# 75.

## SOPRA UNA CERTA CURVA GOBBA DI QUART'ORDINE.

*Rendiconti del R. Istituto Lombardo,* Serie II, volume I (1868), pp. 199-202.

È noto esservi due specie essenzialmente differenti di curve gobbe del 4.° ordine; quella di prima specie nasce dall'intersezione di due superficie quadriche, ed è perciò la base d'un fascio di 2.° ordine; mentre la curva di seconda specie è situata sopra una sola superficie di secondo grado, che è un iperboloide, e può essere ottenuta solamente come intersezione dell'iperboloide con una superficie di terz'ordine, passante per due generatrici di quello, non situate in uno stesso piano *).

Questa nota si riferisce ad un caso particolare della curva di seconda specie: caso che già si è offerto al sig. CAYLEY nello studio di una certa sviluppabile di 6.° ordine e 4.ª classe **), ed anche a me nella ricerca delle curve assintotiche di una superficie gobba di 3.° grado ***).

La curva, della quale si tratta, ha due punti singolari A, D, ne' quali le tangenti AB, DC sono stazionarie (ossia hanno un contatto tripunto colla curva). Siano ABC, DCB i piani osculatori in A, D; e pongansi $x=0, y=0, z=0, w=0$ come equazioni dei piani ABC, ABD, ACD, DCB. Allora la curva sarà rappresentata dalle equazioni semplicissime

$$(1) \qquad x:y:z:w=\omega^4:\omega^3:\omega:1,$$

dove $\omega$ è un parametro, ciascun valore del quale individua un punto della curva.

L'iperboloide passante per la curva ha per equazione

$$(2) \qquad yz-xw=0.$$

*) *Annali di Matematica* (1.ª serie), t. 4 (Roma 1862), p. 71 [Queste Opere, n. **28** (t. 1.°)].

**) *Quarterly Journal of Mathematics*, t. 7, p. 105.

***) *Rend. del R. Istituto Lomb.*, gennajo 1867, p. 22 [Queste Opere, n. **71**].

Vi è poi una superficie di 3.° ordine che passa per la curva e lungo questa è toccata dai piani osculatori della medesima: cioè una superficie di 3.° ordine, per la quale la curva (1) è una linea assintotica. Tale superficie di 3.° ordine è gobba; la sua equazione è

$$xz^2 - wy^2 = 0, \tag{3}$$

per essa la retta AD è la direttrice luogo dei punti doppi, e la retta BC è la direttrice inviluppo dei piani bitangenti *).

Nel punto ($\omega$) la curva (1) è osculata dal piano

$$x - 2\omega y + 2\omega^3 z - \omega^4 w = 0,$$

che la sega inoltre nel punto ($-\omega$). Viceversa il piano osculatore nel secondo punto è segante nel primo punto. I punti della curva sono dunque accoppiati in un'involuzione, gli elementi doppi della quale sono A e D. La retta che unisce due punti conjugati

$$x - \omega^4 w = 0, \quad y - \omega^2 z = 0$$

è divisa armonicamente dalle AD, BC, ed ha per luogo geometrico la superficie (3). Ossia, ciascuna generatrice di questa superficie incontra la curva in due punti conjugati, ed è situata in due piani osculatori conjugati.

Un piano qualsivoglia

$$ax + by + cz + dw = 0$$

sega la curva (1) in quattro punti determinati dall'equazione di 4.° grado

$$a\omega^4 + b\omega^3 + c\omega + d = 0; \tag{4}$$

dunque la condizione che quattro punti ($\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4$) della curva siano in un piano è

$$\omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 + \omega_3\omega_4 + \omega_4\omega_1 + \omega_1\omega_3 + \omega_4\omega_2 = 0. \tag{5}$$

Per un punto ($x_0y_0z_0w_0$) dello spazio passano quattro piani osculatori della curva (1), i cui punti di contatto sono determinati dall'equazione

$$x_0 - 2\omega y_0 + 2\omega^3 z_0 - \omega^4 w_0 = 0; \tag{6}$$

*) *Atti del R. Istituto Lomb.* (1861), v. 2 [Queste Opere, n. **27** (t. 1.°)].

dunque la (5) è anche la condizione che i piani osculatori ne' quattro punti $(\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4)$ abbiano un punto comune. Cioè, se quattro punti della curva sono in un piano $(abcd)$, i quattro piani osculatori nei medesimi concorrono in un punto $(x_0 y_0 z_0 w_0)$, e viceversa.

Dalle (4), (6) si ha

$$a:b:c:d=-w_0:2z_0:-2y_0:x_0,$$

epperò $ax_0+by_0+cz_0+dw_0$ è identicamente nullo. Dunque, se dal punto $(x_0 y_0 z_0 w_0)$ si conducono quattro piani osculatori alla curva (1), i punti di contatto sono in un piano

$$w_0 x-2z_0 y+2y_0 z-x_0 w=0$$

passante pel punto dato; e viceversa, i piani osculatori nei punti comuni alla curva e ad un piano $(abcd)$ concorrono in un punto

$$x_0:y_0:z_0:w_0=2d:-c:b:-2a$$

situato nel piano dato.

Si ha così un sistema polare reciproco (di quella specie che i geometri tedeschi chiamano *Nullsystem)*, nel quale ogni punto giace nel suo piano polare. In questo sistema, ai punti della curva (1) corrispondono i relativi piani osculatori, cioè se il polo descrive la curva, il piano polare inviluppa la sviluppabile osculatrice di essa.

All'iperboloide (2), passante per la curva, corrisponde un altro iperboloide, inscritto nella sviluppabile osculatrice. Il primo di questi iperboloidi è il luogo di un punto pel quale passino quattro piani osculatori equianarmonici *); il secondo è l'inviluppo di un piano che seghi la curva in quattro punti equianarmonici. Il primo iperboloide è anche il luogo delle rette che incontrano la curva in tre punti; ed il secondo è il luogo delle rette per le quali si possono condurre alla curva tre piani osculatori. Dunque ogni punto di una retta appoggiata alla curva in tre punti è l'intersezione di quattro piani osculatori formanti un gruppo equianarmonico; ed ogni piano passante per una retta situata in tre piani osculatori sega la curva in quattro punti equianarmonici.

Se il polo percorre la superficie gobba (3), il piano polare inviluppa la superficie medesima, la quale è ad un tempo il luogo di un punto comune a quattro piani osculatori formanti un gruppo armonico, e l'inviluppo di un piano segante la curva in quattro punti armonici.

---

*) Quattro elementi $pqrs$ di una forma geometrica, projettiva ad una retta punteggiata, diconsi *equianarmonici*, se i rapporti anarmonici dei gruppi $(pqrs)$, $(prsq)$, $(psqr)$ sono eguali fra loro: vale a dire, se è uguale a zero l'invariante quadratico della funzione $(\xi, \eta)^4$ che rappresenta quegli elementi.