles d'autant de cones avec le sommet p; ces cones forment donc un faisceau et passent par quatre droites, dont le système représente la courbe polaire de π. Dans ce faisceau il y a trois systèmes de deux plans: ces trois systèmes seront les quadriques polaires de trois points spéciaux de la droite π, doubles pour la Hessienne. *Les dix points doubles p sont* donc *distribués, trois à trois, sur les dix droites π; et celles-ci passent, trois à trois, par les dix points p.*

84. La Hessienne étant *en général* de la 16^e classe, n'a pas d'autres points doubles, outre les dix points p. Et de même, elle ne contient pas d'autres droites, outre les dix droites π. En effet, les quatre intersections d'une droite G avec la Hessienne correspondent aux quatre cones qui passent par la courbe (du quatrième ordre) polaire de G. Si G appartient entièrement à la Hessienne, aux points, en nombre infini, de G correspondra un nombre infini de cones formant un faisceau et, par suite, [15] ayant le même sommet. Ce sommet sera un point double pour la Hessienne, car cette surface y serait touchée par les plans polaires de tous les points de G.

Un point double p n'est pas, en général, situé sur sa droite correspondante π; si cela était, la première polaire de p serait un cone avec le sommet p, et par suite ce point serait double pour la surface fondamentale.

85. Soient o, o' deux points correspondants de la Hessienne; les cones polaires de o, o' auront leurs sommets en o', o resp. et se perceront entre eux suivant une courbe

gauche du quatrième ordre; et les deux autres cones quadriques passant par cette courbe seront les premières polaires des points u, v où la Hessienne est rencontrée de nouveau par la droite oo'. Ces autres cones auront leurs sommets aux points u', v qui correspondent à u, v. Les points $o\,o'u'v'$ sont donc les sommets du tétraèdre conjugué aux quadriques passant par la courbe du quatrième ordre, et par suite les plans $o'u'v'$, $ou'v'$ sont les plans polaires de o, o' respectivement. C'est pourquoi *les plans tangents à la Hessienne en* o, o' *passeront par la droite* $u'v'$.

Puisque les plans polaires de o, o' passent par u', v', réciproquement les cones polaires de u', v' (dont les sommets sont u, v) passeront par o, o'; donc, ils contiennent tout entière la droite $oo'uv$ et se rencontreront de nouveau suivant une cubique gauche.

De ce que les cones polaires de u', v' passent par la droite oo', il s'ensuit que le cone polaire de cette droite aura son sommet (75) en u' et en v', c'est-à-dire qu'il se réduira à la droite $u'v'$. Donc, *les plans polaires des points de* oo' *passent tous par la droite* $u'v'$.

Les points où la droite $u'v'$ rencontre la Hessienne sont les poles des quatre cones quadriques passant par la courbe du quatrième ordre qui est la polaire de la droite considérée; or, cette courbe se décomposant en deux parties (une droite et une cubique gauche) il n'y a que deux cones quadriques passant par ce système; la droite $u'v'$ est donc tangente à la Hessienne en u' et v'.

Ainsi, *toute droite joignant deux points correspondants de la Hessienne jouit de la propriété que les plans polaires de ses points passent par une droite fixe, qui est une tangente double de la même surface.*

86. Si u et v coïncident, c'est-à-dire, si la droite oo' est tangente à la Hessienne (en un point u différent de o, o'), les plans polaires des points de oo' passeront par une même droite qui aura un contact du troisième ordre (en u') avec la Hessienne.

Si u et v coïncident en un point double p, les points u', v' deviennent indéterminés sur la droite correspondante π (83); or, les cones polaires de tous les points de cette droite devant passer (85) par oo', il en suit que oo' *est l'une des quatre droites qui forment la courbe polaire de* π (83).

87. Si o est un point parabolique de la surface fondamentale, son cone polaire a le sommet au point correspondant o', passe par o et est touché suivant oo' par le plan polaire de o (5), savoir par le plan qui touche la Hessienne en o'. Le cone polaire de o' ayant son sommet en o, il s'ensuit que les cones polaires de ces deux points se couperont suivant une courbe gauche dont o sera un point double. L'un des points u, v coïncide avec o'; l'autre soit v. La droite ov' $(\equiv u'v')$ est donc (85) tangente à la Hessienne en o et v'. Les plans qui touchent la surface fondamentale et la Hessienne en o se coupent suivant ov', c'est-à-dire que *cette droite est tangente en* o *à la courbe parabolique* (de la surface fondamentale).

Soit ω le point où la droite ov' rencontre de nouveau la surface fondamentale; la première polaire de ω passe par ω et par oo', et par suite elle rencontre le plan $oo'v'$ suivant deux droites, dont l'une est oo' et l'autre passe par ω. *Ce point* ω *est* donc *le point (unique) d'inflexion de la courbe du troisième ordre (avec rebroussement en o), suivant laquelle la surface fondamentale est coupée par le plan stationnaire $oo'v'$* *).

88. *Dans un plan arbitraire* E, *combien de droites y a-t-il, analogues à oo' (joignant deux points correspondants de la Hessienne)?* Le plan E coupe la Hessienne suivant une courbe du quatrième ordre à laquelle correspond (57) la courbe (gauche du sixième ordre) de contact entre la Hessienne et la surface polaire pure du plan E. Soit o l'un des points où E rencontre cette dernière courbe; ce point, comme appartenant à E, aura son correspondant o' sur la courbe du sixième ordre; et comme appartenant à cette courbe, il aura son correspondant en E. D'où il suit que les six points communs au plan E et à la courbe gauche du sixième ordre sont correspondants, deux à deux. Mais d'un autre côté, deux points correspondants de la Hessienne sont conjugués par rapport à une quadrique polaire quelconque; donc, d'après un théorème connu (dû à M. Hesse), les six points dont il s'agit sont les sommets d'un quadrilatère complet; et *les diagonales de celui-ci sont les seules droites analogues à oo', contenues dans le plan donné* E. Les droites analogues à $u'v'$ (85), qui correspondent aux droites oo' du plan E, sont situées sur la surface polaire de E (et dans un même plan tritangent de celle-ci), parce que les plans polaires des points de E sont tangents à la surface polaire de ce plan (77).

89. Le quadrilatère considéré est déterminé par les intersections de quatre quadriques polaires quelconques (n'appartenant pas à un même réseau) avec le plan E; on sait en effet que, quatre coniques étant données dans un plan, il y a un quadrilatère complet (unique) dont les diagonales sont rencontrées harmoniquement par chacune des coniques données **).

Deux sommets opposés du quadrilatère étant conjugués par rapport aux coniques suivant lesquelles le plan E coupe les quadriques polaires de ses points, il s'ensuit que ce quadrilatère est inscrit à la courbe du troisième ordre, Jacobienne du réseau des coniques mentionnées et section de la surface polaire du plan E par ce même plan. Or, les mêmes six points (sommets du quadrilatère) sont situés dans la courbe plane du quatrième ordre commune à E et à la Hessienne, qui est touchée par la surface polaire de ce plan dans tous les points de la courbe gauche du sixième ordre; donc ces six points sont autant de points de contact entre les courbes suivant lesquelles E coupe sa surface polaire et la Hessienne.

---

*) Et ωv est la tangente stationnaire.

**) [*Mathem. Questions from the Educational Times IV,* London 1866, p. 110].

Il suit de là que les côtés du quadrilatère rencontreront de nouveau la courbe plane du quatrième ordre en quatre points alignés sur une droite G; et cette courbe plane appartiendra au faisceau déterminé par le système des quatre droites formant le quadrilatère et par le système de la courbe du troisième ordre et de la droite G. Donc, si cette dernière courbe a un point double a, ce qui arrive lorsque le plan E est tangent en a à la surface fondamentale *), la droite polaire de a par rapport à la courbe plane du quatrième ordre viendra se confondre avec la droite polaire du même point par rapport au système des quatre côtés du quadrilatère (la polaire harmonique de a par rapport au quadrilatère).

Mais d'ailleurs on sait que, si une cubique plane avec point double passe par les sommets d'un quadrilatère complet, la droite qui joint les trois points d'inflexion est la polaire harmonique du point double par rapport au quadrilatère; donc la droite polaire de a par rapport à la courbe plane du quatrième ordre passera par les points d'inflexion de la courbe du troisième ordre, qui sont aussi les points d'inflexion de la section de la surface fondamentale par E.

Ainsi: *la droite, intersection d'un plan tangent à la surface fondamentale avec le plan polaire du point de contact par rapport à la Hessienne, passe par les trois points d'inflexion de la section faite par le plan tangent dans la surface fondamentale.*

Si le plan tangent est stationnaire, on retombe sur un théorème déjà démontré (87).

90. Dans un plan quelconque E, combien y a-t-il de droites analogues à $u'v'$ (droites dont la courbe polaire soit le système d'une droite oo' et d'une cubique gauche)? Les droites tracées dans le plan E correspondent aux courbes gauches du quatrième ordre passant par les huit poles du plan. On sait que ces huit poles sont tels que la cubique gauche décrite par six d'entre eux rencontre deux fois la droite qui joint les deux autres. Or, huit points combinés par couples donnent $\frac{7 \cdot 8}{2} = 28$ courbes du quatrième ordre composées d'une droite et d'une cubique gauche. *Le plan donné contient* donc 28 *droites analogues à* $u'v'$; elles sont d'ailleurs les 28 tangentes doubles de la section de la Hessienne par le plan E.

Cette section est de la 12^e^ classe et a 24 points d'inflexion; on retrouve ainsi (80) la propriété que dans un faisceau de courbes gauches du quatrième ordre il y en a 12 avec point double; et de plus, on voit que *parmi les courbes gauches de cet ordre, qui passent par les huit intersections de trois surfaces quadriques, il y en a* 24 *qui ont un rebroussement.*

---

*) Si une cubique plane a un point double, toutes les coniques polaires passent par ce point, qui est, par suite, double aussi pour la Jacobienne du réseau des polaires.

91. Une droite quelconque G rencontre la Hessienne en quatre points $abcd$; soient $a'b'c'd'$ les points correspondants. Puisque $a'b'c'd'$ sont les sommets des quatre cones d'un même faisceau de quadriques, le point a' sera le pole du plan $b'c'd'$ par rapport aux cones polaires de b, c, d, c'est-à-dire que $b'c'd'$ est le plan polaire mixte des couples de points $a'b, a'c, a'd$: ou bien encore, $b'c'd'$ est le plan polaire de chacun des points b, c, d par rapport au cone polaire de a'. Or ce cone a pour sommet le point a; le plan $b'c'd'$ passe donc par a.

Ainsi *si abcd sont quatre points de la Hessienne en ligne droite, les points correspondants* $a'b'c'd'$ *sont les sommets d'un tétraèdre dont les faces* $b'c'd'$, $c'd'a'$, $d'a'b'$, $a'b'c'$ *passent par* a, b, c, d *resp.* [16]

92. Toutes les quadriques polaires passant par un point o forment un réseau; et il y en a une qui est tangente en o à un plan donné arbitrairement. Cependant, si o est un point de la Hessienne (et o' le point correspondant), toutes les premières polaires passant par o y sont touchées (53) par des plans passant par la droite oo', et celles qui touchent en o un même plan forment un faisceau et ont leurs poles sur une droite tangente à la Hessienne en o'. D'où il s'ensuit que la droite oo' est la polaire du plan tangent à la Hessienne en o par rapport au cone polaire de o', et aussi la polaire du plan tangent à la même surface en o' par rapport au cone polaire de o. En d'autres termes: *le plan tangent en* o *à la Hessienne et le plan tangent en ce même point à une quadrique polaire quelconque qui y passe, sont conjugués par rapport au cone polaire de* o'.

Réciproquement, *toute droite tangente en* o' *à la Hessienne contient les poles d'un nombre infini de quadriques polaires touchées en* o *par un seul et même plan.*

93. Soit p un point double de la Hessienne et π la droite correspondante (83). Dès que chaque point de π correspond à p, les plans polaires de tous les points de π seront tangents à la Hessienne en p (72), c'est-à-dire que *le cone quadrique (osculateur), formé par les droites osculatrices à la Hessienne en* p, *est le cone polaire de la droite* π. Ce cone contient les trois droites $\pi_1\pi_2\pi_3$ (analogues à π (83)) qui passent par p, car tout point de ces droites est le pole d'un cone polaire dont le sommet est l'un des trois points doubles $p_1 p_2 p_3$ de la Hessienne, situés sur π.

94. Le plan polaire de p est tangent à la Hessienne tout le long de la droite π (56) et, par suite, il coupera cette surface suivant une conique C. De même, le plan polaire de p_1 touchera la Hessienne suivant π_1; or p_1 est un point de π; donc *la Hessienne et le cone polaire de* π *sont touchés le long des droites communes* π_1, π_2, π_3 *par les mêmes plans (les plans polaires de* p_1, p_2, p_3*).*

95. Le point p et un point quelconque de π sont deux points correspondants de la Hessienne; donc la droite qui joint ces points est le lieu des poles dont les plans

polaires passent par une même droite, tangente double de la Hessienne et située dans le plan polaire de p (85). L'un des points de contact est sur π; l'autre appartiendra à la conique C. C'est-à-dire qu'à toute droite tracée par p dans le plan $p\pi$, et considérée comme droite oo', correspond comme droite $u'v'$ une tangente de C. Soient o le point où la première droite rencontre π, et u le point où la même droite coupe de nouveau la Hessienne (les points o' et v sont coïncidents en p); u' et v' les points où la deuxième droite touche C et coupe π, respectivement. On voit que la conique C a pour courbe correspondante la cubique plane (lieu du point u) suivant laquelle le plan $p\pi$ coupe la Hessienne.

La droite $u'v'$ est dans le plan polaire de o; or ce plan est tangent au cone polaire de π; donc ce cone est touché par les droites analogues à $u'v'$; c'est-à-dire que la conique C est la trace du cone sur le plan polaire de p.

Ainsi *le cone osculateur à la Hessienne en un point double touche cette surface suivant trois droites, et la coupe en outre suivant une conique située dans le plan polaire du point double.*

96. Il y a d'autres propriétés du plan $p\pi$ qui méritent d'être remarquées.

Le cone polaire de u' passe par p; de plus, le plan polaire de p par rapport à ce cone (savoir le plan tangent à ce cone suivant pu) est le plan polaire de u' par rapport au cone polaire de p (11), c'est-à-dire, le plan $p\pi$. Ce dernier plan est donc tangent aux cones polaires de tous les points de la conique C, et les génératrices de contact passent par p.

Dès que le plan $p\pi$ touche en o les premières polaires des points p et u', il touchera en ce même point les premières polaires de tous les points de la droite pu', et les coupera suivant des couples de droites en involution, dont les rayons doubles sont op et π. Deux droites R, R' conjuguées dans cette involution appartiendront à une première polaire dont le pole soit q (point de pu'); concevons un plan passant par q et par une tangente quelconque $u'_1v'_1$ de C. Les premières polaires de u'_1, v'_1 passent ensemble (85) par la droite pu_1 qui correspond à $u'_1v'_1$ (de même que pu à $u'v'$); donc les points où cette droite rencontre R, R' seront deux poles du plan $qu'_1v'_1$. C'est-à-dire que les plans polaires des points des droites R, R' enveloppent un seul et même cone qC. Tous les cones analogues passent par la conique C; celle-ci représente donc, elle seule, l'enveloppe des plans polaires des points du plan $p\pi$. Ce qu'on peut démontrer aussi de la manière suivante.

Le point double p a la propriété que toutes les quadriques polaires qui y passent, y sont touchées par un même plan $p\pi$ (92); d'où il résulte que, si par p on tire les deux droites qui rencontrent, chacune deux fois, la courbe (gauche du quatrième ordre) polaire d'une droite quelconque T de l'espace, ces deux transversales seront toujours comprises dans le plan $p\pi$, c'est-à-dire que la courbe polaire d'une droite quelconque a toujours deux cordes issues de p et situées dans le plan $p\pi$. Soit pu l'une de ces cordes; chacun des points où elle s'appuie sur la courbe gauche aura son plan polaire passant par T et par $u'v'$ (d'où il résulte que T coupe $u'v'$): mais ces deux droites donnent un seul plan, donc les deux points où pu traverse la courbe gauche sont les poles d'un même plan passant par T. Deux de ces plans polaires (relatifs aux deux droites pu) sont déterminés par les deux droites $u'v'$ qu'on peut mener dans le plan de C, par la trace de T, à toucher cette conique; donc, par une droite arbitraire T passent deux seuls plans ayant des poles dans le plan $p\pi$, et ces plans sont tangents à C; en d'autres termes, *cette conique est l'enveloppe complet des plans polaires des points du plan* $p\pi$.

Un point quelconque du plan polaire de p appartient à deux droites $u'v'$ (tangentes de C), et par suite la quadrique polaire de ce point passera par les deux droites pu correspondantes (85), c'est-à-dire qu'elle sera tangente en p au plan $p\pi$. *Le lieu des points dont les premières polaires touchent le plan* $p\pi$ *est donc composé:* 1.° *du cone* pC, *dont les points ont leurs quadriques polaires tangentes au plan* $p\pi$, *avec le point de contact sur la droite* π; 2.° *du plan polaire de* p, *dans lequel les points de la conique* C *sont les poles de cones polaires tangents au plan* $p\pi$ *suivant des droites issues de* p, *tandis que les quadriques polaires des autres points du même plan touchent le plan* $p\pi$ *en* p.

Il est évident, d'après ce qui précède, que la courbe gauche du sixième ordre qui en général (47) est la courbe de contact entre la Hessienne et la surface polaire d'un plan, lorsque ce plan est $p\pi$, se réduit au système des quatre droites $\pi\pi_1\pi_2\pi_3$ et de la conique C.

97. Une droite menée arbitrairement par le point double p rencontrera la Hessienne en deux autres points c, d; soient c', d' les points correspondants. Les premières polaires des points de la droite pcd passent par deux coniques situées dans deux plans qui forment la quadrique polaire de p et qui passent par π (83); et dans le faisceau de ces premières polaires, les points dont le plan polaire est constant par rapport à ces surfaces, sont 1.° les points c', d' (sommets des cones du faisceau), dont les plans polaires relatifs aux quadriques du faisceau sont $\pi d'$, $\pi c'$ respectivement, et 2.° les points de π, dont les plans polaires relatifs aux mêmes quadriques passent par la droite $c'd'$. Le plan $\pi d'$ est donc le plan polaire mixte des points dc', c'est-à-dire qu'il est le plan polaire de d par rapport au cone polaire de c', dont le sommet est c. Il résulte d'ici que le plan $\pi d'$ passe par c; et analoguement le plan $\pi c'$ passera par d.

En outre, si x est un point quelconque de π, le plan polaire de x par rapport au cone polaire de c passe par $c'd'$; en d'autres termes, $c'd'$ est dans le plan polaire de c par rapport au cone polaire de x, dont le sommet est p. Donc les points $pc'd'$ sont en ligne droite. Ainsi:

Si une droite menée par le point double p rencontre la Hessienne en c, d, les points correspondants c', d' sont aussi en ligne droite avec p; et les droites cd', c'd se rencontrent sur la droite π.

98. Ces conclusions subsistent même si le point c tombe sur une droite π_4: une des droites de la Hessienne, différente de π (correspondante à p) et de $\pi_1\pi_2\pi_3$ (qui passent par p), savoir correspondante à un point double p_4 situé, par ex., sur π_1. Alors, c' devient le point double p_4, et d' est un point de la droite π_1. Ce même point d' est le pole d'une première polaire avec le point double d; or, les points non-doubles de π_1 ont pour quadriques polaires des cones de sommet p_1; donc d' est le troisième point double p_5 situé sur π_1, et par suite d tombe sur la droite π_5.

Si le point c est variable sur π_4, les points c' ($\equiv p_4$) et d' ($\equiv p_5$), situés tous les deux sur la droite fixe π_1, restent invariables; ainsi d ne sortira pas de π_5. D'où il résulte que les droites π_4 et π_5 sont dans un même plan passant par p. Ce plan doit en outre couper la Hessienne suivant une ligne de second ordre avec un point double en p; cette ligne sera donc le système de deux droites, qui nécessairement se confondent avec π_2 et π_3.

Le point commun aux droites π_4 et π_5 est le pole d'une quadrique polaire avec point double en p_4 et p_5, savoir d'une quadrique composée de deux plans passant par π_1; ainsi ce point commun à π_4 et π_5 sera p_1 (situé sur π).

Les droites $\pi_2\pi_3\pi_4\pi_5$ *forment donc un quadrilatère plan complet, dont les sommets sont six points doubles de la Hessienne. Deux sommets opposés sont des points correspondants*, c'est-à-dire que *chacun d'eux appartient à la droite correspondante à l'autre.*

Quel est le nombre des plans analogues à celui qui contient les quatre droites $\pi_2\pi_3\pi_4\pi_5$? Par chacun des points p passent trois de ces plans, et chaque plan contient six points p: le nombre des plans est donc $\frac{3\,.\,10}{6}=5$.

Ou bien encore: deux tels plans passent par chaque droite π, et chaque plan contient quatre droites π; le nombre des plans est donc $\frac{2\,.\,10}{4}=5$.

Ces cinq plans forment un **pentaèdre** (découvert la première fois par M. Sylvester) *dont les sommets et les arêtes sont les dix points p et les dix droites* π *respectivement.*

De ces cinq plans, trois passent par p et les deux autres par π; donc le sommet commun à trois faces du pentaèdre a pour droite correspondante l'intersection des deux autres faces.

99. Lorsqu'on veut considérer le système de ces cinq plans, il est convenable de les représenter par les nombres **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, de sorte que les dix sommets p (points doubles de la Hessienne) et les dix arêtes opposées respectivement (droites π correspondantes) seront désignées par

123	**124**	**125**	**134**	**135**	**145**	**234**	**235**	**245**	**345**
45	**35**	**34**	**25**	**24**	**23**	**15**	**14**	**13**	**12.**

Un point quelconque de la droite **12** a pour quadrique polaire un cone conjugué au trièdre (83) formé par les plans **345**; et de même les cones polaires dont les poles soient pris arbitrairement sur les droites **13, 14, 15** sont conjugués aux trièdres **245, 235, 234**, respectivement. D'où il s'ensuit que toutes les quadriques polaires du réseau déterminé par ces quatre cones, savoir les quadriques polaires de tous les points du plan **1** sont conjuguées à un seul et même tétraèdre, qui est formé par les plans **2345.**

Les plans **1, 2, 3, 4, 5** *sont les seuls doués de cette propriété que les quadriques polaires de tous les points de chacun d'eux soient conjuguées à un même tétraèdre (formé par les autres quatre plans);* parce qu'on démontre que, si les quadriques polaires d'un réseau sont conjuguées à un seul et même tétraèdre, les arêtes de celui-ci sont situées dans la Hessienne. Cette surface est, en effet, la Jacobienne (37) du système linéaire déterminé par le dit réseau et par une autre quadrique polaire quelconque S (étrangère au réseau). Or, si l'on prend sur l'une des arêtes du tétraèdre un point o, et sur l'arête opposée le point o' où celle-ci est coupée par le plan polaire de o par rapport à S, les points o, o' seront conjugués par rapport à toutes les surfaces du système, et par suite ils appartiendront à la Hessienne.

100. Nous avons constaté (85, 90) que toute droite bitangente à la Hessienne a la propriété d'être l'enveloppe des plans polaires des points d'une autre droite (qui joint deux points correspondants de la surface). Parmi les droites douées de cette propriété il y a les dix arêtes du pentaèdre et les quinze diagonales de ses faces. Chaque arête, comme **12**, correspond à un faisceau de cones polaires (83) dont la base est le système de quatre droites concourant au point correspondant **345**; et réciproquement (3) *les plans polaires des points de chacune de ces quatre droites passeront par la droite* **12.** Chaque diagonale, comme **{123}{145}**, correspond à un faisceau de quadriques polaires (qui ne sont pas cones) dont la base est le système des quatre droites, intersections des deux couples de plans qui forment les quadriques polaires des points **123, 145**; et réciproquement, *les plans polaires des points de ces quatre droites passeront tous par la diagonale considérée.*

101. Nous avons vu qu'à une droite quelconque pcd passant par le point double p correspond une droite $pc'd'$ (97), et il résulte de ce qui précède (98) que, si la droite pcd tombe dans l'une des faces du trièdre $\pi_1\pi_2\pi_3$, la droite $pc'd'$ coïncide avec l'arête opposée du même trièdre. Réciproquement, si pcd est l'une des droites $\pi_1\pi_2\pi_3$, la droite $pc'd'$ est indéterminée parmi celles qui passent par p et qui sont situées dans le plan des deux autres droites π.

Si pcd coïncide avec $pc'd'$, c'est-à-dire si c, d sont deux points correspondants, pcd sera (86) l'une des quatre droites par lesquelles passent les cones polaires de sommet p.

Si pcd est menée dans le plan $p\pi$, le point c' coïncide avec p, et par suite $pc'd'$ est osculatrice à la Hessienne en p; donc, si pcd est variable (autour de p) dans le plan $p\pi$, la droite $pc'd'$ engendre le cone polaire de π. Et, pendant que c parcourt π, et que d décrit une cubique plane avec un point double en p, le point d' engendrera la conique C intersection du cone susdit avec la Hessienne (95). Lorsque pcd est osculatrice à la Hessienne, c'est-à-dire qu'elle touche en p une des branches de la cubique plane, le point d tombe en p et par suite d' en π; d'où il résulte que les deux intersections de la conique C avec la droite π correspondent aux deux points de la cubique plane, infiniment voisins de p.

102. Si la droite pcd est variable dans un plan E (par p) la droite $pc'd'$ engendrera un cone passant par π_1, π_2, π_3, à cause des trois droites suivant lesquelles E coupe les faces du trièdre $\pi_1\pi_2\pi_3$ (101). Ce cone est déterminé par deux autres génératrices, parce que deux droites passant par p déterminent le plan E. Les cones, qui de cette manière correspondent à deux plans E, E_1, ont une seule génératrice commune (outre π_1, π_2, π_3), qui est la droite $pc'd'$ correspondante à l'intersection pcd des deux plans Donc, ces cones correspondants aux plans E sont du second ordre.

Ainsi nous avons *une transformation de figures formées par des droites (et des plans et des cones) issues du point p. A une droite correspond une droite, à un plan correspond un cone quadrique circonscrit au trièdre* $\pi_1\pi_2\pi_3$, *et réciproquement.*

Dès que les points cc', et de même dd', sont conjugués par rapport à toute quadrique polaire, *les droites pcd, pc'd' seront conjuguées par rapport à tous les cones polaires de sommet p.* Ces cones forment un faisceau et passent par les quatre droites qui correspondent à elles-mêmes; et ces quatre droites forment un angle solide dont les droites diagonales sont π_1, π_2, π_3 (intersections des couples de plans qui font partie du faisceau et qui sont les quadriques polaires de p_1, p_2, p_3). Ainsi, *le cone quadrique, circonscrit au trièdre* $\pi_1\pi_2\pi_3$, *qui correspond à un plan* E *est le lieu des droites polaires de ce plan par rapport aux cones du faisceau.* Par conséquent, ce cone coupe les plans $\pi_2\pi_3$, $\pi_3\pi_1$, $\pi_1\pi_2$ suivant les droites conjuguées aux intersections de ceux-ci avec E, par rapport aux couples de droites $\pi_2\pi_3$, $\pi_3\pi_1$, $\pi_1\pi_2$ respectivement [17]; le même cone rencontre le plan E suivant deux droites correspondantes, dont chacune est une génératrice de contact entre E et un cone du faisceau; les plans passant par π_1 et resp. par deux droites correspondantes forment un système harmonique avec les plans $\pi_1\pi_2$, $\pi_1\pi_3$; etc.

103. Considérons un cone cubique (du troisième ordre) passant par les six droites $pp_1, pp_2, pp_3, \pi_1, \pi_2, \pi_3$, et touché suivant les trois dernières par les plans polaires de p_1, p_2, p_3 *); soit pcd une génératrice de ce cone. Le plan πc coupe la Hessienne et

*) Les cones cubiques analogues forment un faisceau, car les conditions communes sont équivalentes à neuf droites par lesquelles passent le système de trois plans $\pi_2\pi_3$, $\pi_3\pi_1$, $\pi_1\pi_2$, et le système du plan $p\pi$ et du cone polaire de la droite π.

ce cone suivant deux cubiques ayant sept points communs, dont trois ont les mêmes tangentes; donc ces cubiques coïncident ensemble. C'est-à-dire que *le cone cubique rencontre la Hessienne suivant une courbe plane* (du troisième ordre) dont le plan est πc, *et, par suite, suivant une autre courbe plane* (du même ordre), dont le plan sera πd. Chacun de ces deux plans suffit évidemment pour déterminer (d'une manière unique) le cone cubique et l'autre plan; donc, *ces couples de plans, contenant les courbes d'intersection de la Hessienne avec les cones cubiques du faisceau* dont il s'agit, *forment une involution*, dont les plans doubles contiendront les courbes de contact entre la Hessienne et deux cones du faisceau. C'est-à-dire que *les tangentes qu'on peut mener à la Hessienne, du point p, forment deux cones cubiques, et les courbes de contact sont dans deux plans passant par π*; le système de ces deux plans est donc [18] la quadrique polaire du point p. Ainsi, *la quadrique polaire de p est constituée par deux plans formant un système harmonique avec les deux plans qui contiennent les deux cubiques planes appartenant à un même cone cubique du faisceau.*

Parmi les cones de ce faisceau il y a celui qui est formé par le plan $p\pi$ avec le cone polaire de π; les plans des sections qui y correspondent sont le plan $p\pi$ et le plan polaire de p. Un autre cone du même faisceau est le trièdre $\pi_1\pi_2\pi_3$, formé par les trois faces du pentaèdre (98) qui concourent en p; les sections correspondantes sont dans les deux autres faces du pentaèdre (qui passent par π), et chacune d'elles est le système de trois droites. D'où l'on tire que *les deux plans formant la quadrique polaire de p, et les deux faces du pentaèdre qui passent par π forment un système harmonique.*

104. Les plans πc, πd passent respectivement par d', c' (97); donc, le cone cubique (du faisceau mentionné) qui passe par pcd passe aussi par $pc'd'$; c'est-à-dire que (102) *ce cone correspond à lui-même.* On conclut d'ici et des propriétés connues des cubiques planes *) que les plans tangents à notre cone suivant deux droites correspondantes pcd, $pc'd'$, se coupent suivant une génératrice du même cone; que tout cone quadrique circonscrit au trièdre $\pi_1\pi_2\pi_3$ coupe le cone cubique suivant les trois génératrices de contact de ce cone avec un seul et même cone de second ordre; et que ces trois génératrices forment un trièdre dont les faces rencontrent le cone cubique suivant trois nouvelles droites situées dans le plan qui correspond au premier cone quadrique. Etc.

105. Nous ferons maintenant quelques remarques sur la surface polaire d'un plan quelconque E passant par le point double p. Ce point étant le sommet d'un nombre infini de cones polaires, dont les poles sont les points de π, *la surface polaire passera par cette droite* et sera touchée suivant celle-ci par le plan polaire de p. La même surface passe en

*) On peut, en effet, considérer le cone cubique comme Jacobienne d'un réseau de cones quadriques (de sommet p) auquel appartienne le faisceau des cones polaires des points de π.

la première courbe coupe en trois points la droite qui n'est pas rencontrée par l'autre courbe. Les deux courbes gauches ont huit points communs. Mais *une courbe* $C_{5,2}$ *et une courbe* $C_{4,0}$ *ne peuvent pas être situées à la fois sur deux surfaces du troisième ordre.*

Comme cas particulier du précédent, l'intersection des surfaces F_3, F_3^0 peut se composer d'une courbe $C_{5,2}$, d'une cubique gauche et d'une droite rencontrée deux fois par chacune des courbes gauches. Celles-ci ont six points communs.

128. Mais il y a lieu de considérer d'autres courbes gauches du cinquième ordre, différentes de $C_{5,2}$. En effet, si F_3^0 passe par une droite et par une cubique gauche, situées dans F_3, l'intersection sera complétée par une courbe gauche du cinquième ordre, qui est (127) du second genre en cas que la droite et la cubique gauche aient deux points communs. Mais, si la droite coupe une seule fois ou ne coupe pas la cubique gauche, on a des courbes gauches d'un genre inférieur.

Le premier cas a lieu par ex. si la courbe plane du neuvième ordre correspondante à la complète intersection de F_3 et F_3^0 est composée de la conique **23456** (qui correspond à la droite b_1), d'une courbe de quatrième ordre $\mathbf{1^2 2^2 3^2 4 5 6}$ (qui correspond à une cubique gauche appuyée à b_1 en un point) et d'une cubique **1456**; à celle-ci correspondra donc *une courbe gauche* $C_{5,1}$ *du cinquième ordre et du premier genre*, qui coupe la cubique gauche en sept [28] points et la droite en trois points. On obtient cette même courbe $C_{5,1}$, lorsque les deux surfaces cubiques ont en commun une courbe $C_{4,0}$; les deux courbes gauches ont alors dix points communs, et la première courbe rencontre en 0, 1, 2, 3 points les mêmes droites que l'autre coupe en 3, 2, 1, 0 points respectivement.

On aura le dernier cas si par ex. la courbe plane du neuvième ordre se décompose dans les trois lignes suivantes: la conique **23456**, qui correspond à la droite b_1; une courbe $\mathbf{1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2}$ du cinquième ordre, qui correspond à une cubique gauche n'ayant aucun point commun avec la droite b_1; et une conique passant par le point **1**, à laquelle correspondra par suite *une courbe gauche* $C_{5,0}$ *du cinquième ordre et du genre* 0. Cette courbe coupe la cubique gauche en huit points, la droite b_1 en quatre points, les droites $b_2, \ldots, b_6$ en trois points, les droites $c_{23}, \ldots, c_{56}$ en deux points, les droites $a_1, c_{12}, \ldots, c_{16}$ en un seul point, et les autres droites $a_2, \ldots, a_6$ en aucun point.

De ces trois courbes gauches $C_{5,2}$, $C_{5,1}$, $C_{5,0}$, du cinquième ordre ce n'est que la première qui est située sur une surface quadrique. Elle a quatre points doubles apparents (c'est-à-dire que par un point arbitraire de l'espace on peut mener quatre droites à rencontrer la courbe deux fois), au lieu que la deuxième en a cinq et la troisième six. La troisième, la plus simple de toutes, est la seule qui admette une droite qui la coupe en quatre points.

129. Cette méthode d'étudier sur le plan E les propriétés des courbes tracées sur F_3

est si évidente et si facile, que nous nous bornerons désormais à énoncer des résultats. Ainsi, pour obtenir les courbes gauches du sixième ordre qui font partie de l'intersection de deux surfaces cubiques, il faudra considérer les cas suivants:

1.° Les surfaces F_3, F_3^0 ont en commun une section plane; l'autre partie de l'intersection est alors *une courbe gauche* $C_{6,4}$ *du sixième ordre et du quatrième genre*, qui résulte aussi de la rencontre de F_3 avec une surface quadrique (122);

2.° Les surfaces F_3, F_3^0 ont en commun une cubique gauche; elles se couperont aussi suivant *une courbe gauche* $C_{6,3}$ *du sixième ordre et du troisième genre*, qui a huit points communs avec la cubique gauche et coupe en 1, 2, 3 points les mêmes droites que la cubique rencontre en 2, 1, 0 points respectivement. D'où il suit que $C_{6,3}$, de même que la cubique, correspond à un certain double-six.

3.° Les surfaces F_3, F_3^0 passent à la fois par une droite et une conique qui n'ont aucun point commun. L'intersection est alors complétée par *une courbe gauche* $C_{6,2}$ *du sixième ordre et du second genre*, qui coupe la conique en six points et la droite donnée en quatre points. Parmi les autres droites il y a 8, 9, 8, 1 qui sont rencontrées en 3, 2, 1, 0 points respectivement.

4.° Les surfaces F_3, F_3^0 ont en commun trois droites qui ne se coupent pas; elles se rencontreront en outre suivant *une courbe gauche* $C_{6,1}$ *du sixième ordre et du premier genre*, qui coupe chacune des trois droites données en quatre points, etc.

De ces quatre courbes gauches du sixième ordre, la première seule est située sur une surface quadrique. Elles ont respectivement six, sept, huit, neuf points doubles apparents.

La courbe $C_{6,3}$ est celle que nous avons rencontrée ailleurs (25, 78, 107) comme lieu des sommets des cones quadriques d'un réseau. La courbe plane correspondante peut être une courbe générale du quatrième ordre (passant par les six points fondamentaux); d'ou il résulte que, comme par ex. cette courbe plane a 28 tangentes doubles et 24 tangentes stationnaires, de même parmi les cubiques gauches qui coupent en deux points les droites de F_3 que $C_{6,3}$ rencontre trois fois, il y en a 28 qui touchent $C_{6,3}$ en deux points, et 24 qui ont avec cette courbe un contact du second ordre.

De même que pour les cubiques gauches, *chaque double-six détermine deux systèmes conjugués de courbes du sixième ordre et troisième genre.* Deux courbes appartenant à deux systèmes conjugués ont quatorze [29] points communs et forment la complète intersection de F_3 avec une surface du quatrième ordre.

130. Il y a aussi *une courbe gauche du sixième ordre et du genre* 0, mais elle n'est pas située à la fois sur deux surfaces cubiques. On obtient cette courbe, en faisant passer une surface du quatrième ordre par trois droites, comme b_1, b_2, b_3, qui ne se coupent pas, et par une cubique gauche (correspondante à une courbe $\mathbf{1^2 2^2 3^2 4\,5\,6}$

du quatrième ordre) qui rencontre chacune de ces droites en un point. La courbe gauche résultante $C_{6,0}$ correspond à une conique qui ne passe par aucun des points fondamentaux, et coupe la cubique gauche en huit points. Des 27 droites de F_3, il y en a 6, 6, 15 rencontrées par $C_{6,0}$ en 4, 0, 2 points respectivement. Cette courbe $C_{6,0}$ a dix points doubles apparents.

131. De l'intersection des deux surfaces cubiques F_3, F_3^0 il ne peut résulter plus que *deux courbes gauches du septième ordre* $C_{7,5}$ *et* $C_{7,4}$, *et une seule courbe gauche du huitième ordre* $C_{8,7}$; on obtient ces courbes en faisant passer F_3^0 par une conique, ou par deux droites qui ne se coupent pas, ou par une droite (de F_3) respectivement [30].

Il y a, sur F_3, 27 systèmes de courbes analogues à $C_{8,7}$, chaque système correspondant à une droite de F_3. Si le système est donné, la courbe est déterminée par quatorze points. Deux courbes d'un même système ont vingt points communs.

L'intersection de F_3 avec des surfaces d'ordres supérieurs donne d'autres courbes du 7^e, 8^e, 9^e,... ordre. Par ex., si par deux droites qui ne se coupent pas et par une cubique gauche qui ne rencontre aucune de ces droites, on fait passer une surface du quatrième ordre, on a *une courbe gauche* $C_{7,1}$ *du septième ordre et du premier genre*, qui coupe la cubique en onze points et chacune des droites données en cinq points. Si par trois droites qui ne se coupent pas et par une courbe $C_{4,0}$ qui rencontre deux de ces droites en un point et ne rencontre pas la troisième, on fait passer une surface du cinquième ordre, l'intersection sera complétée par *une courbe gauche* $C_{8,1}$ *du huitième ordre et du premier genre*, qui coupe $C_{4,0}$ en seize points, les deux premières droites en cinq points et la troisième en six. Enfin, on obtient *une courbe gauche du neuvième ordre et du premier genre*, lorsque l'intersection de F_3 par une surface du sixième ordre se décompose en deux courbes du même ordre [31]; etc. etc.

132. On vient de voir qu'à une même courbe sur F_3, dont l'ordre et le genre soient donnés, correspondent en E des courbes planes d'ordres différents, mais toujours d'un même genre *). En nous bornant à considérer, pour chaque genre, la courbe plane de l'ordre le plus petit possible, nous pourrons donner le résumé suivant:

1.° *A une droite en* E *correspond, en* F_3, *une conique ou une cubique gauche, suivant que la droite passe ou ne passe pas par un des points fondamentaux.*

2.° *A une conique en* E *correspond, en* F_3, *une courbe gauche* $C_{4,0}$, *ou* $C_{5,0}$, *ou* $C_{6,0}$, [32] *suivant que la conique passe par* 2, 1, 0 *points fondamentaux.*

3.° *A une cubique (générale) en* E *correspond, en* F_3, *une cubique plane* $C_{3,1}$, *ou une courbe gauche* $C_{4,1}$, *ou* $C_{5,1}$, *ou* $C_{6,1}$, *ou* $C_{7,1}$, *ou* $C_{8,1}$, *ou* $C_{9,1}$, *suivant que la cubique donnée passe par* 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 *points fondamentaux.*

Etc. etc.

---

*) [*Teoria geom. delle superficie*, 54].

133. Soit en général donnée, dans le plan E, une courbe d'ordre n, qui passe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$ fois par les points **1**, **2**, ... **6** respectivement et qui est douée de d points doubles et k points de rebroussement, situés ailleurs. L'ordre de la courbe gauche correspondante en F_3 sera évidemment $3n-\Sigma\alpha$, et son genre sera celui même de la courbe plane, savoir

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\frac{1}{2}\Sigma\alpha(\alpha-1)-(d+k).$$

Or, une courbe gauche d'ordre $3n-\Sigma\alpha$, douée de d points doubles, k rebroussements et h points doubles apparents, est du genre donné par la formule

$$\frac{1}{2}(3n-\Sigma\alpha-1)(3n-\Sigma\alpha-2)-(h+d+k),$$

donc

$$h=4n^2-3n(\Sigma\alpha+1)+\frac{1}{2}(\Sigma\alpha+1)^2+\frac{1}{2}(\Sigma\alpha^2-1).$$

Connaissant, de cette manière, l'ordre de la courbe gauche (désignons-le par m) et les nombres des points doubles effectifs et apparents, on peut, d'après les formules dues à M. CAYLEY, calculer les autres caractéristiques de la courbe; savoir

l'ordre de la développable osculatrice

$$\rho=m(m-1)-2(h+d)-3k=n(n+3)-\Sigma\alpha(\alpha+1)-(2d+3k),$$

la classe de cette développable

$$\nu=3m(m-2)-6(h+d)-8k=3(n^2-\Sigma\alpha^2)-(6d+8k),$$

le nombre des plans osculateurs stationnaires

$$\sigma=k+2(\nu-m)=6n(n-1)-2\Sigma\alpha(3\alpha-1)-3(4d+5k),$$

la classe de la développable bitangente

$$y=h+\frac{1}{2}(\rho-m)(\rho+m-9)+d$$

$$=\frac{1}{2}n(n^2-1)(n+6)+\frac{1}{2}\Sigma\alpha^2(\Sigma\alpha+1)-\frac{1}{2}[2d+3k+\Sigma\alpha(\alpha+1)][2n^2+6n-9-2d-3k-\Sigma\alpha^2]$$

$$+\frac{1}{2}\Sigma\alpha(2d+3k+\Sigma\alpha-7)+d,$$

le nombre des plans qui touchent la courbe en trois points

$$t=\frac{1}{3}[(\rho-2)y-\rho(3\nu+m)+6\nu+10(\sigma+m)], \text{ etc. etc.}$$

Réciproquement, ces nombres expriment aussi des propriétés de la courbe plane donnée; c'est-à-dire que dans le système des cubiques passant par les six points **123456**, il y en a σ qui ont un contact du troisième ordre avec la courbe donnée, et t qui touchent cette courbe en trois points distincts; que dans un réseau de ces cubiques, il y en a ν qui ont un contact du second ordre avec la courbe donnée, et y qui la touchent en deux points distincts; et que dans un faisceau de ces mêmes cubiques, il y en a ρ qui sont tangentes à la courbe donnée.

Observons en outre que la courbe plane donnée passe α_r fois par le point fondamental r, coupe en $2n-(\Sigma\alpha-\alpha_r)$ points (différents des points fond.) la conique qui passe par les points fond. excepté r, et coupe en $n-(\alpha_r+\alpha_s)$ points (différents des points fond.) la droite rs; donc la courbe gauche correspondante rencontrera la droite a_r en α_r points, la droite b_r en $2n+\alpha_r-\Sigma\alpha$ points et la droite c_{rs} en $n-(\alpha_r+\alpha_s)$ points.

134. Qu'il nous soit permis de faire mention spéciale du cas dans lequel tous les α sont nuls, c'est-à-dire que la courbe plane ne passe par aucun des points fondamentaux. Alors, *la courbe gauche, qui est de l'ordre* $3n$, *correspond à un certain double-six, dont elle coupe* $2n$ *fois les droites d'un six, et ne rencontre pas les droites de l'autre six; tandis que chacune des autres quinze droites est rencontrée par la courbe gauche en n points. Chaque double-six détermine* donc *deux systèmes conjugués de courbes gauches analogues;* si le système est donné, il y a une (seule) courbe qui passe par $\frac{n(n+3)}{2}$ points donnés arbitrairement; et deux courbes d'un même système ont n^2 points communs.

La courbe gauche d'ordre $3n$, correspondante à la courbe plane d'ordre n qui ne passe par aucun point fond. et la courbe gauche du même ordre, correspondante à une courbe plane d'ordre $5n$ qui passe $2n$ fois par chaque point fond., forment ensemble l'intersection complète de F_3 avec une surface d'ordre $2n$, et appartiennent à deux systèmes conjugués (relatifs au même double-six). Ces deux courbes gauches ont $5n^2$ points communs. Si elles n'ont pas de points doubles (c'est-à-dire, si les courbes planes correspondantes n'en ont pas au dehors des points fond.), ou bien si elles en ont le même nombre, toutes les caractéristiques seront communes aux deux courbes gauches. Ces caractéristiques sont (en supposant qu'il n'y ait pas de points doubles):

ordre $3n$,

genre $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$,

nombre des points doubles apparents $n(4n-3)$,

ordre de la développable osculatrice $n(n+3)$,
classe de cette développable $3n^2$,
nombre des plans osculateurs stationnaires $6n(n-1)$,
classe de la développable bitangente $\frac{1}{2}n(n^2-1)(n+6)$,
nombre des plans tritangents $\frac{1}{6}n(n-1)(n^4+10n^3+7n^2-74n+48)$,
etc.

Chapitre Neuvième.

Surfaces quadriques qui coupent une surface du troisième ordre suivant des coniques.

135. *Deux coniques situées dans une surface donnée F_3 du troisième ordre et dans deux plans passant par deux droites (de la surface), qui,* comme a_1, b_2, *se coupent, ont toujours deux points communs:* puisque la droite commune aux deux plans rencontre chaque conique en deux points, et d'ailleurs cette droite ne rencontre F_3 qu'en deux points, outre le point a_1b_2; ces deux points sont donc communs aux deux coniques. Et réciproquement, si deux coniques (de la surface) ont deux points communs, la droite qui joint ces points, étant l'intersection des plans des coniques, coupera la surface en un troisième point qui sera commun aux deux droites de la surface, situées dans ces plans.

Au contraire, deux coniques (de la surface) situées dans deux plans passant par deux droites qui, comme a_1, a_2, ne se coupent pas, ont un seul point commun, ainsi qu'on a déjà remarqué (118). Et deux coniques situées dans deux plans passant par une même droite a_1, n'ont aucun point commun, car elles coupent a_1 suivant deux couples de points conjugués d'une certaine involution (109).

Par conséquent, une droite de la surface, comme a_1, rencontre en deux points toute conique située dans un plan passant par a_1, et en un seul point toute conique située dans un plan passant par une droite qui ne coupe pas a_1; mais la même droite a_1 ne rencontre pas les coniques dont les plans passent par des droites appuyées sur a_1.

136. Deux coniques (de F_3) situées dans deux plans passant par a_1, b_2, respectivement, ayant deux points communs, forment la base d'un faisceau de surfaces quadriques, dont chacune coupera F_3 suivant une troisième conique située dans un plan passant par la droite c_{12} qui rencontre a_1 et b_2 *). Cette troisième conique peut être choisie arbi-

*) Les plans des trois coniques forment une surface cubique qui coupe F_3 suivant trois coniques et trois droites; les trois coniques étant dans une surface quadrique, les trois droites seront dans un plan (11. *note*).

trairement; car, la base du faisceau contenant quatre points de toute conique située dans un plan passant par c_{12}, un autre point quelconque de celle-ci suffit pour déterminer la quadrique (du faisceau) qui passe par cette conique. *Il y a* donc *une (seule) surface quadrique qui passe par trois coniques situées dans trois plans menés arbitrairement par* a_1, b_2, c_{12} *respectivement.* Réciproquement, si une surface quadrique rencontre F_3 suivant trois coniques, les plans de celles-ci couperont de nouveau F_3 suivant trois droites situées dans un même plan (11. *note*). D'où il résulte que trois couples quelconques de points conjugués des involutions, qui sont marquées sur a_1, b_2, c_{12} resp. par les coniques de la surface (109), appartiennent à une même courbe du second ordre (qui n'est pas située sur F_3).

137. Soient A, B deux plans bitangents de F_3, menés l'un par a_1 et l'autre par b_2; par les deux coniques (A), (B), contenues dans ces plans, on pourra faire passer deux cones quadriques, dont les sommets seront sur la droite réciproque de l'intersection AB, par rapport à une surface quelconque du second ordre passant par (A) et (B). Nous pouvons fixer arbitrairement un plan C passant par c_{12}; et la surface quadrique (ABC) passant par les coniques (A), (B), (C) suffira pour déterminer la droite qui joint les sommets des deux cones.

Si l'on fait tourner le plan B autour de b_2, la quadrique (ABC) engendrera un faisceau (AC), et la droite AB produira, dans le plan A et autour du point a_1b_2, un autre faisceau projectif au précédent. Les droites de ce faisceau sont coupées par la droite AC en des points dont les plans polaires, par rapport aux surfaces correspondantes du faisceau (AC), passent par une même droite (la réciproque de AC par rapport aux quadriques (AC)); et semblablement les plans polaires du point a_1b_2, par rapport aux quadriques (AC), passent par une même droite. Donc les plans polaires des points a_1b_2 et ABC, par rapport à la surface (ABC), si B est variable, engendreront deux faisceaux projectifs, et par suite *le lieu de la droite réciproque de* AB *est un hyperboloïde* J_A, *dont les génératrices de l'autre système sont évidemment les droites réciproques de* AC *par rapport à la quadrique* (ABC), *où le plan* C *soit variable autour de* c_{12}. Les droites AB, AC se coupent au point ABC; leurs réciproques seront par suite dans le plan polaire de ce point par rapport à la surface (ABC). *L'hyperboloïde* J_A *est* donc *l'enveloppe du plan polaire du point* ABC *par rapport à la quadrique* (ABC), *où* A *est fixe,* B *et* C *variables.*

Un point quelconque de l'espace est l'intersection de trois plans A, B, C, qui donnent une quadrique (ABC); et réciproquement, toute surface (ABC) détermine un point de l'espace. *L'hyperboloïde* J_A *est l'enveloppe des plans polaires des points du plan* A *par rapport aux surfaces* (ABC) *qui correspondent à ces points.*

Dès que les droites réciproques de AB, AC sont situées dans le plan polaire du point ABC par rapport à la quadrique (ABC), le point commun à ces réciproques est le pole du plan A par rapport à la même surface; *l'hyperboloïde* J_A *est* donc *le lieu des poles du plan fixe* A *par rapport aux quadriques* (ABC).

Les surfaces (ABC) passent par la conique fixe (A), donc les plans polaires du point a_1b_2 se coupent suivant la droite polaire de ce point par rapport à la conique (A). D'où il résulte que l'hyperboloïde J_A rencontre le plan A suivant la droite polaire du point a_1b_2 par rapport à la conique (A), et analoguement suivant la droite polaire du point a_1c_{12} par rapport à la même conique.

138. Désignons par o le point b_2c_{12}; une droite quelconque ol est l'intersection de deux plans B, C. Soient l, m, n les points conjugués harmoniques de o par rapport aux couples de points d'intersection des coniques (B), (C) avec les droites ol, b_2, c_{12}; les droites lm, ln seront alors les polaires du point o par rapport à ces coniques, et par suite lmn sera le plan polaire de o par rapport aux quadriques du faisceau (BC). En outre, si l'on mène par o dans le plan B une droite quelconque, qui coupera la conique (B) et par suite la surface F_3 en deux points, le point conjugué harmonique de o, par rapport à ces intersections, tombera sur lm; donc lm et de même ln appartiennent à la quadrique O, première polaire de o par rapport à F_3; en d'autres termes, le plan lmn est tangent en l à cette quadrique polaire. D'où il résulte que *les plans polaires du point o par rapport à toutes les quadriques* (ABC), *quels que soient* A, B, C, *enveloppent la quadrique polaire de o.*

On se souvient que l'hyperboloïde J_A est l'enveloppe du plan polaire du point ABC par rapport aux quadriques (ABC), A étant fixe; or, si le plan A vient coïncider avec le plan tritangent $a_1b_2c_{12}$ (dans lequel cas, la quadrique (ABC) se réduit aux deux plans B, C), tous les points ABC tombent sur o; donc, *l'hyperboloïde* J_A, *correspondant au plan* $A \equiv a_1b_2c_{12}$, *n'est autre que la quadrique* O *polaire de o.*

139. Si le plan lmn est mobile autour d'un point fixe i de l'espace, son enveloppe sera un cone circonscrit à la quadrique O; le point l décrira la conique de contact, et par suite le lieu de la droite ol sera un cone quadrique, qui passera toujours par les droites b_2, c_{12}; car, ces droites étant situées sur O, les plans ib_2, ic_{12} touchent cette surface, quel que soit i, en des points appartenant aux mêmes droites b_2, c_{12}.

Soit p le point ABC où la droite ol rencontre un plan fixe A (passant par a_1). Si ol tourne autour de o, le plan polaire de p par rapport à la quadrique (ABC) enveloppe l'hyperboloïde J_A. Or, comme les plans tangents de O correspondent projectivement [33] aux droites par o (au plan qui touche O en l correspond la droite ol et inversement), de même aux plans tangents de J_A correspondront projectivement les droites par o, de la manière suivante. Un plan tangent de J_A coupe A suivant une droite, dont le pole p par rapport à la conique (A) détermine la droite correspondante olp. Réciproquement, une droite par o rencontre A en un point p; et par la droite polaire de p, par rapport à la conique (A), il passera (outre A) un plan tangent de J_A, qui est le plan correspondant à la droite menée par o.

Les plans tangents de J_A qui passent par le point i enveloppent un cone qui coupera A suivant une conique; la polaire réciproque de cette conique, par rapport à la conique (A), est vue du point o suivant un cone qui passe par les droites b_2, c_{12}, quel que soit i; à cause des deux plans menés par i et par les droites polaires des points $a_1 b_2, a_1 c_{12}$ par rapport à la conique (A) (137). Ce cone et l'autre cone, formé par les droites ol correspondantes aux plans tangents de O qui passent par i, se couperont suivant deux droites (outre b_2 et c_{12}); c'est-à-dire que *par un point quelconque i passent deux couples de plans correspondants tangents à* O *et* J_A: où l'on dit *correspondants* deux plans qui correspondent à une même droite ol.

Soit g la droite suivant laquelle se coupent deux plans tangents correspondants de O, J_A, savoir les plans polaires des points o et ABC, par rapport à une même surface (ABC); ou mieux, soit g la réciproque de la droite BC par rapport à la surface (ABC), où le plan A est donné arbitrairement. Il résulte de ce qui précède, que *les droites g correspondantes à toutes les couples possibles de plans* B, C (g est indépendante de A) *forment un tel système que par un point arbitraire i de l'espace passent deux droites g.*

140. Proposons-nous maintenant de trouver les points de l'espace pour lesquels les deux droites g coïncident.

Si la droite ol est tangente en l à la surface cubique F_3 et par suite à toute surface quadrique du faisceau (BC), le plan polaire de p par rapport à cette quadrique passera par l; donc, parmi les plans tangents de J_A menés par l, il y en a un, dont la droite correspondante est olp. Plaçons le point i en l. Les plans tangents menés du point o à la surface O passent par les deux génératrices lm, ln et ont leurs points de contact sur celles-ci; les droites correspondantes issues de o forment donc deux plans, olm et oln (savoir B et C). Or, au cone de sommet l, circonscrit à J_A, correspond un cone de sommet o qui passe par ol, ainsi qu'on vient de le voir; donc les deux droites qui, pour un point quelconque i, résultent de l'intersection des deux cones de sommet o (139) se réduisent, dans ce cas, à la droite unique ol; c'est-à-dire que *les points communs à* F_3 *et à* O *sont tels que par chacun d'eux passe une seule droite g.*

141. Le point i soit, en second lieu, le sommet d'un cone quadrique passant par les coniques (B), (C). Comme le choix du plan A pour la détermination de la droite g est arbitraire, on peut supposer que ce plan passe par i. Alors, i étant sur la droite réciproque de BC (ou olp) par rapport à toute quadrique du faisceau (BC), le plan polaire de o relatif à la quadrique (ABC) passera par i; de plus, le même plan polaire

est tangent en l à la surface O; donc, il passe par i un plan tangent de O dont le point de contact est l, et par suite la droite correspondante est olp.

Analoguement, i est situé dans les plans polaires de tous les points de ol par rapport à la quadrique (ABC); c'est pourquoi les points i, p sont conjugués relativement à la conique (A).

Quant à l'hyperboloïde J_A, ses plans tangents menés par i coupent A suivant des droites croisées en i, dont les poles par rapport à la conique (A) se trouvent sur la polaire de i, qui est une droite passant par p. D'où il suit qu'au cone de sommet i circonscrit à O correspond un cone K de sommet o, passant par ol; et au cone de sommet i circonscrit à l'hyperboloïde J_A correspond (outre le plan $a_1 b_2 c_{12}$) un plan E passant par op et par la droite polaire de i, par rapport à la conique (A). Or, on peut démontrer que ce plan E est tangent au cone K suivant op.

En effet, le plan qui passe par i et touche O en l contient un groupe harmonique de quatre droites, savoir les droites lm, ln, génératrices de la surface, la droite li génératrice du cone circonscrit (de sommet i), et la droite lj tangente en l à la conique de contact (où j soit la trace de cette droite sur le plan A). En projetant du point o sur le plan A ces quatre droites harmoniques, on a les droites $p(u, v, i, j)$ *) qui formeront de même un groupe harmonique. Mais d'un autre côté, la couple de plans BC, le cone (BC) et la quadrique (ABC) appartiennent à un même faisceau; donc, la conique (A) doit passer par les quatre points où les droites intersections du cone avec A rencontrent les droites AB et AC (savoir pu et pv); c'est pourquoi la droite polaire de i par rapport à la conique (A) est la conjuguée harmonique de pi, par rapport aux droites pu, pv: en d'autres termes, la droite pj est la polaire de i par rapport à la conique (A).

Donc, le plan E est tangent au cone K suivant op; et par conséquent *le point i est tel qu'il est situé sur une seule droite g.*

142. La droite g, réciproque de la droite BC par rapport à toute surface du faisceau (BC), est située (137) sur les hyperboloïdes J_B et J_C. Inversement, J_B est le lieu de la droite réciproque de BC (où B est fixe et C variable) par rapport aux surfaces du faisceau (BC), et aussi le lieu de la droite réciproque de BA (où B est fixe et A variable) par rapport aux surfaces (BA). Et de même pour J_C. Or, on a démontré qu'il passe par tout point de l'espace deux droites g, réciproques de BC, et analoguement deux droites réciproques de CA, et deux droites réciproques de AB; donc, *par tout point de l'espace on peut faire passer deux hyperboloïdes* J_A, *deux hyperboloïdes* J_B *et deux hyperboloïdes* J_C. Et de ce qui précède il résulte que, si i est le sommet d'un cone quadri-

*) u, v désignent les points $a_1 b_2$, $a_1 c_{12}$.

que coupant F_3 en trois coniques (A), (B), (C), par i il passe une seule droite réciproque de BC, et de même une seule droite réciproque de CA et une seule droite réciproque de AB; donc par i il passe un seul hyperboloïde J_A, un seul hyperboloïde J_B et un seul hyperboloïde J_C. C'est-à-dire que *le lieu des sommets des cones quadriques qui coupent la surface cubique* F_3 *suivant trois coniques* (A), (B), (C) *coïncide avec l'enveloppe des hyperboloïdes de chacune des trois séries* J_A, J_B, J_C. *Ce lieu passe par les trois courbes gauches (du quatrième ordre) suivant lesquelles* F_3 *est coupée par les quadriques polaires des points* o, u, v (140).

Vu que ce lieu a la propriété que par chacun de ses points il passe une seule surface enveloppée de chaque série, il s'ensuit que l'enveloppe et l'enveloppée se touchent partout où elles se rencontrent. La courbe de contact est l'intersection de deux enveloppées successives, et est par suite du quatrième ordre; donc *l'enveloppe est une surface du quatrième ordre; les courbes de contact de deux enveloppées de la même série sont situées sur une même surface du second ordre;* etc. *).

143. Considérons maintenant le faisceau des surfaces quadriques S qui passent par la courbe gauche du quatrième ordre, intersection de F_3 avec O, première polaire de o. Deux surfaces S couperont de nouveau la surface cubique suivant deux coniques; la droite commune aux plans de ces coniques, ayant quatre points communs avec F_3 (les quatre points où cette droite rencontre les deux coniques), sera située tout entière dans cette surface. Or, une des surfaces S est la quadrique O, pour laquelle la conique résultante est la couple de droites b_2, c_{12}; et la droite où le plan de celles-ci coupe de nouveau F_3 est a_1; donc, les surfaces S coupent F_3 suivant des coniques dont les plans passent par la droite a_1. Et réciproquement, tout plan A, mené par a_1, rencontrera F_3 suivant une conique située dans une surface S_A du faisceau qu'on considère. Les plans A et les quadriques S_A forment évidemment deux faisceaux projectifs, propres à engendrer la surface donnée F_3 (111).

Les plans polaires du point o par rapport aux quadriques S font un faisceau projectif à celui de ces quadriques; le lieu des coniques de contact des quadriques S avec les cones circonscrits de sommet o sera donc (112) une surface $\mathcal{J}$ du troisième ordre, passant par la base du faisceau (S) et par les droites b_2, c_{12} (qui forment l'intersection de O par le plan polaire correspondant). En outre, la courbe-base du faisceau (S) sera l'intersection de $\mathcal{J}$ avec la première polaire de o par rapport à $\mathcal{J}$, savoir avec la quadrique S ($\equiv$O) qui passe par o **); donc les surfaces cubiques $\mathcal{J}$, F_3 se touchent suivant une courbe gauche du quatrième ordre et se coupent en deux

*) [*Teoria geom. delle superficie,* 47].

**) {V. 112, *note*}.

droites; c'est pourquoi elles se confondront en une seule et même surface. C'est-à-dire que *toute quadrique* S_A *coupe* F_3 *suivant une conique dont le plan* A *est le plan polaire du point* o *par rapport à* S_A: en d'autres termes, la surface cubique F_3 est le lieu des courbes de contact entre les quadriques S et les cones circonscrits de sommet o. Il résulte d'ici que les sommets des quatre cones du faisceau S sont situés en F_3, et que les plans tangents à cette surface en ces quatre points sont des plans tritangents passant par a_1.

144. Si A et B sont deux plans donnés (passant par a_1 et b_2 respectivement), les quadriques (AB) forment un faisceau auquel appartient la couple des plans A, B. Le lieu des courbes de contact entre ces quadriques et les cones circonscrits de sommet o est, d'après un théorème général (112), une surface cubique; mais, pour la quadrique composée des plans A, B, on peut regarder la courbe de contact comme épanchée sur le plan B; ce plan appartient donc tout entier à la surface cubique. C'est-à-dire que celle-ci se réduira au plan B et à une surface quadrique Σ, contenant la conique (A) et les coniques d'intersection des surfaces (AB) avec les plans polaires de o.

D'ailleurs, la base du faisceau (AB) doit être la courbe d'intersection de la surface cubique BΣ avec la première polaire de o par rapport à cette surface, donc A est le plan polaire de o par rapport à Σ. Il en résulte, de plus, que Σ passe par les sommets des deux cones du faisceau (AB) et y est touchée par deux plans, qui font partie du faisceau des plans polaires de o, et (par suite) se coupent suivant une droite située dans le plan B.

D'après cela, les surfaces Σ et S_A passent ensemble par la conique (A), et ont A pour plan polaire du point o. Or, si du point o on mène les tangentes à la conique (B), les points de contact seront situés en Σ, car ils doivent appartenir à une quadrique quelconque du faisceau (AB) et au plan polaire de o, correspondant. Mais ces mêmes points appartiennent aussi à la courbe de contact de F_3 avec le cone circonscrit de sommet o, et par suite à S_A; donc les quadriques Σ et S_A ne font qu'une seule et même surface. C'est-à-dire que S_A *est le lieu des courbes de contact de toutes les quadriques* (ABC) (*où* A *est fixe*) *avec les cones circonscrits de sommet* o*;* et par conséquent S_A contient les sommets de tous les cones du système (ABC), où A soit fixe.

Si le plan A est donné, les sommets des cones (ABC) sont donc situés dans chacune des surfaces S_A et J_A (137); ainsi *le lieu de ces sommets est la courbe gauche du quatrième ordre, intersection de ces deux quadriques.* Et si l'on fait varier A, *le lieu de cette courbe gauche, commune aux deux surfaces correspondantes* S_A *et* J_A, *sera la surface du quatrième ordre* (*lieu complet des sommets de tous les cones* (ABC)), que nous avons déjà trouvée comme enveloppe des hyperboloïdes J. Naturellement, la même surface du quatrième ordre est aussi le lieu de la courbe gauche du quatrième ordre commune à deux surfaces correspondantes S_B et J_B, ou S_C et J_C; S_B et S_C ayant par rapport aux points v, u et aux plans B, C la même signification que S_A par rapport au point o et au plan A *).

145. Considérons de nouveau les trois droites a_1, b_2, c_{12} situées dans un même plan tritangent. Soient $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ deux plans passant par a_1, b_2 respectivement et coupant la surface F_3 suivant deux coniques tangentes à a_1, b_2 aux points α, β. Les quadriques du faisceau $(\mathscr{A}\mathscr{B})$ rencontrent le plan a_1b_2 suivant des coniques ayant un double contact aux points α, β; et réciproquement, toute conique touchée en α, β par les droites a_1, b_2 sera la trace d'une surface du faisceau. Or, parmi ces coniques il y a la conique infiniment aplatie $(\alpha\beta)^2$ formée par la corde de contact estimée deux fois; dans le faisceau $(\mathscr{A}\mathscr{B})$ il y a donc un cone tangent au plan a_1b_2 suivant la droite $\alpha\beta$. Cette droite rencontre c_{12} en un point γ; en ce point, c_{12} sera tangente à ce cone et, par suite, aussi à une conique située simultanément en F_3, dans le cone et dans un plan C (par c_{12}). Donc, *les six points où les droites* a_1, b_2, c_{12} *touchent la courbe parabolique de* F_3 (109) *sont distribués, trois à trois, sur quatre droites qui sont les génératrices de contact du plan* $a_1b_2c_{12}$ *avec quatre cones quadriques lesquels contiennent, trois à trois, les six coniques* $(\mathscr{A})$, $(\mathscr{B})$, $(\mathscr{C})$ *tangentes aux droites* a_1, b_2, c_{12}, *aux points susdits.* Les deux points analogues à α sont les éléments doubles d'une involution, dans laquelle les points a_1b_2, a_1c_{12} sont conjugués (109); donc les droites a_1, b_2, c_{12} sont les diagonales du quadrilatère formé par les quatre droites $\alpha\beta\gamma$.

Il y a un second cone qui passe par les coniques $(\mathscr{A})$, $(\mathscr{B})$, outre celui qui touche le plan a_1b_2 suivant $\alpha\beta\gamma$. Les plans tangents communs aux deux coniques enveloppent ces deux cones; le sommet du nouveau cone [34] sera donc le point commun aux trois plans suivants: le plan a_1b_2, le plan des droites tangentes qu'on peut mener du point a_1b_2 aux deux coniques (outre a_1, b_2), et le plan des droites polaires de ce même point par rapport aux deux coniques.

Représentons les quatre cones tangents au plan a_1b_2 et les six coniques suivant lesquelles ils coupent la surface F_3, par la notation suivante:

$$\mathscr{K} \equiv (\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C}),\quad \mathscr{K}' \equiv (\mathscr{A}\mathscr{B}'\mathscr{C}'),\quad \mathscr{K}'' \equiv (\mathscr{A}'\mathscr{B}\mathscr{C}'),\quad \mathscr{K}''' \equiv (\mathscr{A}'\mathscr{B}'\mathscr{C}).$$

Les cones $\mathscr{K}$, $\mathscr{K}'$ se coupent suivant la conique $(\mathscr{A})$ et, par suite, suivant une autre conique (non située en F_3); ils auront donc deux plans tangents communs, dont l'un est $a_1b_2c_{12}$; l'autre soit π. Ce plan π est tangent aux cinq coniques $(\mathscr{A})$, $(\mathscr{B})$, $(\mathscr{C})$, $(\mathscr{B}')$, $(\mathscr{C}')$, situées en $\mathscr{K}$, $\mathscr{K}'$; donc, il sera tangent aussi aux cones $\mathscr{K}''$ et $\mathscr{K}'''$ [35]. Ces quatre cones $\mathscr{K}$, $\mathscr{K}'$ $\mathscr{K}''$ $\mathscr{K}'''$ ont, par conséquent, deux plans tangents communs,

*) Chacun des 45 plans tritangents donne lieu à une surface analogue du 4.e ordre.

$a_1 b_2 c_{12}$ et π; d'où il résulte que *leurs sommets sont alignés sur une seule et même droite* (l'intersection des plans $a_1 b_2 c_{12}$ et π).

146. Passons à considérer les coniques (A), (B), (C) qui se décomposent en lignes droites.

Parmi les plans A il y en a quatre (outre $a_1 b_2 c_{12}$) qui coupent F_3 suivant des couples de droites; et de même pour les plans B et C. Si nous considérons le plan A qui contient les droites $b_3\, c_{13}$ et le plan B qui contient $a_3\, c_{32}$, les coniques $(b_3 c_{13})$, $(a_3 c_{32})$ doivent se couper en deux points (135) sur la droite AB; donc b_3 rencontre c_{32}, et c_{13} rencontre a_3. Les plans $b_3 c_{32}$, $a_3 c_{13}$ couperont F_3 suivant deux droites nouvelles, a_2 et b_1. Or, des neuf droites $(a_1 b_2 c_{12})$ $(a_2 b_3 c_{23})$ $(a_3 b_1 c_{13})$ qui résultent de l'intersection de F_3 par trois plans, il y en a trois $a_1 b_3 c_{13}$ dans le plan A, et trois autres $a_3 b_2 c_{32}$ dans le plan B; donc, les trois droites restantes $a_2 b_1 c_{12}$ seront dans un même plan C.

Il résulte d'ici que les 24 droites, situées dans les 12 plans tritangents qui passent par a_1, b_2, c_{12} (outre $a_1 b_2 c_{12}$), sont aussi distribuées en 16 couples d'autres plans tritangents: chacune de ces couples étant déterminée par deux plans (tritangents) A et B choisis arbitrairement. Au moyen de ces deux plans, est déterminé aussi un plan correspondant C.

Si nous concevons trois plans A, B, C coupant F_3 suivant six droites (outre a_1, b_2, c_{12}) qui ne soient pas placées dans une couple de plans, ces six droites appartiendront (136) à un hyperboloïde (ABC) du système considéré ci-dessus. Chacun des quatre plans A peut être combiné avec chacun des quatre plans B et avec chacun des quatre plans C; mais il faut excepter les 16 combinaisons qui donnent six droites placées sur deux plans; *le système des quadriques* (ABC) *contient* donc $4.4.4-16=48$ *hyperboloïdes* H, *chacun desquels rencontre la surface cubique* F_3 *suivant six droites.*

Des six droites communes à F_3 et à un hyperboloïde H, trois appartiennent à un même système de génératrices de celui-ci, et les trois restantes à l'autre système *); on peut donc, de six manières différentes, distribuer ces droites en trois couples telles que les droites de chaque couple soient dans un plan. Chaque manière donne trois plans contenant les six droites et coupant F_3 suivant trois droites nouvelles, qui seront dans un même plan, car les six premières droites appartiennent à une surface du second ordre. *Tout hyperboloïde* H *fait* donc *partie de six systèmes de quadriques, analogues à celui des surfaces* (ABC) fourni par le plan $a_1 b_2 c_{12}$. Le nombre de ces systèmes est 45, chaque système correspondant à un plan tritangent; donc *le nombre total des hyperboloïdes qui rencontrent* F_3 *suivant six droites est* $\frac{48.45}{6}=360$.

---

*) Une surface cubique ne peut jamais contenir quatre droites d'un hyperboloïde, d'un même système de génération; car toute génératrice de l'autre système aurait quatre points communs avec la surface cubique, et dès lors serait située entièrement sur celle-ci.

147. Un hyperboloïde H est déterminé par trois droites (de F_3) qui ne se rencontrent pas. Or, trois droites (de F_3) qui ne se rencontrent pas sont coupées par trois autres droites qui de même ne s'entrecoupent pas (116); ces six droites formeront donc l'intersection de H et F_3. C'est-à-dire que *tout hyperboloïde coupant* F_3 *suivant trois droites qui ne se rencontrent pas, coupe la même surface suivant trois autres droites.*

Il y a donc 2.360 *groupes de trois droites* (de F_3) *qui n'ont aucun point d'intersection; ces groupes sont conjugués deux à deux* [36]; *les droites d'un groupe rencontrent les droites d'un groupe conjugué; et les six droites de deux groupes conjugués appartiennent à un seul et même hyperboloïde.*

Chapitre Dixième.

Propriétés diverses.

148. Soient T, T′ deux plans tritangents (de la surface cubique F_3) qui se rencontrent suivant une droite non placée sur F_3; et soient $a_1 b_2 c_{12}$, $a_2 b_3 c_{23}$ les droites de la surface comprises dans ces plans. Dès que la droite TT′ coupe F_3 en trois points seulement, ces points seront communs aux couples de droites $a_1\, b_3$, $b_2\, c_{23}$, $a_2\, c_{12}$. Les plans $a_1 b_3$, $b_2 c_{23}$, $a_2 c_{12}$ rencontreront F_3 suivant trois nouvelles droites c_{13}, a_3, b_1 respectivement, qui seront dans un même plan, car de ces neuf droites résultantes de l'intersection de F_3 avec trois plans, il y en a six placées sur deux autres plans T, T′.

Ainsi *les triangles* $a_1 b_2 c_{12}$, $a_2 b_3 c_{23}$ *en déterminent quatre autres, et les côtés de ces six triangles sont les intersections mutuelles de deux groupes de trois plans, c'est-à-dire, des faces de deux trièdres*, que nous dirons *conjugués.*

Deux plans tritangents quelconques, dont la droite d'intersection ne soit pas située sur F_3, peuvent servir de faces à un trièdre; la troisième face en résulte déterminée. Ces trois plans contiennent neuf droites qui se coupent en neuf points communs à F_3 et aux arêtes du trièdre. Ces mêmes neuf droites sont distribuées dans trois autres plans, qui forment le trièdre conjugué.

On a déjà vu (146) qu'en considérant les trois droites $a_1\, b_2\, c_{12}$ situées dans un plan T, les autres 24 droites de F_3 sont distribuées en 16 couples de plans. Chaque couple forme avec T un trièdre, c'est-à-dire que chaque plan T entre en 16 trièdres. Et, vu que chaque trièdre contient trois plans tritangents, *le nombre total des trièdres sera* $\frac{45.16}{3} = 240$. Ces trièdres sont conjugués deux à deux; *il y a* donc 120 *couples de trièdres conjugués.*

149. Les neuf droites

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_{23} \\ a_2 & b_2 & c_{31} \\ a_3 & b_3 & c_{12} \end{vmatrix}$$

sont placées, ainsi qu'on vient de le démontrer, sur six plans tritangents qui forment deux trièdres conjugués. Par chacune de ces droites on peut faire passer trois autres plans tritangents; il y a donc 27 plans, chacun desquels contient une des neuf droites et dès lors deux autres droites; c'est-à-dire que les autres 18 droites sont distribuées, deux à deux, dans ces 27 plans, de sorte que ces plans passeront $\frac{2.27}{18}=3$ fois par chacune des 18 droites. Il reste encore $45-6-27=12$ plans, qui contiendront exclusivement ces 18 droites, chacune deux fois.

Or, chacune des trois droites a_1, b_2, c_{12}, situées dans un même plan, doit rencontrer (au dehors des droites de la matrice ci-dessus) six droites non coupées par les deux autres; donc, les 18 droites sont rencontrées par l'une ou par l'autre des droites a_1, b_2, c_{12}. Et d'ailleurs, trois droites, ainsi que a_1, b_1, c_{23}, qui ne se coupent pas, sont rencontrées par les trois mêmes droites; et pareillement a_1, a_2, a_3, etc. Donc, on peut distribuer les 18 droites en deux matrices nouvelles

$$\begin{vmatrix} b_4 & a_4 & c_{56} \\ b_5 & a_5 & c_{64} \\ b_6 & a_6 & c_{45} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_{14} & c_{24} & c_{34} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} \end{vmatrix},$$

tellement que les droites d'une ligne verticale de la première matrice rencontrent les droites de la ligne verticale correspondante de la seconde matrice, et les droites d'une ligne horizontale de la première matrice rencontrent les droites de la ligne verticale correspondante de la troisième matrice. Alors il est aisé de constater: 1.° que les droites d'une ligne horizontale de la deuxième matrice rencontrent les droites de la ligne horizontale correspondante de la troisième matrice; 2.° que les neuf droites de chacune des deux dernières matrices sont les intersections des faces de deux trièdres conjugués.

Donc, *chaque couple de trièdres conjugués détermine deux autres couples, de manière que les trois couples contiennent* (deux fois) *toutes les* 27 *droites.* Naturellement, le nombre de ces groupes de trois couples de trièdres conjugués est $\frac{120}{3}=40$.

150. Les 240 trièdres ont $3.240=720$ arêtes k, et 240 sommets t. Chaque arête k rencontre la surface F_3 en trois points δ, intersections de couples de droites de la surface. On peut donc dire que *les* 135 *points* δ, *sommets des* 45 *triangles formés par les* 27 *droites sur les plans tritangents, sont distribués, trois à trois, sur* 720 *droites* k *qui se coupent, trois à trois, en* 240 *points* t. Les mêmes 135 points sont allignés, dix à dix, sur les 27 droites de F_3.

Considérons le point δ commun aux droites a_1, b_2. Par chacune de ces droites passent, outre le plan a_1b_2, quatre autres plans tritangents et dès lors 16 droites k. *Tout point* δ *est donc situé sur* 16 *droites* k.

Le plan $a_1 b_3 c_{13}$ coupe les quatre plans tritangents qui passent par b_2 (excepté $a_1 b_2$), suivant quatre droites k, qui rencontreront b_3 et c_{13} en huit points δ', δ''; dans chacune de ces quatre droites k concevons pris le point λ, conjugué harmonique de δ relativement à $\delta'\delta''$. Les quatre points λ appartiendront à la droite polaire du point δ par rapport à la conique composée des droites $b_3\, c_{13}$; et ils appartiendront aussi à la quadrique polaire de δ (par rapport à F_3). *Les* 16 *points* λ, *correspondants aux* 16 *droites* k *issues de* δ, *sont donc distribués, quatre à quatre, sur quatre droites situées dans quatre plans passant par* a_1, *et dès lors aussi sur quatre autres droites situées dans quatre plans passant par* b_2; *et toutes ces huit droites sont des génératrices d'un seul et même hyperboloïde, qui est la quadrique polaire du point* δ. Cette quadrique passe évidemment par les droites a_1 et b_2.

151. Soit t le sommet d'un trièdre formé par trois plans tritangents (150). La quadrique polaire de t (par rapport à F_3) coupera ces plans suivant les coniques polaires de t, relatives aux triangles formés par les droites (de F_3) contenues dans ces mêmes plans, c'est-à-dire, suivant des coniques circonscrites à ces triangles, respectivement. Or, ces triangles résultent de l'intersection des trois plans considérés avec les faces du trièdre conjugué (148); donc les arêtes de ce trièdre rencontreront, chacune en trois points, la quadrique polaire de t: en d'autres termes, *la quadrique polaire de t est un cone circonscrit au trièdre conjugué.* Ainsi, *les sommets de deux trièdres conjugués sont deux points correspondants de la Hessienne* (72).

152. On a démontré ailleurs que toute droite située sur F_3, comme a_1, est une tangente double de la Hessienne (60), et que les points de contact, α, α', sont les points doubles de l'involution marquée sur a_1 par les coniques, suivant lesquelles F_3 est coupée par les plans bitangents passant par a_1. Dès que la droite a_1 est placée sur F_3, la quadrique polaire de tout point de cette droite passe par la même droite; donc les sommets des cones polaires de α, α' sont situés sur a_1. Or, ces sommets sont aussi des points de la Hessienne: donc α' est le sommet du cone polaire de α, et inversement; c'est-à-dire que *les points* α, α' *sont deux points correspondants de la Hessienne.*

153. Un plan E, donné arbitrairement, coupe la surface fondamentale F_3 suivant une courbe C_3 du troisième ordre. Le plan M qui est tangent à F_3 en un point m de C_3, et le plan polaire de m par rapport à la Hessienne se rencontrent suivant une droite, qui perce F_3 aux points $x\,y\,z$ d'inflexion de la section de cette surface par le plan M (89). Quel est le lieu des droites mx, my, mz, si m se déplace sur C_3? Premièrement, la courbe C_3 est triple pour ce lieu, car tout point m de ce lieu est commun à trois génératrices mx, my, mz. Secondement, cherchons combien de génératrices tombent dans le plan E. Les plans polaires des points m, par rapport à la Hessienne, rencontrent E suivant des droites, l'enveloppe desquelles est de la 9.^e classe (14); les

tangentes de cette enveloppe correspondent, une à une, aux tangentes de C_3 (car les unes et les autres correspondent aux points de cette courbe); et l'ordre du lieu du point commun à deux tangentes correspondantes, d'après un théorème connu *), est égal à la somme des classes des deux enveloppes, savoir $9+6=15$. Pour ce lieu, les 12 points communs à C_3 et à la Hessienne sont doubles, car en chacun de ces points se rencontrent deux tangentes (successives) de C_3 et les tangentes correspondantes de l'enveloppe de la 9.^{e} classe. Le lieu du 15.^{e} ordre coupera donc C_3 en $3.15-2.12=21$ autres points, chacun desquels est évidemment un point analogue aux points xyz. Il s'ensuit que le plan E contient 21 droites analogues aux mx, my, mz; et dès lors *le lieu de ces droites sera une surface de l'ordre* $3.3+21=30$.

Ce lieu rencontre une droite quelconque G en 30 points; d'où il résulte que, *si le point m parcourt la surface* F_3, *à condition qu'une des droites mx, my, mz coupe la droite donnée* G, *le lieu de m est une courbe gauche du* 30.^{e} *ordre.*

Cette courbe gauche, quelle que soit G, *passe par les* 135 *points* δ *où se coupent, deux à deux, les* 27 *droites de la surface fondamentale.* En effet, si nous considérons le plan tritangent qui contient les droites a_1, b_2, c_{12}, le plan polaire du point a_1b_2 par rapport à la Hessienne passe par c_{12} **), et toute droite menée par ce point à couper c_{12} est une droite analogue à mx. Or, le plan $a_1b_2c_{12}$ rencontre une droite quelconque G, donc la courbe gauche du 30.^{e} ordre, relative à cette droite, passe par le point a_1b_2. Conséquemment la courbe gauche, dont il s'agit, coupe en dix points chacune des 27 droites de F_3.

Il résulte de là que, si l'on représente la surface cubique sur un plan, de la manière qui a été exposée ailleurs (119), la courbe plane qui représentera la courbe gauche d'ordre 30, relative à G, sera de ce même ordre 30, et passera dix fois par chacun des points fondamentaux, en y touchant les lignes correspondantes aux droites b et c de F_3. Donc (121, 133) [37] *la courbe gauche est l'intersection complète de* F_3 *par une surface du* 10.^{e} *ordre.*

Il y a donc *un nombre infini de surfaces du* 10.^{e} *ordre, qui passent par les* 135 *points* δ. *Le système complet de ces points est donné par l'intersection de l'une quelconque de ces surfaces avec les* 27 *droites de* F_3.

154. Nous allons maintenant exposer une propriété de la section de la Hessienne par un plan quelconque E.

---

*) [*Teoria geom. delle curve piane,* 83].

**) Cela résulte du théorème général (89), et aussi de l'observation suivante. Les quatre intersections de la Hessienne avec la droite a_1 sont réunies en deux points α, α' de contact, et par conséquent le centre harmonique de ces quatre intersections, par rapport au pole a_1b_2, coïncide avec le point a_1c_{12} conjugué harmonique de a_1b_2 par rapport aux points α, α'. De même pour la droite b_2, donc etc.

Ce plan coupe la surface fondamentale F_3 suivant une cubique C_3; soit o un des poles de E, par rapport à F_3, non situés sur E. Dès que le cone oC_3 coupe F_3 suivant la courbe plane C_3, il rencontrera cette même surface suivant une courbe gauche du sixième ordre, placée sur une surface quadrique Φ_2 (11 *note*). La surface F_3 appartenant au faisceau déterminé par le cone oC_3 et par le lieu composé $E\Phi_2$, la quadrique polaire d'un point quelconque i, relative à F_3, passera par l'intersection du cone polaire oC_2, relatif au cone oC_3, avec la quadrique polaire relative à $E\Phi_2$. Si i est pris dans le plan E, la quadrique polaire de i, relativement à $E\Phi_2$, sera le système de deux plans, dont l'un est E, et l'autre Φ_1 est le plan polaire de i par rapport à Φ_2. Donc la quadrique polaire de i, par rapport à F_3, passera par les deux coniques d'intersection du cone oC_2 avec les plans E et Φ_1. La première de ces coniques est évidemment C_2, première polaire de i par rapport à C_3; et l'autre conique sera une couple de droites, parce que le plan Φ_1 passe par o *). Or, si le plan Φ_1 était tangent au cone oC_2, la quadrique polaire de i relativement à F_3 serait un cone, et dès lors i appartiendrait à la Hessienne. Donc, *la courbe d'intersection de la Hessienne avec le plan* E *est le lieu d'un point dont le plan polaire relatif à la quadrique* Φ_2 *est tangent à la conique polaire relative à la cubique* C_3.

On démontre de la manière suivante que ce lieu est du quatrième ordre. Les coniques polaires des points d'une droite G (en E) par rapport à C_3, et les droites polaires des mêmes points par rapport à la conique $(E\Phi_2)$ forment deux faisceaux projectifs, qui engendrent une cubique passant par le pole de G, relatif à la conique $(E\Phi_2)$. Par ce pole on peut mener quatre tangentes à la cubique, donc il y a quatre droites du deuxième faisceau qui sont tangentes aux coniques correspondantes de l'autre faisceau; c'est pourquoi G contiendra quatre points du lieu. . . . .
. . . .
. . . .
. . . .

CHAPITRE ONZIÈME.

Classification des surfaces du troisième ordre, eu égard à la réalité des vingt-sept droites.

155. On a démontré que par les 27 droites d'une surface (générale) F_3 du troisième ordre on peut faire passer 120 couples de trièdres conjugués (148), et que récipro-

*) Le plan polaire de o par rapport au cone oC_3 étant indéterminé, o a le même plan polaire E par rapport à F_3 et au lieu composé $E\Phi_2$. Le plan E est donc le polaire de o par rapport à Φ_2, et dès lors le plan polaire d'un point quelconque de E, par rapport à cette même quadrique, passera par o.

quement, si deux trièdres conjugués et un point de la surface sont donnés, la surface peut être construite (110). D'où il résulte qu'abstraction faite de la réalité des éléments donnés ou cherchés, il est possible d'obtenir une surface cubique quelconque, à l'aide de deux trièdres, par le procédé exposé ailleurs (110). Nous nous proposons maintenant d'avoir égard à la réalité ou non-réalité des 27 droites d'une surface cubique réelle. Cherchant à former les deux trièdres propres a engendrer cette surface, nous serons naturellement conduits à la classification des surfaces cubiques (générales) réelles (d'après la méthode de M. SCHLÄFLI *)).

Pour construire deux trièdres conjugués qui forment un ensemble réel, il suffit de trouver (148) deux plans tritangents T, T', réels **) ou imaginaires conjugués, qui se coupent suivant une droite (nécessairement réelle) non située sur la surface. Les trois droites de la surface contenues en T et les trois droites contenues en T' se coupent, deux à deux, aux trois points où la droite TT' perce la surface, et déterminent de cette manière trois plans $\mathcal{T}\,\mathcal{T}'\,\mathcal{T}''$, qui seront tous réels, ou bien l'un réel et les deux autres imaginaires conjugués, ainsi que les trois points susdits. Chacun de ces plans $\mathcal{T}$ coupe la surface suivant une autre droite, et ces trois droites nouvelles sont placées dans un seul et même plan réel T''. Alors, les ternes de plans TT'T'', $\mathcal{T}\mathcal{T}'\mathcal{T}''$ formeront les trièdres demandés.

Or je dis que, la surface étant supposée réelle, il est toujours possible de trouver deux plans tritangents T, T' qui satisfassent à la condition prescrite. Cela est évident quand les 27 droites sont toutes réelles; supposons donc qu'il y ait des droites imaginaires, qui seront nécessairement conjuguées deux à deux.

Premièrement, soient a_1, b_3 deux droites imaginaires conjuguées situées dans un même plan ***), qui sera réel, auquel cas passeront par a_1 quatre autres plans, imaginaires, et par b_3 leurs conjugués. Deux plans conjugués (l'un par a_1 et l'autre par b_3) satisfont évidemment à la question; car la droite commune à ces plans ne peut pas être située sur la surface; autrement il y aurait trois droites croisées en un même point, qui serait double pour la surface.

Secondement, soient b_2, b_3 deux droites imaginaires conjuguées, non situées dans un même plan; et a_1, a_4, a_5, a_6, c_{23} les cinq droites qui rencontrent celles-là, et qui formeront un ensemble réel: c'est pourquoi il y aura parmi celles-ci un nombre impair

*) {*On the distribution of surfaces of the third order into species* etc. (Philosophical Transactions 1863)}.

**) {Contenant chacun trois droites réelles; ou chacun une droite réelle et deux droites imaginaires conjuguées. Dans ce second cas les deux droites réelles des deux plans se rencontrent}.

***) Entendez toujours *plan tritangent.*

de droites réelles. Si ces cinq droites sont toutes réelles, il passera au moins un plan réel par chacune d'elles: or, parmi ces cinq plans réels, il est possible d'en choisir deux qui remplissent la condition requise. Soit, en effet, $a_1 b_4 c_{14}$ le plan réel par a_1; si le plan $c_{23} c_{15} c_{64}$ ou le plan $c_{23} c_{16} c_{45}$ était réel, on aurait déjà les deux plans cherchés. Si au contraire le seul plan $c_{23} c_{14} c_{56}$, par c_{23}, était réel, la droite c_{14} étant placée sur deux plans réels serait réelle; donc c_{56} est une droite réelle, et dès lors le plan $a_5 b_6 c_{56}$ sera réel. Ainsi les plans $a_1 b_4 c_{14}$, $a_5 b_6 c_{56}$ formeront la couple demandée.

Si, parmi les cinq droites qui rencontrent b_2, b_3 il y en a deux imaginaires conjuguées a_1, c_{23}, les plans $a_1 b_3$, $b_2 c_{23}$ seront imaginaires conjugués et se couperont suivant une droite non située sur la surface.

Concluons donc que toute surface (réelle, générale) du troisième ordre peut être engendrée à l'aide de deux trièdres, qui présentent un des trois cas suivants: 1.° les trièdres sont formés par six plans réels; 2.° un trièdre est complètement réel, tandis que l'autre est formé par un plan réel et deux plans imaginaires conjugués; 3.° chaque trièdre a un plan réel et deux plans imaginaires conjugués.

156. *Premier cas.* Les deux trièdres étant formés par six plans réels, ceux-ci se couperont suivant neuf droites réelles

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_{23} & c_{31} & c_{12}\,. \end{matrix}$$

L'hyperboloïde réel déterminé par les trois droites b_1, b_2, b_3 coupera la surface cubique suivant trois autres droites (147) a_4, a_5, a_6, qui seront toutes réelles, ou l'une réelle et les deux autres imaginaires conjuguées. Distinguons ces deux cas.

a. Les droites a_4, a_5, a_6 sont réelles. Alors, les plans

$$\begin{matrix} b_1 a_4 & b_1 a_5 & b_1 a_6 \\ b_2 a_4 & b_2 a_5 & b_2 a_6 \\ b_3 a_4 & b_3 a_5 & b_3 a_6 \end{matrix}$$

donneront neuf autres droites réelles

$$\begin{matrix} c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{34} & c_{35} & c_{36} \end{matrix}$$

et les plans

$$\begin{matrix} c_{13} c_{24} & c_{13} c_{25} & c_{13} c_{26} \\ a_3\, c_{34} & a_3\, c_{35} & a_3\, c_{36} \end{matrix}$$

couperont la surface suivant six autres droites réelles

$$\begin{matrix} c_{56} & c_{46} & c_{45} \\ b_4 & b_5 & b_6. \end{matrix}$$

Dans ce cas, on a donc 27 *droites réelles.*

b. Soit a_5 une droite réelle, et a_4, a_6 imaginaires conjuguées. Les plans réels

$$b_1 a_5 \qquad b_2 a_5 \qquad b_3 a_5$$

donnent trois autres droites réelles

$$c_{15} \quad c_{25} \quad c_{35}$$

et les plans réels

$$c_{13} c_{25} \qquad a_3 c_{35}$$

donnent deux autres droites réelles

$$c_{46} \quad b_5.$$

Les couples de plans imaginaires conjugués

$$\begin{matrix} b_1 a_4 & b_1 a_6 \\ b_2 a_4 & b_2 a_6 \\ b_3 a_4 & b_3 a_6 \end{matrix}$$

donnent les couples de droites imaginaires conjuguées

$$\begin{matrix} c_{14} & c_{16} \\ c_{24} & c_{26} \\ c_{34} & c_{36} \end{matrix}$$

et les couples de plans imaginaires conjugués

$$\begin{matrix} a_1\, c_{14} & a_1\, c_{16} \\ c_{23}\, c_{14} & c_{23}\, c_{16} \end{matrix}$$

donnent deux autres couples de droites imaginaires conjuguées

$$\begin{matrix} b_4 & b_6 \\ c_{56} & c_{54}. \end{matrix}$$

On a donc [38] 15 *droites réelles et* 15 *plans réels:* 3 *plans réels par chaque droite réelle, et* 3 *droites réelles dans chaque plan réel. Deux droites imaginaires conjuguées ne se coupent pas.*

157. *Deuxième cas.* Un trièdre est tout à fait réel; l'autre a une face réelle, les deux autres étant imaginaires conjuguées. Les plans du premier trièdre seront rencontrés par la face réelle de l'autre suivant trois droites réelles

$$a_3 \quad c_{13} \quad b_1$$

et par les faces imaginaires de ce même trièdre suivant trois couples de droites imaginaires conjuguées

$$\begin{array}{ll} b_2 & c_{23} \\ b_3 & a_1 \\ a_2 & c_{12}. \end{array}$$

Les hyperboloïdes, imaginaires conjugués, déterminés par les droites (b_1, b_2, b_3), (b_1, c_{23}, a_1) couperont la surface cubique suivant deux ternes de droites imaginaires (a_4, a_5, a_6), (c_{14}, c_{15}, c_{16}), conjuguées deux à deux, qui déterminent trois plans $a_4 c_{14}$, $a_5 c_{15}$, $a_6 c_{16}$. Distinguons deux cas, suivant que ces trois plans sont tous réels, ou qu'un seul soit réel et les deux autres imaginaires conjugués.

a. Les trois plans sont réels, et par suite chacun d'eux contient deux droites conjuguées

$$\begin{array}{ll} a_4 & c_{14} \\ a_5 & c_{15} \\ a_6 & c_{16}. \end{array}$$

Les couples de plans imaginaires conjugués

$$\begin{array}{ll} b_2 a_4 & c_{23} c_{14} \\ b_2 a_5 & c_{23} c_{15} \\ b_2 a_6 & c_{23} c_{16} \\ b_3 a_4 & a_1 c_{14} \\ b_3 a_5 & a_1 c_{15} \\ b_3 a_6 & a_1 c_{16} \end{array}$$

fournissent les six couples de droites imaginaires conjuguées

$$\begin{array}{ll} c_{24} & c_{56} \\ c_{25} & c_{64} \\ c_{26} & c_{45} \\ c_{34} & b_4 \\ c_{35} & b_5 \\ c_{36} & b_6, \end{array}$$

situées dans six plans réels, dont les trois premiers passent par c_{13}, et les trois autres par a_3.

Ainsi, *dans ce cas, nous avons* 3 *droites réelles, et* 13 *plans réels, dont l'un contient les* 3 *droites réelles, et les autres passent,* 4 *à* 4, *par les* 3 *mêmes droites. Deux droites imaginaires conjuguées sont toujours dans un même plan (réel).*

b. Les six droites imaginaires $a_4, a_5, \ldots$ soient conjuguées de la manière suivante

$$\begin{array}{ll} a_4 & c_{14} \\ a_5 & c_{16} \\ a_6 & c_{15}, \end{array}$$

d'où il résulte que le plan $a_4 c_{14}$ est réel, mais $a_5 c_{15}$, $a_6 c_{16}$ sont deux plans imaginaires conjugués. Alors, les couples de plans imaginaires conjugués

$$\begin{array}{ll} b_2\, a_4 & c_{23}\, c_{14} \\ b_3\, a_4 & a_1\; c_{14} \\ b_2\, a_5 & c_{23}\, c_{16} \\ b_3\, a_5 & a_1\; c_{16} \\ b_2\, a_6 & c_{23}\, c_{15} \\ b_3\, a_6 & a_1\; c_{15} \end{array}$$

donneront les six couples de droites imaginaires conjuguées

$$\begin{array}{ll} c_{24} & c_{56} \\ c_{34} & b_4 \\ c_{25} & c_{45} \\ c_{35} & b_6 \\ c_{26} & c_{64} \\ c_{36} & b_5, \end{array}$$

dont les premières deux seulement sont formées par des droites qui se coupent, en déterminant les plans réels $c_{24} c_{56}$, $c_{34} b_4$, qui passent par c_{13}, a_3 respectivement.

Ce cas nous offre donc 3 *droites réelles et* 7 *plans réels, dont l'un contient les* 3 *droites réelles et les autres passent,* 2 *à* 2, *par les mêmes droites. Parmi les droites imaginaires, il y a* 6 *couples de droites conjuguées qui se coupent, et* 6 *couples de droites conjuguées qui ne se coupent pas.*

158. *Troisième cas.* Chacun des deux trièdres a une face réelle et deux faces imaginaires conjuguées. La face réelle du premier trièdre coupe les faces de l'autre suivant une droite réelle

$$b_1$$

et deux droites imaginaires conjuguées

$$a_3 \quad c_{13}.$$

Le plan réel du second trièdre rencontre les faces imaginaires du premier suivant deux droites imaginaires conjuguées

$$a_2 \quad c_{12}.$$

Et les plans imaginaires des deux trièdres s'entrecoupent suivant deux couples de droites imaginaires conjuguées

$$\begin{matrix} b_2 & b_3 \\ a_1 & c_{23}, \end{matrix}$$

où les droites d'une même couple ne se rencontrent pas.

L'hyperboloïde réel déterminé par les droites b_1, b_2, b_3 coupera la surface cubique suivant trois droites nouvelles a_4, a_5, a_6, à propos desquelles il faut distinguer deux cas possibles.

a. Si les droites

$$a_4 \quad a_5 \quad a_6$$

sont toutes réelles, les plans réels

$$b_1 a_4 \qquad b_1 a_5 \qquad b_1 a_6$$

donneront trois autres droites réelles

$$c_{14} \quad c_{15} \quad c_{16}.$$

Les plans imaginaires conjugués

$$\begin{matrix} b_2 a_4 & b_3 a_4 \\ b_2 a_5 & b_3 a_5 \\ b_2 a_6 & b_3 a_6 \end{matrix}$$

fournissent les trois couples de droites imaginaires conjuguées

$$\begin{matrix} c_{24} & c_{34} \\ c_{25} & c_{35} \\ c_{26} & c_{36}, \end{matrix}$$

et les plans imaginaires conjugués

$$\begin{matrix} a_1 c_{14} & c_{23} c_{14} \\ a_1 c_{15} & c_{23} c_{15} \\ a_1 c_{16} & c_{23} c_{16} \end{matrix}$$

donneront trois autres couples de droites imaginaires conjuguées

$$\begin{matrix} b_4 & c_{56} \\ b_5 & c_{64} \\ b_6 & c_{45}. \end{matrix}$$

On obtient ainsi [39] 7 *droites réelles et* 5 *plans réels. Ces* 5 *plans passent par une même droite; il y en a* 3 *dont chacun contient* 2 *autres droites réelles, tandis que chacun des* 2 *autres plans contient* 2 *droites imaginaires conjuguées. Les droites imaginaires conjuguées des* 8 *autres couples ne se coupent pas.*

b. Si

$$a_4$$

est une droite réelle, et

$$a_5 \quad a_6$$

deux droites imaginaires conjuguées, le plan réel $b_1 a_4$ donnera une troisième droite réelle

$$c_{14}$$

et les plans imaginaires conjugués

$$\begin{array}{ll} b_1\, a_5 & b_1\, a_6 \\ b_2\, a_5 & b_3\, a_6 \\ b_2\, a_6 & b_3\, a_5 \\ b_2\, a_4 & b_3\, a_4 \end{array}$$

donneront les quatre couples de droites imaginaires conjuguées

$$\begin{array}{ll} c_{15} & c_{16} \\ c_{25} & c_{36} \\ c_{26} & c_{35} \\ c_{24} & c_{34}\,. \end{array}$$

Les plans imaginaires conjugués

$$\begin{array}{ll} a_1\, c_{14} & c_{23}\, c_{14} \\ a_1\, c_{16} & c_{23}\, c_{15} \\ a_1\, c_{15} & c_{23}\, c_{16} \end{array}$$

donnent enfin les trois couples de droites imaginaires conjuguées

$$\begin{array}{ll} b_4 & c_{56} \\ b_6 & c_{46} \\ b_5 & c_{45}\,. \end{array}$$

On retombe ainsi sur un cas déjà considéré (deuxième cas, b).

159. Nous pouvons conclure que *la surface générale du troisième ordre ne présente que cinq espèces différentes, eu égard à la réalité des* 27 *droites*, savoir:

1.e	espèce	—	27	droites et	45	plans	réels
2.e	»	—	15	»	15	»	»
3.e	»	—	7	»	5	»	»
4.e	»	—	3	»	7	»	»
5.e	»	—	3	»	13	»	»

On peut demander, pour chaque espèce, le nombre des double-six qui sont formés par deux six réels ou imaginaires conjugués. En s'aidant du tableau donné ailleurs (117), on trouve sans peine ce qui suit.

Première espèce. — Tout est réel.

Deuxième espèce. — Il y a 15 double-six réels, dont chaque six est réel et formé par 4 droites réelles et 2 droites imaginaires conjuguées. Il y a un autre double-six réel, dont les six sont imaginaires conjugués.

Troisième espèce. — Il y a 6 double-six réels, dont chaque six est réel et formé par 2 droites réelles et 2 couples de droites imaginaires conjuguées. Il y a 2 autres double-six réels, chacun desquels a deux six imaginaires conjugués.

Quatrième espèce. — Il y a un seul double-six réel et formé par deux six réels; chacun de ces six est l'ensemble de 3 couples de droites imaginaires conjuguées. Il y a en outre 3 double-six réels, formés par des six imaginaires conjugués.

Cinquième espèce. — Il n'y a pas de six réels; mais seulement 12 double-six réels, chacun étant une couple de six imaginaires conjugués.

160. On a vu (118) qu'une surface cubique peut, en général, être engendrée à l'aide de trois réseaux projectifs de plans. Dans ce mode de génération, on déduit les 27 droites des six points **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, où un plan E est rencontré par une certaine courbe gauche du sixième ordre. En effet, les 27 droites correspondent (114) aux six points

1, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**,

aux six coniques

23456, **13456**, **12456**, **12356**, **12346**, **12345**,

et aux quinze droites

23, **31**, **12**, **56**, **64**, **45**,
14, **15**, **16**, **24**, **25**, **26**, **34**, **35**, **36**.

L'ensemble des trois réseaux étant supposé réel, de même que le plan E, le système des six points **123456** sera réel aussi; et par conséquent, on pourra distinguer les cas suivants:

1.° Si les six points sont tous réels, les 27 droites sont toutes réelles *(première espèce)*.

2.° Si quatre points sont réels, et que les deux autres soient imaginaires conjugués, on aura $4+4+6+1=15$ droites réelles; les autres sont imaginaires et telles que deux conjuguées ne se rencontrent (pas *deuxième espèce)*.

3.° Si deux points sont réels, et que les autres soient imaginaires conjugués par couples, on aura $2+2+1+2=7$ droites réelles; 2 couples de droites imaginaires conjuguées qui se coupent, et 8 couples de droites imaginaires conjuguées qui ne se coupent pas *(troisième espèce)*.

4.° Si les six points sont tous imaginaires et conjugués par couples, on aura $1+1+1=3$ droites réelles; 6 couples de droites imaginaires conjuguées qui se coupent, et 6 couples de droites imaginaires conjuguées qui ne se coupent pas *(quatrième espèce)*.

Il n'est pas possible d'obtenir la cinquième espèce par ce mode de génération: ce qui résulte aussi du remarque que, dans la cinquième espèce, il n'y a aucun six réel, tandis que la génération à l'aide de trois réseaux projectifs (dont l'ensemble soit réel) nous mène à un double-six, les deux six duquel (formés par les droites qui correspondent aux six points et aux six coniques) sont nécessairement réels *).

Nous nous proposons maintenant de prouver que, si la génération par des réseaux projectifs ne peut donner que les quatre premières espèces, il y a un autre mode de génération qui est propre à donner toutes les cinq espèces. Pour cela, il faut que nous discutions d'abord les cas possibles fournis par l'intersection de deux surfaces quadriques, qui ne se touchent en aucun point.

161. Deux surfaces de second ordre, qui n'aient aucun point de contact, se coupent suivant une courbe gauche de quatrième ordre, par laquelle passent quatre cones quadriques; les sommets de ces cones sont aussi les sommets du tétraèdre conjugué commun à toutes les surfaces quadriques passant par la courbe gauche. Ces surfaces forment un faisceau: c'est-à-dire que par un point quelconque x de l'espace et par la courbe gauche passe une seule surface quadrique. Les deux génératrices rectilignes de cette surface, qui passent par x, sont les deux droites qu'on peut mener du point x à couper deux fois la courbe gauche.

Tout cone passant par la courbe gauche et ayant son sommet en un point de la courbe est du troisième ordre; et par conséquent, la perspective de la courbe gauche sur un plan, l'oeil étant placé sur elle, est une courbe (générale) du troisième ordre.

C'est des propriétés de cette perspective plane qu'on déduit un grand nombre de propriétés de la courbe gauche de quatrième ordre (et de premier genre (125)). Par ex., par un point quelconque de la cubique plane on peut lui mener quatre droites tangentes, et le rapport anharmonique de ces quatre droites est constant (rapport anharmonique de la cubique). Donc, par toute droite appuyée à la courbe gauche en deux points oo', on peut lui mener quatre plans tangents. Si o est l'oeil et que l'on

*) Si l'on regarde une surface cubique F_3 comme polaire mixte de deux plans E, E', par rapport à une surface fondamentale du même ordre (76), on arrive à un double-six, dont les droites correspondent aux intersections des plans donnés avec deux courbes gauches du 6.^{e} ordre respectivement. Si les plans donnés sont imaginaires conjugués, il en est de même des deux six, et par conséquent, il peut d'abord paraître possible d'obtenir, par ce moyen, la cinquième espèce aussi. Mais l'illusion s'évanouit en considérant que les droites homologues des deux six, qui sont imaginaires conjuguées, ne se coupent pas: tandis que, dans la cinquième espèce, deux droites imaginaires conjuguées sont toujours dans un même plan.

déplace o', le rapport anharmonique de ces quatre plans reste invariable; et dès lors il ne changera pas si o' est fixe et o variable; et conséquemment, le même rapport ne variera pas non plus de quelque manière qu'on déplace la corde oo'. Il résulte de là que, si l'oeil parcourt la courbe gauche, le rapport anharmonique de la cubique perspective se conserve constant. On peut donner à ce nombre constant la dénomination de *rapport anharmonique de la courbe gauche.*

162. On peut regarder une courbe gauche C_4 de quatrième ordre (premier genre) comme l'intersection incomplète d'une surface S du second ordre et d'un cone K du troisième ordre, dont le sommet soit un point o de C_4. Les deux génératrices de S qui passent par o coupent de nouveau la courbe gauche; et dès lors elles appartiennent aussi au cone K; c'est-à-dire qu'elles formeront, avec C_4, l'intersection complète des lieux S et K. Le plan de ces génératrices est tangent à S au point o; il contient donc la droite T tangente en ce point à C_4: droite qui est aussi une génératrice du cone K. Le plan osculateur à C_4 en o coupera la courbe en un autre point o'; donc, ce même plan touchera le cone K suivant T et le coupera suivant la droite oo'.

L'oeil étant placé en o, la perspective de C_4 est une cubique (base du cone K). Soit ω la trace de T sur le plan du tableau; les droites tangentes de la cubique, issues de ω, seront les traces des quatre plans tangents de C_4, qu'on peut mener par T. Or, ces plans touchent la courbe gauche en deux points (dont l'un est o); donc ils passeront respectivement par les sommets des quatre cones quadriques, sur lesquels C_4 est placée: car ces cones forment l'enveloppe complète des plans bitangents de C_4. Conséquemment *le rapport anharmonique des quatre plans qui touchent* C_4 *en un point quelconque et passent respectivement par les sommets des quatre cones quadriques est égal au rapport anharmonique de la courbe gauche même;* et dès lors, il est un nombre constant.

163. Réciproquement, une cubique plane donnée peut être regardée comme perspective d'une courbe gauche du quatrième ordre (premier genre) passant par l'oeil o. Soit ω un point quelconque de la cubique plane; et qu'une droite menée par ω coupe cette courbe en deux autres points ω_1, ω_2. Alors, le cone qui a le point o pour sommet et la cubique plane pour base, rencontrera une surface quadrique menée arbitrairement par les droites $o\omega_1$, $o\omega_2$, suivant une courbe gauche du quatrième ordre, touchée en o par la droite $o\omega$.

164. Si les deux surfaces quadriques (161) sont réelles, leur intersection peut être réelle ou imaginaire; et dans la première hypothèse, ou elle consiste en un *trait (Zug, Stück)* unique; ou bien elle est l'ensemble de deux *traits* associés qui n'ont aucun point commun, pas même à distance infinie. Nous aurons à examiner ces trois cas séparément.

165. Si l'intersection C_4 de deux surfaces quadriques est une courbe *monogrammique* (à un seul trait), sa perspective (l'oeil étant toujours placé sur la courbe gauche) sera

aussi d'un seul trait, c'est-à-dire qu'elle n'aura qu'une branche serpentine avec trois inflexions *). Or, on sait **) qu'une telle cubique plane a un rapport anharmonique imaginaire: en d'autres termes, d'un point quelconque de la cubique on ne peut lui mener que deux tangentes réelles. Donc (162), parmi les quatre plans tangents à C_4 en un point quelconque et passant respectivement par les sommets des quatre cones quadriques (qui font partie du faisceau dont C_4 est la base) il n'y en a que deux réels; c'est-à-dire que *des quatre cones deux seulement sont réels.*

De ce que la cubique perspective n'admet que deux tangentes réelles issues d'un quelconque de ses points, il résulte en outre que *par toute droite appuyée à* C_4 *en deux points réels,* distincts ou coïncidents, *on peut mener à cette courbe deux plans tangents réels, et deux seulement.* D'après la loi de continuité, cette propriété subsistera aussi pour une droite appuyée à C_4 en deux points imaginaires conjugués.

Le tétraèdre conjugué a deux sommets réels, et dès lors deux faces réelles: chaque face réelle contient un sommet réel. Donc, chaque face réelle coupe C_4 en deux points réels; c'est-à-dire qu'elle coupe le cone quadrique, dont le sommet est situé sur cette face, suivant deux droites, dont une rencontre en deux points réels la section de l'autre cone.

Les cones réels de second ordre, qui passent par C_4, constituent la limite de séparation entre les surfaces gauches et les surfaces non réglées du faisceau, dont C_4 est la base. Dans le cas actuel, il est aisé de voir que *la quadrique* (du faisceau) *passant par un point quelconque de l'espace intérieur ou extérieur à tous les deux cones réels, est gauche; au lieu que la quadrique passant par un point quelconque de l'espace intérieur à l'un des cones et extérieur à l'autre n'est pas réglée* [40].

166. L'intersection C_4 soit maintenant une courbe *digrammique* (à deux traits), auquel cas la cubique perspective sera composée d'une ovale ***) et d'une branche serpentine avec trois inflexions. Soit ω la trace, sur le tableau, de la droite qui touche C_4 au point o de l'oeil (163); les tangentes menées par ω à la cubique seront les traces des quatre plans qui touchent C_4 en o et passent respectivement par les sommets du tétraèdre conjugué (162). Or, les quatre tangentes de la cubique, issues de ω, sont toutes imaginaires ou toutes réelles, selon que ce point appartient à l'ovale ou à la branche serpentine; donc, *les sommets du tétraèdre conjugué* (savoir les sommets des

---

*) En considérant la continuité de la courbe comme non interrompue par les passages à l'infini. {Une forme typique de cette sorte de cubiques planes est la *parabola pura* de NEWTON *(Enumeratio linearum tertii ordinis)*}.

) {Giornale di matematiche, t. 2.º (Napoli 1864) p. 78} [Queste Opere, n. **49 (t. 2.º)].

***) En appliquant cette dénomination même aux formes hyperboliques et paraboliques [d'après M. BELLAVITIS.] {Une forme typique de cette espèce est la *parabola campaniformis cum ovali* de NEWTON}.

quatre cones quadriques qui passent par C_4) *seront tous imaginaires ou tous réels, selon que la perspective du trait, sur lequel est placé l'oeil, est une ovale ou une branche serpentine.*

Il résulte de là que, si la courbe C_4 est donnée, la perspective du trait sur lequel on place l'oeil, quel que soit le trait choisi, sera toujours une ovale, ou toujours une branche serpentine. Nous avons donc deux cas à distinguer, suivant que le tétraèdre conjugué est tout réel ou tout imaginaire.

167. Si le tétraèdre est tout imaginaire, c'est-à-dire si ω est un point de l'ovale, un plan quelconque mené par l'oeil coupera C_4 en trois autres points (dont deux peuvent être imaginaires), les perspectives desquels ou appartiendront toutes à la branche serpentine, ou l'une à cette branche et les deux autres à l'ovale. Donc, *si un plan rencontre C_4 en quatre points réels, trois de ces points appartiendront à un même trait; et le quatrième à l'autre trait; et si un plan rencontre C_4 en deux points réels seulement, ces deux points seront toujours l'un sur un trait et l'autre sur l'autre trait.* D'où il suit qu'un plan tangent en un point coupe la courbe en deux autres points situés sur des traits différents; qu'un plan osculateur à un trait coupe l'autre trait; et qu'il n'y a aucun plan réel qui touche la courbe en deux points, ou qui la rencontre en quatre points tous imaginaires ou tous coïncidents.

En outre, il résulte de ce qui a été remarqué pour la cubique perspective, que *par toute droite appuyée à la courbe en deux points* (réels ou imaginaires conjugués) *d'un même trait il ne passe aucun plan réel tangent ailleurs à la courbe; et que par une droite appuyée aux deux traits on peut toujours faire passer quatre plans tangents réels.*

Quand un tétraèdre est conjugué à une surface quadrique, toute génératrice de celle-ci rencontrant une arête du tétraèdre, rencontre aussi l'arête opposée; et par suite la surface contient les quatre droites suivant lesquelles s'entrecoupent les quatre plans tangents menés par deux arêtes opposées. Si le tétraèdre est formé (comme l'on suppose actuellement) par deux couples de plans imaginaires conjugués, il a néanmoins deux arêtes opposées réelles, dont chacune est l'intersection de deux plans tangents de la surface. Or, ces plans sont réels, car ils doivent former un système harmonique avec deux faces du tétraèdre, lesquelles sont des plans imaginaires conjugués. Donc les quatre droites d'intersection des deux couples de plans tangents sont réelles, et conséquemment la surface est gauche.

Ainsi, *dans le cas actuel, toutes les quadriques passant par C_4 sont gauches;* c'est-à-dire que par tout point de l'espace on peut faire passer deux droites réelles qui rencontrent deux fois la courbe (l'une au moins en des points réels).

168. Supposons maintenant que notre courbe gauche C_4 (digrammique) corresponde à un tétraèdre conjugué tout réel, c'est-à-dire qu'elle soit située sur quatre cones qua-

driques réels. Un plan mené arbitrairement par l'oeil coupera C_4 en trois autres points (deux peuvent être imaginaires), dont les perspectives tomberont ou toutes trois sur la branche serpentine, ou bien l'une sur cette branche et les deux autres sur l'ovale. Donc, *si un plan rencontre* C_4 *en quatre points réels, ceux-ci peuvent appartenir tous à un même trait ou bien deux à l'un trait et deux à l'autre; et si un plan rencontre la courbe en deux points réels seulement, ceux-ci appartiennent toujours à un même trait.* D'où il résulte qu'un plan osculateur à un trait coupe ce même trait.

De l'analyse des quatre tangentes de la cubique perspective, issues d'un quelconque de ses points, on déduit en outre que *par toute droite appuyée à la courbe en deux points* (réels ou imaginaires conjugués) *d'un même trait on peut faire passer quatre plans tangents, dont deux touchent un trait et deux l'autre*; *tandis que par toute droite appuyée aux deux traits il ne passe aucun plan tangent réel.*

Chaque face du tétraèdre conjugué coupe la courbe C_4 en quatre points, sommets d'un quadrangle complet, dont les côtés opposés se rencontrent en trois points réels (sommets du tétraèdre); donc ces quatre intersections sont toutes réelles ou toutes imaginaires. Mais d'autre part, si un trièdre est conjugué à un cone quadrique, il y a une face du trièdre qui ne rencontre pas le cone. Donc, *deux faces du tétraèdre coupent* C_4 *en quatre points réels et les deux autres en quatre points imaginaires.*

Il est aisé de voir que *la quadrique* du faisceau, dont C_4 est la base, *menée par un point quelconque de l'espace intérieur ou extérieur à tous les quatre cones, ou bien de l'espace intérieur à deux cones et extérieur aux deux autres, est une surface gauche;* tandis que *la quadrique passant par un point intérieur* (*extérieur*) *à un cone et extérieur (intérieur) aux trois autres, est une surface non réglée.* En outre, par un point quelconque de l'espace intérieur ou extérieur à tous les quatre cones, on peut mener deux droites, dont chacune est appuyée en deux points (réels ou imaginaires conjugués) à un même trait de C_4; au lieu que par tout point extérieur à deux cones et intérieur aux deux autres on peut mener deux droites, chacune desquelles coupe l'un et l'autre trait.

169. Enfin, supposons que la courbe C_4 soit imaginaire: auquel cas tout plan réel coupe C_4 en quatre points imaginaires, sommets d'un quadrangle complet qui aura deux côtés réels; tandis que les autres couples de côtés opposés n'ont de réel que le point de concours. Il y a donc, dans l'espace, un nombre infini de points par lesquels on peut mener deux droites réelles à rencontrer en deux points (nécessairement imaginaires conjugués) la courbe; et il y a un nombre infini aussi de points par lesquels ces deux droites sont imaginaires conjuguées; c'est pourquoi il y aura une surface réelle, lieu des points pour lesquels ces deux mêmes droites sont coïncidentes. Or, ce lieu est en général formé par les quatre cones quadriques passant par C_4; donc, dans le cas actuel, il y aura au moins deux [41] cones réels.

Le tétraèdre conjugué est tout réel. En effet, si a est le sommet d'un cone réel, le plan polaire de a (par rapport aux quadriques du faisceau dont C_4 est la base) coupera C_4 suivant un quadrangle imaginaire, dont les couples de côtés opposés ont trois points de concours réels, b, c, d. Or, $abcd$ est précisément le tétraèdre conjugué.

Puis, si l'on réfléchit que chaque face du tétraèdre coupe l'un des trois cones, dont elle contient les sommets, suivant deux droites réelles, et chacun des deux autres suivant deux droites imaginaires (conjuguées), et que des trois faces concourant au sommet d'un cone réel deux seules peuvent couper ce cone suivant des droites réelles; on reconnaîtra que *deux cones, seulement, sont réels;* les deux autres, tout en ayant leurs sommets réels, sont imaginaires.

Les deux cones réels sont totalement extérieurs l'un à l'autre. *Les surfaces* (du faisceau dont C_4 est la base) *qui passent par les points de l'espace extérieur à l'un et à l'autre cone sont gauches; au lieu que par les points intérieurs à l'un des cones, il ne passe que des quadriques* (du faisceau) *non réglées.*

170. Ainsi, *il y a trois espèces différentes de la courbe gauche (générale) de quatrième ordre et de premier genre,* c'est-à-dire:

1.er cas — Courbe réelle *monogrammique:* le tétraèdre conjugué a deux sommets réels; il y a deux cones quadriques réels qui passent par la courbe.

2.e cas — Courbe réelle *digrammique:* le tétraèdre n'a aucun sommet réel; il n'y a aucun cone réel.

3.e cas — Courbe réelle *digrammique:* le tétraèdre a quatre sommets réels, qui donnent quatre cones réels aussi.

En outre, l'intersection de deux quadriques réelles (qui ne se touchent en aucun point) présente un autre cas possible:

4.e cas — Courbe imaginaire: le tétraèdre a quatre sommets réels; mais il n'y a que deux cones réels.

171. Qu'on revienne maintenant à la surface cubique générale F_3, et qu'on remarque que dans toutes les cinq espèces qu'elle peut présenter (159) il y a toujours trois droites réelles situées dans un même plan: soient ces droites a, b, c. La première polaire du point o, commun à b et c, est une quadrique gauche qui ne passe pas seulement par les droites b, c; elle coupe F_3 aussi suivant une courbe gauche C_4 de quatrième ordre (premier genre), lieu des points où F_3 est touchée par des droites issues de o. Cette courbe gauche rencontre chacune des droites b, c en deux points, qui sont évidemment les mêmes où cette droite touche deux coniques de la surface.

La courbe C_4 est la base d'un faisceau de quadriques coupant F_3 suivant des coniques, dont les plans passent par la droite a (143): ainsi ces quadriques et les plans par a forment deux faisceaux projectifs propres à engendrer la surface F_3. Remarquons de plus (143) que les plans par a sont les polaires du point o par rapport aux quadriques correspondantes; d'où il résulte que la surface cubique est complètement déterminée par la courbe gauche C_4 et par le point o.

Les autres 24 droites sont, deux à deux, situées dans les 12 plans tritangents qui passent par a, b, c; parmi lesquels, les 4 plans par a sont déterminés par les sommets des 4 cones quadriques qui passent par C_4; et les autres sont les plans qu'on peut mener par b et c à toucher ailleurs C_4 (112).

A présent, il faut démontrer qu'en choisissant la courbe C_4 et le point o d'une manière convenable, on peut déduire toutes les cinq espèces des surfaces cubiques, de ce mode de génération.

172. *Que la courbe* C_4 *soit réelle, digrammique et placée sur quatre cones quadriques réels, et que le point o soit extérieur à tous les quatre cones:* auquel cas (168) non-seulement passent par o deux cordes réelles b, c de C_4, mais, en outre, les plans polaires de o se coupent suivant une droite a, qui rencontrera chaque cone en des points réels. D'où il résulte que par a passent quatre plans tritangents (de F_3) réels (les plans polaires de o par rapport aux quatre cones), chacun desquels contiendra (outre a) deux droites réelles. On peut ajouter (168) que chacune des droites b, c coupera en deux points (réels ou non) un même trait de C_4; et que par chacune de ces droites on peut conséquemment mener quatre plans tangents à la courbe gauche, et dès lors tritangents à F_3. Cela est propre et exclusif à la première espèce des surfaces cubiques (156); donc chacun de ces huit plans tritangents par b ou par c contiendra deux autres droites réelles. Ainsi *la surface engendrée aura* 27 *droites réelles.*

Réciproquement, on peut démontrer que le choix adopté pour C_4 et pour le point o est nécessaire afin que la surface engendrée soit de la première espèce.

173. *Si la courbe* C_4 *est de nouveau réelle, digrammique et placée sur quatre cones quadriques réels, mais que le point o soit intérieur à tous les quatre cones,* nous aurons encore (168) quatre plans tritangents réels par chacune des droites a, b, c. Mais, comme dans ce cas la droite a (intersection des plans polaires de o) est entièrement extérieure à tous les cones, il en suit que chacun des quatre plans par cette droite, ne rencontrant pas le cone correspondant suivant des droites réelles coupera F_3 suivant deux droites imaginaires conjuguées. Ce résultat est propre et exclusif à la cinquième espèce (157); donc chacun des huit plans par b ou par c contiendra aussi une couple de droites imaginaires conjuguées. Ainsi *la surface engendrée aura trois droites réelles et douze couples de droites imaginaires conjuguées qui se coupent.*

Réciproquement, on peut démontrer que pour engendrer une surface cubique de la cinquième espèce, il faut choisir la courbe C_4 et le point o, de la manière que nous venons de faire.

174. *Que la courbe gauche* C_4 *soit encore réelle, digrammique et placée sur quatre cones réels, et que le point* o *soit pris dans l'espace intérieur à deux cones et extérieur aux deux autres:* auquel cas la droite a rencontrera (en des points réels) les deux derniers cones seulement, et chacune des droites b, c sera appuyée à tous les deux traits de C_4. D'où il résulte (168) que par a passeront quatre plans (tritangents) réels, dont deux seulement couperont F_3 suivant d'autres droites réelles; et que par b et c il ne passera aucun plan (tritangent) réel. Cela est propre et exclusif à la troisième espèce; *la surface engendrée aura* donc *sept droites réelles, deux couples de droites imaginaires conjuguées qui se coupent, et huit couples de droites imaginaires conjuguées qui ne se coupent pas.*

Il y a deux autres manières d'obtenir la surface cubique de la troisième espèce: 1.° si C_4 est réelle, digrammique, sans aucun cone quadrique réel, le point o étant du reste tout à fait arbitraire; 2.° si C_4 est imaginaire, et que le point o soit extérieur à tous les deux cones réels.

175. Soit C_4 une courbe réelle, monogrammique, et que le point o soit extérieur à tous les deux cones quadriques réels qui passent par la courbe: auquel cas (165) il y aura deux plans réels par a, chacun contenant deux autres droites réelles; et de même il y aura deux plans réels par chacune des droites b et c. Cela est propre et exclusif à la deuxième espèce; d'où il résulte que chacun des quatre plans réels passant par b ou par c coupera F_3 suivant deux autres droites réelles. Ainsi *la surface engendrée aura quinze droites réelles et six couples de droites imaginaires conjuguées qui ne se coupent pas.*

Réciproquement, on peut démontrer que le choix adopté pour C_4 et pour le point o est nécessaire afin d'obtenir une surface cubique de la deuxième espèce.

176. En dernier lieu, supposons que la courbe C_4 soit réelle monogrammique, et que le point o soit intérieur à tous les deux cones réels. Dans ce cas (165), par chacune des droites a, b, c, il ne passe que deux plans réels; et chacun des deux plans par a contiendra deux droites imaginaires conjuguées. Nous tombons ainsi sur la quatrième espèce; et par conséquent chacun des plans réels par b ou c donnera aussi deux droites imaginaires conjuguées. *La surface engendrée aura* donc *trois droites réelles, six couples de droites imaginaires conjuguées qui se coupent, et six couples de droites imaginaires conjuguées qui ne se coupent pas.*

Et réciproquement, afin d'obtenir une surface cubique de la quatrième espèce, il faut choisir la courbe C_4 et le point o de la manière que nous venons d'indiquer.

177. Dans tout ce qui précède, il est entendu qu'on veut prendre pour base des opérations un plan tritangent avec trois droites *réelles:* et nous avons démontré qu'*il est possible d'engendrer toutes les cinq espèces de la surface cubique générale.*

Mais si l'on voulait partir d'un plan tritangent réel contenant une seule droite réelle *a* et deux droites imaginaires conjuguées *b* et *c*, il ne serait plus possible d'obtenir la première et la deuxième espèce, car ces espèces n'admettent aucune couple de droites imaginaires qui se coupent. Au contraire, on peut construire les trois autres espèces, comme il suit:

la troisième espèce, si C_4 est réelle et digrammique, avec quatre cones réels, et que le point *o* soit extérieur à trois cones et intérieur à l'autre;

la quatrième espèce, si C_4 est réelle, monogrammique, et que le point *o* soit intérieur à l'un des deux cones et extérieur à l'autre;

enfin, la cinquième espèce, si C_4 est réelle et digrammique, avec quatre cones réels, et que le point *o* soit intérieur à trois cones et extérieur au quatrième; ou bien si C_4 est imaginaire et que le point *o* soit intérieur à l'un des deux cones réels (et extérieur à l'autre).

TABLE DES MATIÈRES. [42]

Chapitre Premier.

Les surfaces polaires par rapport à une surface fondamentale d'ordre quelconque.

1. 2. Surfaces polaires d'un point quelconque . . . . Pag. 6
3. Courbe polaire d'une droite. Poles d'un plan . . . . » 7
[4. Plan polaire par rapport aux surfaces polaires.] . . . . » —
5. Polaires d'un point de la surface fondamentale F_n . . . . . . » —
6. 7. Cone circonscrit à F_n . . . . » 8
8. Droites osculatrices à F_n, tangentes doubles, plans stationnaires etc. . . » —
9. Points multiples . . . . » 9
10. Polaires d'un point par rapport à un faisceau de surfaces . . . . » —
11. 12. Polaires mixtes . . . . » —
13. Réciprocité entre le pole et le point double d'une polaire . . . . » 10
14. 15. Enveloppe des plans polaires des points d'un lieu donné. . . . » —
16. Lieu des poles des plans tangents à une surface donnée . . . . . » 12

Chapitre Deuxième.

Systèmes de surfaces d'ordre quelconque.

17. Surface engendrée par deux faisceaux projectifs . . . . Pag. 12
18. Courbe gauche engendrée par trois faisceaux projectifs. . . . . . » —
19. Nombre des points où se coupent quatre surfaces correspondantes de quatre faisceaux projectifs . . . . » 13
20. Points doubles d'un faisceau . . . . » —
21. Lieu des poles d'un plan par rapport aux surfaces d'un faisceau. . . » —
22. Courbe gauche engendrée par deux réseaux projectifs . . . . . . » —
23. Surface engendrée par trois réseaux projectifs . . . . » 14
24. Courbe gauche engendrée par quatre réseaux projectifs. . . . . . » 15
25. Lieu des points doubles des surfaces d'un réseau . . . . » —
26. Développable osculatrice de la courbe d'intersection de deux surfaces . . » —
27. 28. Nombres des points communs à trois surfaces qui passent par une même courbe . . . . » 16

29. Nombre des points où se coupent cinq surfaces correspondantes de cinq réseaux projectifs. . . . . Pag. 17
30. Lieu des poles d'un plan par rapport aux surfaces d'un réseau . . . » —
31. Lieu des contacts entre une surface fixe et les surfaces d'un réseau . . » —
32. Lieu des contacts entre les surfaces d'un faisceau et celles d'un réseau. Lieu des contacts entre les surfaces d'un système linéaire . . . . . » —
33. Nombre des surfaces d'un faisceau qui touchent une surface donnée . . » 18
34. Points engendrés par deux systèmes linéaires projectifs . . . . . » 19
35. Courbe gauche engendrée par trois systèmes linéaires projectifs . . . » 20
36. Surface engendrée par quatre systèmes linéaires projectifs . . . . » 21
37. Jacobienne de quatre surfaces données. Jacobienne d'un système linéaire . » —
38. Lieu d'un point dont les plans polaires par rapport à trois surfaces données passent par une même droite . . . . » 22
39. Points qui ont le même plan polaire par rapport à deux surfaces données . » 23
40. Courbe gauche engendrée par cinq systèmes linéaires projectifs . . . » —
41. Nombre des points où se coupent six surfaces correspondantes de six systèmes linéaires projectifs. . . . . » —

Chapitre Troisième.

Assemblages symétriques.

42. La surface engendrée par deux faisceaux d'ordre n, formant un assemblage symétrique, a n^3 points doubles . . . . Pag. 24
43. Propriétés et points doubles de la surface engendrée par un assemblage symétrique de trois réseaux projectifs . . . . » —
44. Propriétés de la surface engendrée par trois réseaux projectifs quelconques. » 26
45. Transformation des réseaux générateurs d'une surface . . . . . . » —
46. Propriétés et points doubles de la surface engendrée par un assemblage symétrique de quatre systèmes linéaires projectifs . . . . . . » 27

Chapitre Quatrième.

Propriétés relatives aux surfaces nodales conjuguées.

47. La Hessienne a $10(n-2)^3$ points doubles. Surfaces polaires pures et mixtes de plans. . . . . Pag. 29
48. Surfaces polaires pures et mixtes de droites . . . . » 30
49. Deuxième polaire mixte de deux points . . . . » 31
50. La surface polaire pure d'une droite est enveloppée par les deuxièmes polaires pures des points de cette droite. . . . . » —
51. La surface polaire pure d'un plan est touchée par les deuxièmes polaires pures des points de ce plan . . . . » —
52. Surface Steinerienne . . . . » 32
53. Plans tangents aux premières polaires qui passent par un point de la Hessienne » —
54. Les plans polaires des points de la Hessienne sont tangents à la Steinerienne » —

55. La Steinerienne est l'enveloppe d'un plan qui a deux poles coïncidents . Pag. 32
56. Aux $10(n-2)^3$ points doubles de la Hessienne correspondent autant de droites sur la Steinerienne . . . . » 33
57. Courbes correspondantes . . . . » —
58. Courbe parabolique . . . . » 34
{59. Nombre des plans stationnaires qui passent par un point arbitraire.} . . » —
60. Si F_n contient une droite, on peut mener par cette droite $(n+2)(n-2)^2$ plans qui touchent F_n hors de cette même droite. Cette droite touche la Hessienne en $2(n-2)$ points . . . . » —
61. Lieu des droites osculatrices à F_n au points de l'intersection avec une surface donnée . . . . » 35
62. Développable circonscrite à F_n suivant une section plane . . . . . » 36
63. 64. Lieu d' un point dont la quadrique polaire est circonscrite ou inscrite à un tétraèdre conjugué à une quadrique donnée . . . . » —
65. 66. Lieu d'un point dont la quadrique polaire par rapport à F_n est circonscrite ou inscrite à un tétraèdre conjugué à la quadrique polaire relative à la Hessienne . . . . » 37
67. Lieu d'un point dont le plan polaire par rapport à la Hessienne est tangent à la quadrique polaire par rapport à F_n . . . . » 38
68. Les surfaces Σ . . . . » 39
69. 70. Les surfaces Ξ . . . . » 40
{71. Lieu d'un point tel que ses plans polaires par rapport à F_n et à la Hessienne, et sa quadrique polaire par rapport à F_n aient un point commun sur un plan donné.} . . . . » 41

Chapitre Cinquième.

Application des propriétés générales à une surface fondamentale du troisième ordre.

72. La Hessienne d'une surface cubique F_3 . . . . Pag. 42
73. Enveloppe des plans polaires d'un point par rapport aux cones polaires . » —
74. Hyperboloïde polaire de deux droites . . . . » 43
75. Cone polaire d'une droite . . . . » —
76. Surface polaire mixte de deux plans . . . . » —
77. Surface polaire pure d'un plan. . . . . » 44
{78. Faisceau de surfaces polaires mixtes d'un plan fixe et un plan variable.} . » —

Chapitre Sixième.

Propriétés de la surface Hessienne d'une surface fondamentale du troisième ordre.

79. Plans tangents à la Hessienne issus d'un point donné . . . . . . Pag. 45
80. Cone circonscrit à la Hessienne. . . . . » —
81. 82. Nombre des courbes gauches du quatrième ordre, dans un réseau sur

une quadrique, qui ont deux points doubles ou un rebroussement . . Pag. 46

83. Les dix points doubles p de la Hessienne sont distribués, trois à trois, sur les dix droites π correspondantes . . . . » 47

{84. L'Hessienne n' a pas *en général* d'autres points doubles, outre les dix points p.}. » —

85. Toute droite joignant deux points correspondants oo' de la Hessienne a la propriété que les plans polaires de ses points passent par une même droite $u'v'$ . . . . » —

{86. Si oo' est tangente à la Hessienne, la droite $u'v'$ aura avec celle-ci un contact du troisième ordre.} . . . . » 48

87. Point d'inflexion de la courbe d'intersection de F_3 avec un plan stationnaire. » —

88. Nombre des droites oo' dans un plan donné . . . . » 49

89. Le plan polaire d'un point de F_3, par rapport à la Hessienne, passe par les points d'inflexion de la cubique intersection de F_3 avec le plan tangent. » —

90. Nombre des droites $u'v'$ dans un plan donné . . . . » 50

91. Si une droite coupe la Hessienne en $a\,b\,c\,d$, les points correspondants $a'b'c'd'$ forment un tétraèdre dont les faces passent par a, b, c, d respectivement . » 51

92. Propriété des droites tangentes à la Hessienne . . . . » —

93. Le cone polaire de la droite π est osculateur à la Hessienne en p. . . » —

94. La Hessienne et le cone polaire de π ont les mêmes plans tangents suivant les trois droites $\pi_1\,\pi_2\,\pi_3$ qui concourent en p. . . . . » —

95. Le même cone coupe la Hessienne suivant une conique située dans le plan polaire de p . . . . » —

96. Surface polaire du plan $p\pi$ . . . . » 52

97. Si une droite par p rencontre la Hessienne en c, d, les points correspondants c', d' sont en ligne droite avec p . . . . » 53

98. Les droites π sont quatre à quatre, et les points p sont six à six dans cinq plans. Le pentaèdre de M. SYLVESTER. . . . . » 54

99. Les quadriques polaires des points de chacun des cinq plans du pentaèdre sont conjuguées au tétraèdre formé par les autres quatre plans . . » —

100. Propriété des arêtes et des diagonales du pentaèdre . . . . . . » 55

101. 102. Figures correspondantes formées par les droites et les plans par p. . » —

103. 104. Cones cubiques qui correspondent à soi-mêmes et coupent la Hessienne suivant deux courbes planes. Involution des plans de ces courbes . . » 56

105. Surface polaire d'un plan passant par p . . . . » 57

106. Autres propriétés du pentaèdre. Nouveau pentaèdre . . . . . . » 58

107. Droites polaires d'un plan par rapport aux cones quadriques dont les sommets sont dans ce plan. Axes des cylindres polaires. . . . . . » 59

108. Plans qui coupent F_3 suivant des cubiques harmoniques ou équi-anharmoniques . . . . » 60

CHAPITRE SEPTIÈME.

Les vingt-sept droites d'une surface du troisième ordre.

109. Les 27 droites; 5 plans tritangents par chaque droite; involution; les 45 plans tritangents . . . . Pag. 61

110 Génération de F_3 par deux trièdres . . . . Pag. 62
111. 112. Génération par deux faisceaux projectifs . . . . » —
113. 113bis. Projectivité de deux espaces, où à un point correspond un point et à un plan correspond une surface cubique . . . . » 64
114. Les 27 droites: notation; règle pour décider si deux droites se coupent ou non; les 45 plans . . . . » 66
{ 115. Les 45 ternes de droites dans les 45 plans. } . . . . » 67
{ 116. Relations entre les droites; le double-six de SCHLÄFLI. }. . . . . . » 68
117. Les 36 double-six . . . . » 69
118. Toute surface cubique peut être engendrée par trois réseaux projectifs. . » —

CHAPITRE HUITIÈME.

Représentation d'une surface du troisième ordre sur un plan.

119. Géométrie des courbes tracées sur F_3 . . . . Pag. 72
120. Courbes planes sur F_3. . . . . » 73
121. Courbe d'intersection de F_3 avec une surface d'ordre n. . . . . . » —
122. Courbe $C_{6,4}$ . . . . » 74
123. Courbe $C_{5,2}$ . . . . » —
124. Courbe $C_{4,0}$ . . . . » 75
125. Courbe $C_{4,1}$ . . . . » 76
126. Systèmes de cubiques gauches sur F_3 . . . . » —
127. Intersection de F_3 avec une autre surface cubique. . . . . . . » —
128. Courbes $C_{5,1}$ et $C_{5,0}$ . . . . » 78
129. Courbes $C_{6,3}$, $C_{6,2}$ et $C_{6,1}$ . . . . » —
130. Courbe $C_{6,0}$ . . . . » 79
131. Courbes $C_{7,5}$, $C_{7,4}$, $C_{8,7}$, $C_{7,1}$, $C_{8,1}$, $C_{9,1}$ . . . . » 80
132. Courbes gauches de F_3 correspondantes aux droites, coniques et cubiques du plan . . . . » —
133. 134. Courbe gauche correspondant à une courbe plane quelconque . . » 81

CHAPITRE NEUVIÈME.

Surfaces quadriques qui coupent une surface du troisième ordre suivant des coniques.

135. Points communs à deux coniques sur F_3. . . . . Pag. 83
136. Si a, b, c sont trois droites dans un plan tritangent, trois coniques dont les plans A, B, C passent par a, b, c respectivement sont sur une même surface quadrique . . . . » —
137. Hyperboloïde J_A . . . . » 84
138. Si A est le plan tritangent abc, J_A est la première polaire du point bc . » 85
139. Système des droites g. . . . . » —
140. 141. Points où les deux droites g coïncident . . . . » 86

142. L'enveloppe de chacune des séries d'hyperboloïdes J_A, J_B, J_C coïncide avec le lieu des sommets des cones quadriques (ABC) . . . . . . Pag. 87
143. Faisceau des quadriques S_A . . . . » 88
144. Le lieu des sommets des cones (ABC) est aussi le lieu de la courbe d'intersection des quadriques J_A, S_A; etc. . . . . » 89
145. Les six coniques de F_3 tangentes aux trois droites a, b, c sont situées sur quatre cones, dont les sommets sont en ligne droite. . . . . . » 90
146. Hyperboloïdes qui coupent F_3 suivant six droites . . . . » 91
147. Ternes conjuguées de droites qui ne se coupent pas . . . . . . » 92

Chapitre Dixième.

Propriétés diverses.

148. Trièdres conjugués . . . . Pag. 92
149. Ternes de trièdres conjugués qui contiennent toutes les 27 droites . . » —
150. Les sommets de deux trièdres conjugués sont deux points correspondants de la Hessienne . . . . » 93
151. Propriétés des points δ où se coupent, deux à deux, les 27 droites . . » 94
152. Les deux points où la Hessienne est touchée par une droite de F_3 sont des points correspondants sur la Hessienne . . . . » —
153. Surfaces du dixième ordre passant par les 135 points δ. . . . . . » —
154. Propriété de la section de la Hessienne par un plan quelconque . . . » 95

Chapitre Onzième.

Classification des surfaces du troisième ordre, eu égard à la réalité des 27 droites.

155. On peut toujours engendrer une surface cubique réelle par deux trièdres, chacun desquels soit un ensemble réel . . . . Pag. 96
156. Deux trièdres formés par six plans réels. . . . . » 98
157. Un triedre réel; l'autre contenant deux plans imaginaires conjugués . . » 99
158. Chaque trièdre contenant deux plans imaginaires conjugués. . . . . » 101
159. Les cinq espèces de la surface cubique générale . . . . » 103
160. La génération par trois réseaux projectifs ne donne que les quatre premières espèces . . . . » 104
161. Courbe C_4, intersection de deux quadriques . . . . » 105
162. Le rapport anharmonique de C_4 est celui des quatre plans qui touchent la courbe en un même point quelconque et qui passent respectivement par les sommets des quatre cones quadriques sur lesquels la courbe est placée. » 106
163. La cubique plane, perspective de C_4. . . . . » —
164. Les trois cas de l'intersection de deux quadriques qui ne se touchent pas. » —
165. Courbe monogrammique . . . . » —
166. Courbe digrammique; deux cas à distinguer. . . . . » 107
167. Courbe digrammique, tétraèdre imaginaire . . . . » 108

168. Courbe digrammique, tétraèdre réel . . . . Pag. 108
169. Intersection imaginaire . . . . » 109
170. Les trois espèces de C_4 . . . . » 110
171. Génération de F_3 par deux faisceaux . . . . » —
172. La première espèce . . . . » 111
173. La cinquième espèce . . . . » —
174. La troisième espèce . . . . » 112
175. La deuxième espèce . . . . » —
176. La quatrième espèce . . . . » —
{ 177. Le plan tritangent contient deux droites imaginaires conjuguées. } . . . » —