74.

SOPRA UNA CERTA FAMIGLIA DI SUPERFICIE GOBBE.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, volume I (1868), pp. 109—112.

Il signor CAYLEY è il primo *) che abbia chiamata l'attenzione dei geometri sopra una singolare famiglia di superficie gobbe, rappresentabili con equazioni della forma

$$(1) \qquad S \equiv A + Bt + Ct^2 + \ldots + Pt^n = 0,$$

ove t esprime il binomio $zy - wx$, ed il coefficiente di t^r è una forma binaria in x, y, del grado $m+n-2r$ (essendo $m \gtreqless n$).

Una superficie così fatta ha una retta direttrice, che si può considerare nata dall'avvicinamento di due rette, multiple rispettivamente secondo i numeri m, n. Un piano qualunque per la retta direttrice sega la superficie secondo n generatrici concorrenti tutte in un punto della direttrice medesima, onde esiste una corrispondenza projettiva fra i punti della direttrice ed i piani per essa. Questa corrispondenza si stabilisce assumendo tre coppie di elementi omologhi, dopo di che, per ogni piano passante per la direttrice resta individuato il punto omologo, cioè il punto di concorso delle generatrici contenute nel piano.

Io voglio qui mostrare che, quando si prendano a considerare più superficie della famiglia (1), le quali abbiano la stessa direttrice e la *stessa corrispondenza projettiva* fra i piani e i punti di questa, si incontrano proprietà, che hanno una certa analogia con quelle delle curve piane.

L'equazione (1) fa vedere che, se la retta multipla $(x = y = 0)$ e la corrispondenza projettiva de' suoi elementi sono date, il numero delle condizioni determinanti la su-

*) *Philosophical Transactions*, 1864, p. 563 e seg.

perficie è $mn+m+n$. Infatti, se questo è il numero di punti dati nello spazio, pei quali debba passare la superficie, essi punti determinano altrettanti piani per la retta direttrice; a ciascuno di questi piani corrisponde un punto della medesima retta, e quindi sono individuate le generatrici passanti pei punti dati. Allora la sezione fatta nella superficie con un piano qualsivoglia è pure determinata, perchè deve avere negl'incontri colle $mn+m+n$ generatrici altrettanti punti, e nell'incontro colla direttrice un punto m-plo ed un punto n-plo infinitamente vicini (sulla traccia del piano omologo al detto punto della direttrice), i quali equivalgono ad $\frac{m(m+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}$ condizioni: ed invero

$$\frac{m(m+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}+mn+m+n=\frac{(m+n)(m+n+3)}{2}.$$

Se la superficie dev'esssere di genere 0, dovrà possedere $(m-1)(n-1)$ generatrici doppie, e quindi il numero delle condizioni che la determinano sarà $2(m+n)-1$.

La superficie è d'ordine $m+n$; ma per la definizione della medesima non basta conoscere l'ordine: devono essere dati entrambi i numeri m,n. Perciò useremo l'espressione *superficie* $[m,n]$. Il genere d'una superficie $[m,n]$ può variare da 0 sino ad $(m-1)(n-1)$.

Condotto ad arbitrio un piano per la direttrice, otteniamo in esso un gruppo di n generatrici; se per esse cerchiamo gli assi armonici di grado r, rispetto alla direttrice *), il luogo di tali assi è una superficie gobba $[m-r,n-r]$ della stessa famiglia (1), la cui equazione è

$$\frac{d^rS}{dt^r}=0.$$

Si ha così una serie di superficie polari

$$\frac{dS}{dt}=0,\ \frac{d^2S}{dt^2}=0,\ldots,\ \frac{d^{n-1}S}{dt^{n-1}}=0,$$

la considerazione delle quali è essenziale per lo studio della superficie $S=0$.

Queste superficie si possono definire anche in altro modo. Una trasversale, che incontri la direttrice, ha n punti comuni colla superficie: il luogo dei centri armonici di grado r del sistema di quegli n punti, rispetto al punto d'incontro colla direttrice, preso come polo (comunque varii la trasversale, purchè s'appoggi sempre alla direttrice), è la superficie $\frac{d^rS}{dt^r}=0$.

Se due superficie $[m,n]$, $[m',n']$ hanno la medesima direttrice e la medesima corrispondenza degli elementi di questa, un punto qualunque comune alle due superficie

*) *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, 19 [Queste Opere, n. **29** (t. 1.°)].

determinerà una generatrice comune. Quindi le due superficie s'intersecheranno lungo $mn'+m'n$ generatrici, quante appunto si ottengono per l'eliminazione di t dalle equazioni $S=0, S'=0$ della forma (1). Dunque la retta multipla equivale ad

$$(m+n)(m'+n')-(mn'+m'n)=mm'+nn'$$

rette comuni; il che s'accorda col concetto che questa direttrice nasca dall'avvicinamento di due rette multiple, secondo i numeri m,n per l'una superficie, ed m',n' per l'altra.

Per la prima definizione della superficie $\frac{dS}{dt}=0$, questa segherà $S=0$ nelle generatrici doppie (siane δ il numero) ed in quelle altre generatrici che coincidono colla direttrice, ed il numero delle quali è $m-n$. Perciò le due superficie avranno in comune altre $m(n-1)+n(m-1)-2\delta-(m-n)=2m(n-1)-2\delta$ rette. A cagione della seconda definizione, tali rette costituiranno il luogo dei punti di contatto fra $S=0$ e tutte le tangenti incontrate dalla direttrice, cioè saranno quelle generatrici lungo ciascuna delle quali la superficie $S=0$ ha un piano tangente fisso. Il numero di queste generatrici singolari può adunque variare fra $2m(n-1)$ e $2(n-1)$: in generale è uguale a $2(g+n-1)$, ove g esprime il genere della superficie.

Se $S=0$ è di genere 0, le sue generatrici si possono ottenere individualmente, segando la superficie data con un fascio di superficie $[m-1, n-1]$ della medesima famiglia (1). In fatti, se una superficie $[m-1, n-1]$, oltre ad avere in comune con $S=0$ la retta multipla e la corrispondenza projettiva degli elementi di questa, passi per le $(m-1)(n-1)$ generatrici doppie e per $2n-3$ generatrici semplici della superficie, e di più abbia comuni con questa le $m-n$ generatrici coincidenti nella direttrice (vale a dire, i medesimi $m-n$ piani seghino le due superficie secondo generatrici coincidenti nella retta multipla), tutto ciò equivarrà ad

$$(m-1)(n-1)+(2n-3)+m-n=(m-1)(n-1)+(m-1)+(n-1)-1$$

condizioni, cioè una di meno di quante determinano una superficie $[m-1, n-1]$.

Poi le due superficie si segheranno secondo

$$m(n-1)+n(m-1)-2(m-1)(n-1)-(2n-3)-(m-n)=1$$

generatrice, che è così individualmente determinata. Le superficie $[m-1, n-1]$ formano un fascio, la cui base è costituita dalle rette nominate e da altre $(m-2)(n-2)$ rette fisse, non appartenenti alla superficie $S=0$.

Qui però si è supposto $n>1$. Se fosse $n=1$, si sostituirebbe al fascio delle superficie $[m-1, n-1]$ un fascio di piani passanti per la retta multipla; ciascuno di essi segherà la superficie secondo una generatrice unica.