77.

RAPPRESENTAZIONE DI UNA CLASSE DI SUPERFICIE GOBBE SOPRA UN PIANO, E DETERMINAZIONE DELLE LORO CURVE ASSINTOTICHE.

Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo I (1868), pp. 248-258.

1. Una superficie gobba sia rappresentata *punto per punto* sopra un piano. Le imagini delle generatrici rettilinee saranno linee di genere 0, formanti un fascio; quindi trasformando di nuovo, punto per punto, il piano in un altro piano, potremo sostituire a quel fascio di linee un fascio di rette.

Siano adunque le generatrici della superficie gobba rappresentate da rette del piano (xyz), passanti per un'origine fissa o. Una sezione piana qualsivoglia della superficie, avendo un solo punto comune con ciascuna generatrice, sarà rappresentata da una curva segante in un punto unico ciascun raggio del fascio o. Dunque, se μ è l'ordine delle curve imagini delle sezioni piane della superficie, esse curve avranno in o un punto $(\mu-1)$-plo, e però saranno di genere 0. Viceversa, è evidente che, se le sezioni piane della superficie sono curve di genere 0, la superficie potrà essere rappresentata punto per punto sopra un fascio piano di rette. Dunque, *affinchè una superficie gobba sia rappresentabile, punto per punto, sopra un piano, è necessario e sufficiente che la superficie sia di genere* 0 (cioè che le generatrici siano individuate da funzioni razionali di un parametro variabile) *).

2. Qui vogliamo occuparci delle superficie gobbe dotate di due direttrici rettilinee M, N, che dapprima supporremo distinte **). Siano m,n i gradi di moltiplicità delle

*) SCHWARZ, *Ueber die geradlinigen Flächen fünften Grades* (G. di Borchardt t. 67).

) CAYLEY, *A second memoir on skew surfaces, otherwise scrolls* (Philos. Transactions 1864, p. 561 e seg.) [*The Collected Mathematical Papers*, vol. V (1892), pp. 201-220]. Vedi anche i miei *Preliminari di una teoria geom. delle superficie*, 57 [Queste Opere, n. **70].

due direttrici; la superficie sarà del grado $m+n$ e (dovendo essere di genere 0) avrà $(m-1)(n-1)$ *generatrici doppie.*

Rappresentiamo M in una retta G del piano (xyz); ed N ne' punti infinitamente vicini all'origine o. Le m generatrici della superficie, uscenti da uno stesso punto di M (e contenute in uno stesso piano per N) avranno per imagini m rette del fascio o; queste incontreranno G in m punti, che tutti corrisponderanno al detto punto della retta multipla M. Tutti gli analoghi gruppi di m punti in G costituiranno un'involuzione di grado m, projettiva a quella che formano i gruppi di m piani tangenti alla superficie ne' vari punti di M. I $2(m-1)$ punti doppi dell'involuzione corrisponderanno ai punti cuspidali che la superficie possiede in M, cioè a quei punti di questa direttrice nei quali due generatrici coincidono. Lungo queste $2(m-1)$ *generatrici singolari* la superficie è toccata da altrettanti piani passanti per N.

Vi sarà poi un'altra involuzione di grado n, costituita dai raggi del fascio o, aggruppati ad n ad n in modo che un gruppo rappresenti le n generatrici uscenti da uno stesso punto di N (e contenute in un piano per M). I punti infinitamente vicini ad o, situati nei raggi del gruppo, corrisponderanno tutti insieme allo stesso punto di N. I $2(n-1)$ elementi doppi di questa involuzione danno i $2(n-1)$ punti cuspidali, che la superficie possiede sulla direttrice N; per essi passano altrettante generatrici singolari, lungo le quali la superficie è toccata da piani per M. Questa seconda involuzione è projettiva a quella che formano i gruppi di piani tangenti nei punti di N.

3. Considerando, in luogo dei raggi per o, i punti ch'essi determinano su G, le due involuzioni hanno $(m-1)(n-1)$ gruppi con due elementi comuni, cioè in G vi sono $(m-1)(n-1)$ coppie di punti tali, che i punti di ciascuna coppia appartengono simultaneamente ad un gruppo della prima e ad un gruppo della seconda involuzione. E però, i punti di siffatta coppia, uniti ad o, danno due raggi che rappresentano insieme una generatrice doppia della superficie.

Siccome un piano qualsivoglia sega M in un punto ed N in un altro punto, così la curva rappresentante una sezione piana segherà G negli m punti di uno stesso gruppo della prima involuzione, ed in o avrà n rami toccati dai raggi di uno stesso gruppo della seconda involuzione; e se μ è l'ordine della curva, questa avrà in o altre $\mu-1-n$ tangenti fisse e segherà G in altri $\mu-m$ punti fissi. Donde segue che, se $m>n$, il numero μ dev'essere almeno uguale ad m; e se $m=n$, il minimo valore di μ è $m+1$.

4. I punti del piano rappresentativo si riferiscano ad un triangolo fondamentale, un vertice del quale $(x=y=0)$ sia in o ed il lato opposto $(z=0)$ sia nella retta G. Siano u, v due forme (binarie) omogenee del grado m in x, y, projettive a due gruppi della prima involuzione; allora un gruppo qualunque della medesima involuzione sarà rappresentato da $cu+ev$ dove c, e sono coefficenti costanti (il cui rapporto è determinato da un punto

della retta M). Similmente, un gruppo qualunque della seconda involuzione sarà rappresentato da $a\omega+b\theta$, dove a,b sono coefficienti costanti (il cui rapporto è determinato da un punto di N), ed ω, θ sono due forme omogenee del grado n in x, y, projettive a due gruppi della involuzione medesima.

Ritenuto $m>n$, potremo rappresentare le sezioni piane della superficie gobba mediante curve d'ordine m, aventi $m-1$ rami incrociati in o, de' quali $m-n-1$ siano toccati da altrettante rette fisse. Ciò equivale ad $\frac{m(m-1)}{2}+m-n-1$ condizioni lineari. Inoltre le altre tangenti in o ed i punti d'intersezione colla retta G devono essere dati da gruppi delle due involuzioni; il che equivale ad altre $(n-1)+(m-1)$ condizioni lineari. Le imagini delle sezioni piane saranno adunque curve d'ordine m, soggette ad $\frac{1}{2}m(m+3)-3$ condizioni lineari comuni; vale a dire, ciascuna di esse sarà determinata linearmente da tre punti, come accade appunto per un piano nello spazio. Due di quelle curve, avendo già in comune un punto $(m-1)$—plo con $m-n-1$ tangenti, si segheranno in altri $m^2-(m-1)^2-(m-n-1)=m+n$ punti, imagini di quelli in cui la superficie è incontrata da una retta nello spazio.

5. L'equazione generale di tali curve conterrà dunque tre parametri arbitrari, cioè sarà della forma:

$$z\varphi(a\omega+b\theta)+cu+ev=0, \tag{1}$$

dove la forma omogenea φ, del grado $m-n-1$ in x, y, rappresenta le tangenti fisse comuni, in o.

Di qui risulta che le coordinate p, q, r, s di un punto qualunque nello spazio potranno essere riferite ad un tale tetraedro fondamentale, che la curva (1) sia l'imagine della sezione fatta nella superficie gobba dal piano:

$$ap+bq+cr+es=0. \tag{2}$$

Perciò la corrispondenza fra i punti della superficie e quelli del piano rappresentativo sarà espressa dalle formole:

$$p:q:r:s=z\varphi\omega:z\varphi\theta:u:v, \tag{3}$$

eliminando dalle quali i rapporti $x:y:z$, si otterrà l'equazione di grado $m+n$ in p, q, r, s, rappresentante la superficie nello spazio.

6. Se nella (1) si fa $a=b=0$, si ottengono m rette $cu+ev=0$, concorrenti in o e seganti la retta $z=0$ ne' punti di un gruppo della prima involuzione. Dunque il piano

$cr+es=0$ sega la superficie secondo m generatrici appoggiate in uno stesso punto alla direttrice M; ossia il piano $cr+es=0$ passa per l'altra direttrice N, qualunque siano c, e.

Analogamente, se nella (1) si fa $c=e=0$, si ottiene una linea composta delle rette $z=0, \varphi=0$ e delle n altre rette $a\omega+b\theta=0$, formanti un gruppo della seconda involuzione. Dunque il piano $ap+bq=0$ sega la superficie secondo n generatrici appoggiate in uno stesso punto alla direttrice N; ossia il detto piano passa per M, qualunque siano a, b.

Donde si riconosce, la scelta delle coordinate p,q,r,s consistere in ciò che le rette M,N sono due spigoli opposti del tetraedro di riferimento.

Mediante le formole (3) potremo studiare sul piano rappresentativo *la geometria delle curve delineate sulla superficie gobba*. Proponiamoci di determinare *le curve assintotiche* della medesima, cioè le curve le cui tangenti sono le rette osculatrici della superficie *).

7. Se la curva

$$\mathrm{Z}\Phi(a\Omega+b\Theta)+c\mathrm{U}+e\mathrm{V}=0 \tag{1$'$}$$

ha un punto doppio, altrove che in o, esso punto giacerà nelle prime polari relative alla curva medesima, e però le sue coordinate x,y,z annulleranno le derivate parziali del primo membro della (1)'. Si hanno così le tre equazioni:

$$\begin{aligned} z\varphi(a\omega_1+b\theta_1)+cu_1+ev_1&=0,\\ z\varphi(a\omega_2+b\theta_2)+cu_2+ev_2&=0,\\ a\omega+b\theta\qquad\qquad\qquad&=0,\end{aligned}$$

dove gli indici 1,2,3 esprimono le derivazioni parziali rispetto ad x,y,z. Da queste equazioni si ricavano i valori de' rapporti $a:b:c:e$

$$\begin{aligned} a&\equiv n\,(u_1v_2-u_2v_1)\theta,\\ b&\equiv n\,(u_2v_1-u_1v_2)\omega,\\ c&\equiv m(\omega_2\theta_1-\omega_1\theta_2)z\varphi v\,,\\ e&\equiv m(\omega_1\theta_2-\omega_2\theta_1)z\varphi u,\end{aligned}$$

sostituendo i quali nella (1)', si otterrà l'equazione di quella curva del sistema (1) che ha due rami incrociati nel punto (xyz). Ora, tale curva si decomporrà manifestamente nella retta $\mathrm{X}y-\mathrm{Y}x=0$ (imagine della generatrice contenuta nel piano (2) che, per l'ipo-

---

*) Cfr. CLEBSCH, *Ueber die Steinersche Fläche* (G. di Borchardt t. 67), e la mia nota sulla *Rappresentazione della superficie di Steiner e delle superficie gobbe di* 3.° *grado sopra un piano* (Rendiconti Ist. Lomb. 1867) [Queste Opere, n. **71**].

tesi fatta, è tangente alla superficie nel punto corrispondente all' (xyz)), ed in una curva d'ordine $m-1$, della quale dobbiamo determinare la direzione nel punto (xyz). L'equazione di questa curva sarà adunque:

$$\Gamma \equiv n(u_1 v_2 - u_2 v_1) Z \Phi \frac{\theta\Omega - \omega\Theta}{Xy - Yx} + mz\varphi(\omega_1\theta_2 - \omega_2\theta_1)\frac{uV - vU}{Xy - Xx} = 0,$$

e la sua direzione nel punto (xyz) sarà espressa dall'equazione differenziale:

$$\gamma_1 dx + \gamma_2 dy + \gamma_3 dz = 0. \tag{4}$$

Ora si ha facilmente:

$$\gamma_1 \equiv (u_1 v_2 - u_2 v_1) z\left(\varphi_1(\omega_1\theta_2 - \omega_2\theta_1) + \frac{1}{2}\varphi(\omega_1\theta_2 - \omega_2\theta_1)_1\right) - \frac{1}{2} z\varphi(\omega_1\theta_2 - \omega_2\theta_1)(u_1 v_2 - u_2 v_1)_1,$$

$$\gamma_2 \equiv (u_1 v_2 - u_2 v_1) z\left(\varphi_2(\omega_1\theta_2 - \omega_2\theta_1) + \frac{1}{2}\varphi(\omega_1\theta_2 - \omega_2\theta_1)_2\right) - \frac{1}{2} z\varphi(\omega_1\theta_2 - \omega_2\theta_1)(u_1 v_2 - u_2 v_1)_2,$$

$$\gamma_3 \equiv (u_1 v_2 - u_2 v_1)\varphi(\omega_1\theta_2 - \omega_2\theta_1).$$

Perciò l'equazione (4) diverrà:

$$2\frac{d\varphi}{\varphi} + \frac{d(\omega_1\theta_2 - \omega_2\theta_1)}{\omega_1\theta_2 - \omega_2\theta_1} + 2\frac{dz}{z} - \frac{d(u_1 v_2 - u_2 v_1)}{u_1 v_2 - u_2 v_1} = 0,$$

donde integrando si ottiene:

$$z^2\varphi^2(\omega_1\theta_2 - \omega_2\theta_1) - k(u_1 v_2 - u_2 v_1) = 0, \tag{5}$$

essendo k una costante arbitraria.

Dunque le curve assintotiche della superficie gobba sono rappresentate sul piano (xyz) da un fascio di curve d'ordine $2(m-1)$, passanti pei $2(m-1)$ punti fissi $(z=0, u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0)$, che sono gli elementi doppi della prima involuzione, ed aventi nell'origine $2(m-1)$ rami, de' quali $2(m-n-1)$ sono toccati a due a due dalle rette $\varphi=0$, mentre gli altri $2(n-1)$ hanno per tangenti le rette $\omega_1\theta_2 - \omega_2\theta_1 = 0$, cioè i raggi doppi della seconda involuzione.

8. Eliminando z fra le equazioni (1) e (5), la risultante, che è del grado $2(m+n-1)$, darà i punti del piano, corrispondenti a quelli ove una curva assintotica è incontrata dal piano (2). Dunque *le curve assintotiche di una superficie gobba* $[m, n]$, *avente due direttrici rettilinee distinte, sono algebriche e dell'ordine* $2(m+n-1)$, *ed incontrano le direttrici ne' relativi punti cuspidali.*

Un raggio qualunque del fascio o incontra la curva (5) in due altri punti, divisi armonicamente da o e da G; dunque ciascuna generatrice della superficie gobba incontra ciascuna curva assintotica in due punti, divisi armonicamente dalle due direttrici. Se la generatrice è singolare, i due punti d'incontro coincidono nel relativo punto cuspidale.

Un piano passante per la direttrice M e per la generatrice singolare appoggiata in uno de' punti cuspidali di M, sega una curva assintotica qualunque (oltre che nel detto punto cuspidale) negli altri $2m-3$ punti cuspidali di M ed in $2(n-1)$ punti situati nelle altre $n-1$ generatrici che giacciono in quel piano. Ora $2(m+n-1)-(2m-3)-2(n-1)=3$; dunque quel punto cuspidale tiene le veci di tre punti comuni alla curva assintotica ed al piano segante. Se ora si conduce un altro piano per la stessa generatrice singolare e per la direttrice N, questo piano sarà tangente alla superficie lungo la detta generatrice e segante secondo altre $m-2$ generatrici; quindi incontrerà la curva assintotica (oltre che nel punto cuspidale di M) nei $2(n-1)$ punti cuspidali di N ed in $2(m-2)$ altri punti distribuiti in quelle generatrici. Ma $2(m+n-1)-2(n-1)-2(m-2)=4$; dunque il punto cuspidale di M vale qui per quattro punti comuni alla curva assintotica ed al nuovo piano. Ciò torna a dire che in ciascun punto cuspidale di M, la curva assintotica ha un contatto tripunto colla relativa generatrice singolare ed un contatto quadripunto col piano passante per questa generatrice e per N. Analogamente, in ciascun punto cuspidale di N, la curva assintotica avrà un contatto tripunto colla relativa generatrice singolare ed un contatto quadripunto col piano passante per questa generatrice e per M. Cioè le curve assintotiche hanno in comune $2(m+n-2)$ tangenti stazionarie ed i relativi punti di contatto (i punti cuspidali della superficie) e piani osculatori.

9. Nella ricerca precedente si è supposto $m>n$, onde abbiamo potuto rappresentare le sezioni piane della superficie gobba con curve d'ordine m. Per abbracciare tutt' i casi possibili, basta assumere, in luogo della (1), l'equazione:

$$z\varphi(a\omega+b\theta)+\psi(cu+ev)=0,$$

dove, come dianzi, ω, θ siano di grado n, ed u, v di grado m; ma φ sia di grado $\mu-n-1$, e ψ un'altra forma omogenenea di grado $\mu-m$ in x, y, corrispondente ai punti fissi di G, comuni a tutte le curve che rappresentano le sezioni piane. In luogo della (5), si ottiene allora, per la imagine delle curve assintotiche, l'equazione:

$$z^2\varphi^2(\omega_1\theta_2-\omega_2\theta_1)-k\psi^2(u_1v_2-u_2v_1)=0,$$

così che l'ordine delle curve assintotiche è ancora il medesimo. In particolare, se $m=n$, potremo porre $\mu=m+1$; φ si riduce ad una costante, e ψ risulta di primo grado.

10. Passiamo ora a considerare il caso che le due direttrici rettilinee, multiple sécondo i numeri m, n, si avvicinino indefinitamente l'una all'altra sino a coincidere in una retta unica M.

Siano $p=0, q=0$ due piani passanti per M, ed $r-s=0$ un piano tangente alla superficie, il cui punto di contatto sia $r=s=0, p-q=0$. Questo piano segherà la superficie secondo la generatrice $p-q=0$ $(r-s=0)$, e secondo una curva d'ordine $m+n-1$ e di genere 0. Supposto m non $<n$, questa curva avrà $m-1$ rami incrociati nel punto $p=q=0$ $(r-s=0)$, e di questi $n-1$ toccati dalla generatrice, che nel detto punto avrà $m+n-2$ intersezioni riunite colla curva. Essendo la curva di genere 0, le sue coordinate si potranno esprimere razionalmente per mezzo di un parametro $x:y$; sia dunque per essa:

$$p-q : p+q : r+s : r-s = w\varepsilon^2 x : w\varepsilon\alpha y : xyt : 0 ,$$

dove w, ε, α, t, sono forme omogenee di x, y, de' gradi $m-n, n-1, n-1, m+n-3$. Si può anche scrivere:

$$p : q : r : s = u\omega : u\theta : v : v , \tag{6}$$

essendosi posto:

$$w\varepsilon = u, \; \alpha y + \varepsilon x = \omega, \; \alpha y - \varepsilon x = \theta, \; xyt = v,$$

donde:

$$2\varepsilon x = \omega - \theta, \; 2\alpha y = \omega + \theta .$$

Ogni valore del rapporto $x : y$ dà un punto della curva; al punto $p=q=0$ $(r-s=0)$ corrispondono le $m-1$ radici dell'equazione $u=0$, ed al punto di contatto della superficie col piano $r-s=0$ corrisponde $x : y=0$. Il piano $r+s=0$ è scelto in modo che passi pei punti corrispondenti ad $x : y=0$, $y : x=0$.

Le generatrici della superficie sono aggruppate (in involuzione) ad n ad n, in modo che quelle di uno stesso gruppo sono contenute in un piano passante per M e concorrono in un punto della direttrice medesima. Per tal modo i piani per M ed i punti di M costituiscono due figure projettive; al piano $p-q=0$ corrisponda il punto $p=q=0$, $r-s=0$; al piano $p+q=0$ corrisponda il punto $p=q=0, r+s=0$, e però al piano $p-\lambda q=0$ corrisponderà il punto:

$$p=q=0, \; (h+\lambda)r-(1+h\lambda)s=0,$$

dove h è una costante, e λ un parametro variabile. Il piano $p-\lambda q=0$ incontra la curva nei punti dati dall'equazione:

$$u(\omega-\lambda\theta)=0,$$

cioè nel punto multiplo ed in altri n punti $\omega-\lambda\theta=0$; in guisa che al punto qualsivoglia:

$$p : q : r : s = u\omega : u\theta : v : v$$

della curva (6) corrisponderà il punto:

$$p : q : r : s = 0 : 0 : h\omega+\theta : \omega+h\theta$$

della retta M.

La retta che unisce questi due punti corrispondenti è una generatrice della superficie. Indicando con z un altro parametro variabile, e con φ una forma (arbitraria) omogenea di grado $m-2$ in x, y, le coordinate di un punto qualsivoglia di quella retta, cioè di un punto qualsivoglia della superficie, saranno:

$$p:q:r:s=u\omega:u\theta:z\varphi(h\omega+\theta)+v:z\varphi(\omega+h\theta)+v,$$

ovvero:

$$p:q:\frac{hr-s}{h-1}:\frac{hs-r}{h-1}=u\omega:u\theta:(h+1)z\varphi\omega+v:(h+1)z\varphi\theta+v.$$

Cambiando $\frac{hr-s}{h-1}$, $\frac{hs-r}{h-1}$, $(h+1)\varphi$ in r, s, φ, avremo finalmente:

$$p:q:r:s=u\omega:u\theta:z\varphi\omega+v:z\varphi\theta+v, \tag{7}$$

dove non è da dimenticarsi che le forme binarie u, v, ω, θ non sono affatto indipendenti fra loro, ma soddisfanno alle relazioni:

$$u=w\varepsilon,\ v=xyt,\ \omega-\theta=2\varepsilon x,\ \omega+\theta=2\alpha y, \tag{8}$$

cioè u ed $\omega-\theta$ hanno un fattor comune di grado $n-1$, e v ha un fattor lineare comune con ciascuna delle forme $\omega-\theta, \omega+\theta$.

11. In virtù delle formole (7), la superficie gobba $[m, n]$ è rappresentata punto per punto sopra un piano, nel quale si considerino le x, y, z come coordinate. Alla sezione fatta nella superficie dal piano:

$$ar+bs+cp+eq=0 \tag{9}$$

corrisponde come imagine la curva d'ordine $m+n-1$:

$$z\varphi(a\omega+b\theta)+(a+b)v+u(c\omega+e\theta)=0, \tag{10}$$

che passa pel punto $x=y=0$ con $m+n-2$ rami, de' quali $m-2$ toccano altrettante rette fisse, mentre le tangenti agli altri rami formano un gruppo di un'involuzione di grado n, projettiva a quella secondo cui le generatrici sono distribuite sulla superficie.

Le generatrici sono rappresentate dalle rette condotte pel punto $x=y=0$ nel piano rappresentativo. Queste rette sono, come or ora si è detto, aggruppate in un'involuzione di grado n; quelle di uno stesso gruppo, $c\omega+e\theta=0$, rappresentano n generatrici situate in uno stesso piano per M e concorrenti in uno stesso punto di M. L'involuzione ha $2(n-1)$ raggi doppi, dati dalla jacobiana $\omega_1\theta_2-\omega_2\theta_1$; essi rappresentano le generatrici singolari (ciascuna delle quali coincide con una generatrice infinitamente vicina), appoggiate alla direttrice M ne' punti cuspidali. La curva (6) ha $(m-1)(n-1)$ punti doppi (e la superficie altrettante generatrici doppie), a ciascun de' quali corrisponderanno due valori distinti del rapporto $x:y$; dunque ciascuna generatrice doppia sarà rappresentata da due rette distinte.

12. La curva:

$$Z\Phi(a\Omega+b\Theta)+(a+b)V+U(c\Omega+e\Theta)=0 \tag{10)'$$

avrà un nodo nel punto $(x\,y\,z)$, se saranno sodisfatte le tre equazioni:

$$\begin{aligned} &z\varphi(a\omega_1+b\theta_1)+(a+b)v_1+c(u\omega)_1+e(u\theta)_1=0,\\ &z\varphi(a\omega_2+b\theta_2)+(a+b)v_2+c(u\omega)_2+e(u\theta)_2=0,\\ &a\omega+b\theta \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad =0, \end{aligned}$$

dalle quali, posto per brevità:

$$\begin{aligned} n\xi&=\omega_1\theta_2-\omega_2\theta_1,\\ (m+n-1)\eta&=(u\theta)_1v_2-(u\theta)_2v_1,\\ (m+n-1)\zeta&=(u\omega)_2v_1-(u\omega)_1v_2, \end{aligned} \tag{11}$$

ed osservando essere:

$$(u\omega)_1(u\theta)_2-(u\omega)_2(u\theta)_1=(m+n-1)u^2\xi,$$

si ricavano i valori de' rapporti $a:b:c:e$

$$\begin{aligned} a&\equiv\ u^2\xi\theta,\\ b&\equiv-u^2\xi\omega,\\ c&\equiv-u\xi\theta z\varphi-(\omega-\theta)\eta\\ e&\equiv\ u\xi\omega z\varphi-(\omega-\theta)\zeta. \end{aligned}$$

Sostituendoli nella (10)', e dividendo il risultato per $Xy-Yx$, si ottiene l'equazione della curva d'ordine $m+n-2$:

$$\Gamma\equiv u\xi(uZ\Phi-z\varphi U)\frac{\theta\Omega-\omega\Theta}{Xy-Yx}-(\omega-\theta)\frac{u^2\xi V+U(\eta\Omega+\zeta\Theta)}{Xy-Yx}=0,$$

la direzione della quale nel punto (xyz) è data dalla equazione differenziale

$$\gamma_1dx+\gamma_2dy+\gamma_3dz=0, \tag{12}$$

dove:

$$\gamma_1 \equiv u\,\xi^2 z(u\varphi_1 - u_1\varphi) + \frac{\omega - \theta}{m+n-1} \cdot \frac{\Delta}{2x},$$

$$\gamma_2 \equiv u\,\xi^2 z(u\varphi_2 - u_2\varphi) - \frac{\omega - \theta}{m+n-1} \cdot \frac{\Delta}{2y},$$

$$\gamma_3 \equiv u^2\xi^2\varphi;$$

essendosi posto per brevità:

$$\Delta = \begin{vmatrix} v_1 & (u\omega)_1 & (u\theta)_1 \\ v_2 & (u\omega)_2 & (u\theta)_2 \\ v_{12} & (u\omega)_{12} & (u\theta)_{12} \end{vmatrix}.$$

Ora si provano facilmente le identità:

$$\frac{\theta - \omega}{u^3\xi^2} \cdot \frac{\Delta}{x} = (m+n-1)\left(\frac{\eta+\zeta}{u^2\xi}\right)_1,$$

$$\frac{\omega - \theta}{u^3\xi^2} \cdot \frac{\Delta}{y} = (m+n-1)\left(\frac{\eta+\zeta}{u^2\xi}\right)_2;$$

per conseguenza avremo:

$$\gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3 = 2z\left(\frac{\varphi}{u}\right)_1 - \left(\frac{\eta+\zeta}{u^2\xi}\right)_1 : 2z\left(\frac{\varphi}{u}\right)_2 - \left(\frac{\eta+\zeta}{u^2\xi}\right)_2 : 2\frac{\varphi}{u},$$

e la (12) diverrà:

$$2d\left(\frac{z\varphi}{u}\right) - d\left(\frac{\eta+\zeta}{u^2\xi}\right) = 0;$$

ossia, avuto riguardo alle (8), (11):

$$d\left(\frac{z\varphi}{u}\right) - d\left(\frac{\varepsilon(w_2v - wv_2) + 2\varepsilon_2 vw}{w^2\varepsilon\xi}\right) = 0.$$

Quindi integrando si ha:

(13) $$z\varphi w\xi + \varepsilon(wv_2 - w_2v) - 2\varepsilon_2 wv = kw^2\varepsilon\xi,$$

k costante arbitraria. Quest'equazione rappresenta un fascio di curve d'ordine $2m+n-3$ e di genere 0, aventi in $x=y=0$ un punto $(2m+n-4)$-plo colle tangenti comuni $\varphi w\xi = 0$, fra le quali si trovano le $m-n$ rette $w=0$ rappresentanti quelle generatrici che coincidono nella direttrice multipla, e le $2(n-1)$ rette $\xi=0$ rappresentanti le generatrici singolari.

13. Eliminando z fra le (7) e la (13) si hanno le equazioni:

$$p \equiv w^2 \xi \omega ,$$

$$q \equiv w^2 \xi \theta ,$$

$$r \equiv \omega (v w_2 - w v_2) + 2 v w \omega_2 + k w^2 \xi \omega ,$$

$$s \equiv \theta (v w_2 - w v_2) + 2 v w \theta_2 + k w^2 \xi \theta ,$$

che danno le coordinate di una curva assintotica per ogni valore di k. Dunque *le curve assintotiche di una superficie gobba* $[m, n]$, *avente le direttrici coincidenti, sono algebriche, di genere* 0 *e d'ordine* $2m+n-2$. Esse hanno in comune i punti corrispondenti all'equazione $w^2 \xi = 0$, cioè toccano la direttrice negli $m-n$ punti ove una generatrice coincide colla direttrice medesima, e la segano nei $2(n-1)$ punti cuspidali. In tutti questi punti comuni hanno le stesse rette tangenti e gli stessi piani osculatori.