78.

SULLE SUPERFICIE GOBBE DI QUARTO GRADO. [139]

Memorie dell'Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, serie II, tomo VIII (1868), pp. 235-250.

1. Scopo di questa Memoria è la determinazione delle differenti specie di superficie gobbe di quarto grado. Una ricerca consimile fu già eseguita dal sig. CAYLEY nella sua *second Memoir on skew surfaces, otherwise scrolls* *), dove l'illustre geometra presenta otto specie e ne dà le definizioni geometriche e le equazioni analitiche. Però egli non indica la via che lo ha condotto a quelle specie, nè dimostra che siano le sole possibili, benchè affermi di non averne trovate altre. Ora a me è riuscito di determinare *dodici* specie differenti di quelle superficie, cioè *quattro* oltre a quelle già notate dal sig. CAYLEY.

Dalla teoria generale delle superficie gobbe **) risulta innanzi tutto che le sezioni piane di una superficie gobba di 4.° grado hanno almeno due punti doppi e al più tre: vale a dire, una superficie siffatta è del *genere* 1 o del *genere* 0. Cominciamo a investigare le specie contenute nel genere 0, come le più semplici: passeremo poi a quelle di genere 1.

Superficie gobbe di 4.° grado spettanti al genere 0.

2. Una superficie gobba di 4.° grado e genere 0 ha in generale una curva doppia di 3.° ordine, e l'inviluppo dei suoi piani bitangenti è conseguentemente ***) una sviluppabile di 3.ª classe (cioè di 4.° ordine). Ogni piano bitangente, contenendo due

*) Philosophical Transactions, 1864.

) Vedi i miei *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie* (t. 6 e 7, seconda serie, delle Memorie dell'Accad. di Bologna), n. 48 e seg. [Queste Opere, n. **70].

***) *Preliminari*, 53.

generatrici, segherà inoltre la superficie secondo una conica; alla quale proprietà corrisponde come correlativa quest'altra, che ogni punto della curva doppia sarà il vertice di un cono quadrico (cioè di 2.° grado), circoscritto alla superficie.

Due coniche, risultanti dal segare la superficie con due piani bitangenti, sono incontrate dalle generatrici in punti che evidentemente formano due *serie projettive* [1, 1] *). Questa osservazione porge il mezzo di costruire effettivamente una superficie dotata delle proprietà suesposte.

Siano infatti C, C' due coniche situate comunque nello spazio, e in piani differenti; e fra i punti dell'una e quelli dell'altra sia data una *corrispondenza* [1, 1]. Per conoscere quale sia il luogo delle rette che congiungono le coppie di punti corrispondenti, si conduca una trasversale arbitraria, che incontri il piano di C in p e quello di C' in q; ed un piano qualsivoglia, passante per pq, seghi C in x, y e C' in u', v'. Variando questo piano intorno a pq, le rette xy, $u'v'$ generano due fasci projettivi di raggi, i cui centri sono i punti p, q. Siccome le coppie di punti xy formano in C un'involuzione, così, se x', y' sono i punti di C' corrispondenti ad x, y, anche le coppie $x'y'$ costituiranno un'involuzione in C'; epperò la retta $x'y'$ girerà intorno ad un punto fisso p', producendo un fascio projettivo a quelli, i cui centri sono p e q. I due fasci p' e q generano una conica, che incontrerà C' in quattro punti, ed è evidente che le quattro rette congiungenti questi punti ai loro corrispondenti in C sono incontrate dalla trasversale pq. Dunque la superficie, luogo di tutte le rette analoghe ad xx', è del 4.° grado.

Poichè si suppone che le coniche C, C', sia per la loro scambievole posizione, sia per la corrispondenza projettiva dei loro punti, siano del tutto generali, così il piano di C conterrà due generatrici, congiungenti i punti, ove C' incontra il piano di C, ai loro corrispondenti; e similmente, il piano di C' conterrà due generatrici, congiungenti i punti, ove C incontra il piano di C', ai loro corrispondenti. Quindi nè la retta comune ai piani di C e C', nè quella che dal punto ove concorrono le due generatrici situate nel piano di C va al punto comune alle due generatrici contenute nel piano di C', sarà situata nella superficie. Ond'è che questa non ha in generale alcuna direttrice rettilinea: cioè il luogo dei punti doppi sarà una curva gobba di 3.° ordine, e l'inviluppo dei piani bitangenti sarà una sviluppabile di 3.ª classe.

Considerando i piani di C, C' come punteggiati collinearmente (omograficamente), in modo che le date coniche projettive siano corrispondenti fra loro, è noto che l'in-

*) Due serie projettive $[m, n]$ di elementi sono per noi due serie tali che a ciascun elemento della 2.ª corrispondono m elementi della 1.ª ed a ciascun elemento della 1.ª ne corrispondono n della 2.ª Dicesi anche che le due serie hanno la *corrispondenza* $[m, n]$.

viluppo di un piano il quale seghi i due piani collineari secondo due rette corrispondenti è una sviluppabile di 3.ª classe (e 4.º ordine). Ma due rette corrispondenti segano C, C' in due coppie di punti corrispondenti; dunque la sviluppabile così ottenuta è l'inviluppo dei piani che contengono coppie di generatrici della superficie gobba, cioè l'inviluppo dei piani bitangenti di questa. Una sviluppabile di 3.ª classe ed una conica hanno in generale sei piani tangenti comuni; ma il piano di C, per esempio, è già un piano tangente della sviluppabile, dunque vi saranno *quattro* piani tangenti della sviluppabile che toccheranno anche C, epperò anche C'; cioè la superficie gobba ha *quattro generatrici singolari*, lungo ciascuna delle quali il piano tangente è costante.

Correlativamente, due punti doppi della superficie gobba sono i vertici di due coni quadrici circoscritti, i cui piani tangenti, passando a due a due per le generatrici della superficie, formano due serie projettive. Cioè la medesima superficie si può costruire come luogo delle rette comuni ai piani tangenti corrispondenti di due coni quadrici projettivi. Le stelle formate da tutte le rette passanti per l'uno o per l'altro vertice, si considerino come collineari in modo che i due coni anzidetti si corrispondano fra loro. Si sa che il luogo dei punti ne' quali si segano raggi corrispondenti di due stelle collineari è una cubica gobba; e siccome due raggi corrispondenti nascono dall'intersezione di due coppie di piani tangenti corrispondenti dei due coni, così in ciascun punto della cubica s'incontrano due generatrici della superficie gobba: ossia la cubica è la curva doppia della superficie. La curva doppia ha *quattro punti cuspidali*, cioè quattro punti in ciascuno dei quali le due generatrici coincidono, dando così origine alle generatrici singolari summenzionate: tali quattro punti sono quelli ove la cubica gobba incontra simultaneamente i due coni.

Questa forma generale della superficie di 4.º grado e genere 0 sarà per noi la 1.ª specie *). Ne è un caso particolare il luogo delle rette che uniscono i punti corrispondenti di due serie projettive [1, 1], date sopra una stessa cubica gobba, la quale risulta appunto essere la curva doppia della superficie **).

3. Supponiamo ora che la conica C' si riduca ad una retta doppia R, cioè la superficie sia individuata per mezzo di due serie projettive [1, 2] di punti sopra una retta R ed una conica C, situate comunque nello spazio (non aventi alcun punto comune). Da ciascun punto x di R partono due generatrici, dirette ai punti corrispondenti x', x_1 della conica C; e così pure, ogni piano per R, incontrando C in due punti x', y', contiene le due generatrici $x'x, y'y$ (ove x, y siano i punti di R che corrispondono

*) Questa superficie fu già considerata dal sig. CHASLES (Comptes rendus 3 giugno 1861).

) Annali di Matematica (1.ª serie) t. 1, pag. 292-93 [Queste Opere, n. **9 (t. 1.º)]. I punti *uniti* delle due serie sono punti cuspidali della superficie; e le relative tangenti della cubica gobba sono generatrici singolari, lungo le quali la superficie ha il piano tangente costante.

ad x', y'). Dunque la retta R, come luogo di punti, è una porzione della curva doppia; e come inviluppo di piani, fa parte della sviluppabile bitangente.

Movendosi x in R, i punti x', x_1 formano in C un'involuzione, epperò la retta $x'x_1$ passa per un punto fisso o *). La retta che unisce o alla traccia r di R (sul piano di C) è dunque la traccia di un piano che passa per R e contiene due generatrici incrociate in un punto a di R: ond'è che il luogo dei punti d'intersezione delle coppie di generatrici, come xx' ed yy' (essendo x', y' in linea retta con r), sarà una conica H, appoggiata ad R nel punto a, ed a C in due punti (quelli ove C è nuovamente incontrata dalle generatrici rr', rr_1) **). E correlativamente, l'inviluppo dei piani bitangenti, analoghi ad $xx'x_1$, sarà un cono quadrico K di vertice o, un piano tangente del quale, cioè $aa'a_1$, passa per R.

Questa superficie, la cui curva doppia è composta della retta R e della conica H, e la cui sviluppabile bitangente è costituita dalla retta R e dal cono K, sarà la nostra 2.ª specie ***).

Risulta dalle cose precedenti che la superficie medesima si può risguardare anche come il luogo delle rette appoggiate alla retta R ed alle coniche C, H, la seconda delle quali abbia un punto comune colla retta direttrice e due punti comuni colla prima conica; ovvero come luogo delle rette che congiungono i punti corrispondenti di due serie projettive [2, 2] date nella retta R e sulla conica H, purchè il punto comune a queste linee corrisponda (soltanto) a sè medesimo.

4. Suppongasi ora che la retta R e la conica C, i cui punti hanno fra loro la corrispondenza [1, 2], abbiano un punto comune, ma non unito: cioè, chiamando r questo punto come appartenente ad R, corrispondano ad esso due altri punti r', r_1 di C; e chiamandolo a' come punto di C, gli corrisponda un altro punto a di R. Allora per un punto qualunque x di R passano tre generatrici xx', xx_1 ed aa', delle quali l'ultima coincide colla stessa R; e un piano condotto ad arbitrio per R contiene due generatrici xx' ed aa', una delle quali coincide ancora con R. Non vi sono adunque altri punti doppi, fuori di R; bensì vi sono piani bitangenti, come $xx'x_1$, che non passano per R, ma inviluppano (come dianzi) un cono quadrico K.

*) Si stabilisce la corrispondenza [1, 2] fra i punti di R e quelli di C, rendendo la punteggiata R projettiva al fascio di raggi per o.

**) La superficie ha due punti cuspidali in R (quelli che corrispondono ai punti di contatto di C colle sue tangenti da o) e due punti cuspidali in H (quelli che corrispondono ai punti di contatto di C colle sue tangenti da r).

***) Questa è la 7.ª specie CAYLEY. Si ha una sottospecie quando il punto o sia coniugato armonico di r rispetto a C, vale a dire, quando l'intersezione dei piani di C, H sia la polare di r rispetto a C. Allora le generatrici che s' incontrano determinano su R ed H due involuzioni projettive.

Dunque la curva doppia è ora ridotta alla retta tripla R; e la sviluppabile bitangente è composta della retta R e del cono K. E questa sarà la 3.ª specie.

5. Nelle prime due specie, esiste *correlazione* perfetta fra il luogo dei punti doppi e l'inviluppo dei piani bitangenti; ond'è che, se a quelle si applica il principio di dualità, si ottengono di nuovo superficie delle medesime specie. Non così per la 3.ª specie; ed è perciò che qui determineremo addirittura una 4.ª specie, come correlativa alla 3.ª

In essa, il luogo dei punti doppi sarà il sistema di una retta R e di una conica H, aventi un punto comune a; ma la sviluppabile bitangente sarà qui ridotta alla retta R come inviluppo di piani tritangenti.

Si ottiene una superficie così fatta, assumendo due serie projettive [2, 1] di punti in una retta R ed in una conica H *), che si seghino in un punto a: purchè questo, risguardato come punto di H, coincida con uno de' due corrispondenti in R: sia a' l'altro punto corrispondente.

Allora per ciascun punto x' di R passeranno due generatrici $x'x, aa'$, la seconda delle quali coincide sempre con R; ed ogni punto x di H sarà comune a due generatrici distinte xx', xx_1, ove x', x_1 siano i punti di R corrispondenti ad x. Qualunque piano passante per R segherà la superficie secondo tre generatrici xx', xx_1, aa', delle quali l'ultima è sovrapposta alla direttrice R.

6. Nella 2.ª specie, la conica doppia H si decomponga in due rette R', S, aventi un punto comune, ritenendo ancora che R seghi H cioè l'una, S, delle due rette nelle quali H si è decomposta. Ossia, suppongasi d'avere una corrispondenza [2, 2] fra i punti di due rette R, R', non situate in uno stesso piano: a condizione che ciascuno dei punti ove R, R' sono incontrate da un'altra retta data S, corrisponda a due punti riuniti nell'altro **). La superficie, luogo delle rette che uniscono i punti corrispondenti di R, R', sarà la 5.ª specie ***).

Un punto qualunque di R è comune a due generatrici situate in un piano passante per R'; e similmente, da ogni punto di R' si staccano due generatrici, il cui

*) Per istabilire due serie projettive [2, 1] in una retta ed in una conica, basta assumere un'involuzione di punti nella retta, determinando questi p. e. per mezzo di un fascio di cirferenze descritte in un piano passante per la retta; e quindi far corrispondere i segmenti dell'involuzione, ossia le circonferenze del fascio, ai raggi che projettano i punti della conica da un punto fissato ad arbitrio nella medesima.

**) Si ottiene una corrispondenza di questa natura segnando sopra due tangenti fisse di una curva piana di 3.ª classe e di 4.° ordine (p. e. un'ipocicloide tricuspide) le intersezioni colle altre tangenti della medesima curva: e quindi trasportando le due prime tangenti nello spazio. Di qui si vede che la superficie avrà due punti cuspidali in ciascuna delle rette R, R'.

***) Questa è la 2.ª specie CAYLEY.

piano passa per R. La retta S è una *generatrice doppia*. I soli piani passanti per S segano la superficie secondo coniche; ed i soli punti di S sono vertici di coni quadrici circoscritti.

Le tre rette R, R' ed S, come luoghi di punti, costituiscono la curva doppia; e come inviluppi di piani, costituiscono la sviluppabile bitangente.

La medesima superficie si ottiene come luogo delle rette appoggiate a tre direttrici, le quali siano due rette R, R' ed una conica C, non aventi punti comuni a due a due, oppure due rette R, R' ed una cubica gobba segante ciascuna retta in un punto *): ovvero anche si può dedurre dalla specie 2.ª, supponendo che la retta $or'r_1$ passi per r. Supponiamo cioè che fra i punti di una retta R e di una conica C (non aventi punti comuni) esista una corrispondenza [1,2], e che al punto r, ove R incontra il piano di C, corrispondano in C due punti r', r_1 in linea retta con r. Il luogo delle rette che uniscono un punto x di R ai punti corrispondenti x', x_1 è la superficie di cui si tratta; la seconda direttrice rettilinea R' passa pel punto o, comune a tutte le corde $x'x_1$; ed $rr'r_1$ è la generatrice doppia S.

I piani passanti per S segano la superficie secondo coniche, e la toccano in coppie di punti i quali coincidono soltanto quando cadono in R o in R' **). Dunque la superficie può essere considerata come luogo delle rette congiungenti i punti corrispondenti di due serie projettive [1, 1], date in due coniche C, C', purchè ai punti ove C sega la retta comune ai piani delle due coniche corrispondano i due punti d'intersezione di C' colla medesima retta: la quale risulta così una generatrice doppia.

7. Imaginiamo ora che, nell'ultima costruzione, il punto o si avvicini infinitamente ad r sino a coincidere con esso. Allora le due direttrici rettilinee coincidono in una retta unica R; e la superficie può definirsi come segue. I punti di R ed i piani per R abbiano fra loro la corrispondenza [1, 1]; il piano corrispondente ad un punto x di R incontri la conica C ne' punti x', x_1; le rette xx', xx_1 saranno generatrici della superficie. La generatrice doppia S è ora l'intersezione del piano di C con quel piano che passa per R e corrisponde al punto r.

Questa sarà la 6.ª specie ***). La curva doppia e la sviluppabile bitangente sono rappresentate dalla retta R (contata due volte) e dalla retta S.

*) Annali di Matematica l. c. p. 291-92.

**) Di qui segue che se una delle coniche risultanti è tangente ad S, tutte avranno la stessa proprietà. In questo caso particolare i piani per S, in luogo d'essere bitangenti, sono tutti stazionari; ed in ogni punto di S i due piani tangenti della superficie coincidono. Invece, nel caso generale, per ogni punto di S passano due coniche, le cui tangenti in quel punto determinano con S due piani tangenti. La medesima osservazione vale per la specie 6.ª

***) È la 5.ª specie CAYLEY.

8. Il procedimento generale per formare una superficie gobba d'ordine n consiste nell'unire fra loro i punti corrispondenti di due serie projettive [1, 1], date in due linee piane che possano (prese da sole o insieme con rette generatrici) costituire due sezioni della superficie richiesta. Abbiamo ottenuta la 2.ª specie assumendo due coniche: ora supponiamo invece che la corrispondenza [1, 1] esista fra i punti di una retta R e quelli di una curva piana L_3, dotata di un punto doppio o *). Il luogo delle rette che uniscono i punti corrispondenti x ed x' di R e di L_3 sarà di nuovo una superficie di 4.° grado **).

Da un punto qualunque x di R parte una sola generatrice xx'; ma ciascun piano passante per R, segando L_3 in tre punti x'_1, x'_2, x'_3, conterrà le tre generatrici $x_1x'_1$, $x_2x'_2$, $x_3x'_3$. Siccome queste tre rette determinano un solo piano tritangente e (in generale) tre punti doppi, così la sviluppabile bitangente è rappresentata dalla sola retta R (come inviluppo di piani tritangenti), ed il luogo dei punti doppi è una cubica gobba. Supposto che al punto r, traccia di R sul piano della curva L_3, corrisponda in questa il punto r' e che la retta rr' incontri di nuovo la curva in u, v, saranno o, u, v punti della cubica gobba.

Questa superficie, che sarà la 7.ª specie ***), si può anche ottenere come luogo di una retta che si muova appoggiandosi ad una data retta R ed incontrando due volte una cubica gobba. Per la superficie così definita, la retta R è una direttrice semplice e la cubica gobba è la curva doppia: infatti, da ciascun punto di R parte una sola corda della cubica gobba, ed ogni piano per R contiene tre corde; mentre un piano passante per un punto della cubica e per R sega la cubica in altri due punti, che uniti al primo danno due generatrici.

9. Applicando alla superficie precedente il principio di dualità, avremo una nuova specie, che sarà l'8.ª Qui la superficie avrà una retta tripla R, cioè una retta da ciascun punto della quale partono tre generatrici: mentre ogni piano per essa darà una sola generatrice. La retta R rappresenta dunque essa sola la curva doppia. Le tre generatrici che s'incrociano in un punto qualunque di R, determinano tre piani, il cui inviluppo sarà una effettiva sviluppabile di terza classe (e 4.° ordine); e questa è la sviluppabile bitangente della superficie gobba, che ora si considera.

Questa specie si può definire il luogo di una retta che si muova incontrando una retta fissa R e toccando in due punti una data sviluppabile di 4.° ordine; ovvero il luogo delle rette che uniscono i punti corrispondenti in due serie projettive [1, 3],

*) Si ottiene questa corrispondenza, rendendo la punteggiata R projettiva al fascio de' raggi che projettano i punti di L_3 dal nodo o.

**) *Preliminari*, 54.

***) È l'8.ª specie CAYLEY.

date sopra una retta R ed una conica C, aventi un punto comune a: purchè uno dei tre punti di C corrispondenti al punto a di R coincida collo stesso punto a *).

La medesima superficie si può anche dedurre dalla 1.ª specie. Assumansi cioè due coniche C, C', i cui punti abbiano fra loro una corrispondenza [1, 1]; siano ab, $c'd'$ i punti in cui le coniche C, C' incontrano rispettivamente i piani di C', C; siano $a'b'$, cd i punti di C', C ordinatamente corrispondenti a quelli; e suppongasi che le rette aa', bb' si seghino in un punto e' di C', e le $c'c$, $d'd$ si seghino in un punto f di C. Allora i punti e', f, ne' quali concorrono rispettivamente le tre generatrici aa', bb', ee', e $c'c$, $d'd$, $f'f$ saranno tripli per la superficie. Segue da ciò che le generatrici, invece di segarsi a due a due sopra una cubica gobba, come nel caso generale (1.ª specie), s'incontrano ora a tre a tre nei punti di una retta tripla R: continuando l'inviluppo dei piani bitangenti ad essere una sviluppabile di terza classe.

Come l'8.ª specie si ricava dalla 1.ª, così, in virtù del principio di dualità, la 7.ª potrà ricavarsi dalla medesima 1.ª specie: al quale uopo basterà risguardare la superficie come luogo delle rette comuni ai piani corrispondenti in due serie projettive [1, 1] di piani tangenti a due coni quadrici.

10. La 9.ª specie **) si deduce dalla 7.ª, supponendo che la cubica gobba, luogo dei punti doppi, si riduca ad una retta tripla R'. La superficie è in questo caso il luogo delle rette che uniscono i punti corrispondenti di due serie projettive [3, 1] in due rette R, R' ***). Ciascun piano per R contiene tre generatrici concorrenti in un punto di R'; e viceversa in ogni punto di R' s'incrociano tre generatrici, situate in uno stesso piano che passa per R. Da ciascun punto di R parte una sola generatrice; e così pure ogni piano per R' contiene una generatrice unica. Cioè la retta R, come inviluppo di piani tritangenti, rappresenta la sviluppabile bitangente; e la retta R', come luogo di punti tripli, fa le veci della curva doppia.

Questa superficie si può costruire come luogo delle rette che uniscono i punti corrispondenti di due serie projettive [1, 1], date in una retta R ed in una cubica piana, dotata di un punto doppio o, purchè alla traccia r di R (sul piano della cubica) corrisponda un tal punto r' della cubica che la retta rr' passi per o. Allora un piano qualunque condotto per R, segando la cubica in tre punti x'_1, x'_2, x'_3, contiene tre generatrici $x_1x'_1$, $x_2x'_2$, $x_3x'_3$, concorrenti in uno stesso punto, il luogo del quale è una retta (tripla) R', passante per o †).

*) Si ottiene questa corrispondenza rendendo la punteggiata R projettiva ad un fascio di coniche (nel piano di C) passanti per quattro punti fissi, uno de' quali sia preso in C.

**) 3.ª specie CAYLEY.

***) Si ottengono queste serie segando colla retta R un fascio di cubiche piane, projettivo alla punteggiata R'.

†) Siccome la cubica è di 4.ª classe, così la superficie avrà quattro punti cuspidali in R'.

11. Se in quest'ultima costruzione, si fa coincidere il punto r col punto o, coincideranno le rette R ed R'; e si avrà la specie 10.ª *). Una retta R è appoggiata ad una cubica piana nel punto doppio o, ed è stabilita una corrispondenza [1, 1] fra i punti x di R ed i raggi che projettano da o i punti x' della cubica: il luogo delle congiungenti xx' è la superficie di cui si tratta. Il piano della cubica contiene una generatrice che è la retta tirata dal punto o di R al corrispondente punto o' della curva. Se si chiamano o_1, o_2 i punti di R ai quali corrispondono le tangenti della cubica nel punto doppio, le generatrici $o_1o'_1, o_2o'_2$ coincidono colla stessa direttrice R. Ne segue che questa retta, come luogo di punti tripli, fa le veci della curva doppia, e come inviluppo di piani tritangenti rappresenta la sviluppabile bitangente. Infatti, ciascun punto x di R è comune a tre generatrici $xx', o_1o'_1, o_2o'_2$, e ciascun piano per R, segando la cubica in x', contiene del pari tre generatrici xx', $o_1o'_1, o_2o'_2$: due delle quali coincidono sempre colla direttrice. Nei punti o_1, o_2 tutte e tre le generatrici coincidono con R.

Superficie gobbe di 4.° grado spettanti al genere 1.

12. Tutte le linee non multiple ed incontrate una sola volta da ciascuna generatrice (eccettuate le rette generatrici) esistenti in una superficie gobba di genere m sono dello stesso genere m; infatti due linee così fatte si possono risguardare come punteggiate projettivamente ([1, 1]), per mezzo delle generatrici **). Perciò una superficie gobba di genere 1 non può contenere nè rette direttrici semplici nè curve semplici di 2.° ordine, nè cubiche piane con un punto doppio, nè curve piane di 4.° ordine, dotate di un punto triplo o di tre punti doppi. Il luogo dei punti doppi dev'esser tale che un piano qualunque lo seghi in due punti: ma non può essere una curva piana, perchè in tal caso il piano determinato da due generatrici uscenti da uno stesso punto doppio della superficie segherebbe questa secondo una conica. La superficie non conterrà adunque coniche nè semplici, nè doppie: epperò il luogo de' suoi punti doppi sarà un paio di rette R, R', cioè la superficie avrà due rette direttrici doppie ***).

Il caso che le due direttrici siano distinte costituirà la nostra 11.ª specie †). Abbiasi fra i punti di due rette R, R' (non situate in uno stesso piano) la corrispon-

*) È la 6.ª specie CAYLEY.

**) *Preliminari*, 54, 55. — SCHWARZ, *Ueber die geradlinigen Flächen fünften Grades* (G. Crelle-Borchardt t. 67).

***) Viceversa, ogni superficie di 4.° ordine con due rette doppie è gobba: infatti, qualsivoglia piano passante per l'una delle due rette sega la superficie secondo una conica dotata di un punto doppio (nell'incontro del piano coll'altra retta doppia), cioè secondo due rette.

†) La 1.ª specie CAYLEY.

denza [2, 2] *); e il luogo delle rette che uniscono le coppie di punti corrispondenti sarà la superficie di cui qui si tratta. Da ciascun punto di R partiranno due generatrici situate in un piano passante per R'; e così pure, ogni piano per R conterrà due generatrici concorrenti in un punto di R'. Donde segue che il sistema delle due rette R, R', come luogo di punti, costituisce la curva doppia, e come inviluppo di piani rappresenta la sviluppabile bitangente.

La 5.ª specie differisce dall'attuale in ciò, che questa non è, come quella, dotata di una generatrice doppia.

La medesima superficie si può anche costruire come luogo delle rette appoggiate a due rette direttrici R, R' e ad una cubica piana (generale, senza punto doppio), la quale sia incontrata in un punto da ciascuna retta direttrice; ovvero come luogo delle rette che uniscono i punti corrispondenti in due serie projettive [1, 2] date in una retta R ed in una cubica piana (senza punto doppio), la quale abbia con R un punto comune r: supposto però che uno de' due punti della cubica corrispondenti al punto r di R coincida collo stesso r **).

13. Finalmente, si avrà la 12.ª specie ***) supponendo che nel n.° precedente le rette R, R' siano infinitamente vicine. Una medesima retta R, doppia come luogo di punti e come inviluppo di piani, rappresenta la curva doppia e la sviluppabile bitangente. Si ottiene questa superficie, come luogo delle rette che uniscono un punto x di una retta R ad un punto x' di una cubica piana (senza punto doppio), appoggiata ad R in un punto r: supposto che il punto x ed il raggio r_1x' (dove r_1 sia il punto della cubica infinitamente vicino ad r) variino generando una punteggiata ed un fascio projettivi; e che al punto r della punteggiata corrisponda come raggio del fascio la retta r_1rr'' tangente alla cubica in r (e segante in r''). Allora ciascun punto x di R sarà comune a due generatrici xx', xx'', contenute in uno stesso piano con R: essendo x', x'' i punti ove la cubica è incontrata dal raggio del fascio r_1, che corrisponde al punto x. Il piano della cubica contiene le generatrice r_1rr'' ed è tangente in r''.

Le due specie 11.ª e 12.ª si possono anche ottenere come luogo delle rette che uniscono i punti corrispondenti di due cubiche piane di genere 1, punteggiate pro-

*) Si stabilisce questa corrispondenza come si è detto al n.° 6, assumendo però una curva piana di 3.ª classe, senza tangente doppia. Ne risulta che la superficie avrà quattro punti cuspidali in ciascuna direttrice.

**) Si ottiene questa corrispondenza assumendo la punteggiata R projettiva al fascio di raggi che projettano i punti della cubica da un punto fisso r_1 della medesima, in modo però che al punto r corrisponda il raggio r_1r. Il punto r_1 è la traccia di R'.

***) La 4.ª specie CAYLEY.

jettivamente, purchè due punti (infinitamente vicini nel caso della 12.ª specie) dell'una curva coincidano coi rispettivi punti corrispondenti nell'altra *).

14. In via di riassunto, porremo qui una tabella ove sono simboleggiate le dodici specie. *Come carattere di ciascuna specie assumiamo la simultanea considerazione della curva doppia e della sviluppabile bitangente.* Nella tabella conserviamo le notazioni già adoperate, cioè indichiamo con R, R', S delle rette; con H una conica, e con K un cono: inoltre designeremo con Γ una cubica gobba e con Σ una sviluppabile di terza classe. L'esponente apposto al simbolo di una retta indica quante volte questa dev'essere contata nel numero che dà l'ordine della curva gobba o la classe della sviluppabile bitangente.

---

*) Per poter punteggiare projettivamente due cubiche piane di genere 1 è necessario e sufficiente che siano uguali i loro rapporti anarmonici. SCHWARZ, l. c. — CLEBSCH e GORDAN, *Theorie der Abelschen Functionen* (Leipzig 1866) p. 76.

Classificazione delle superficie gobbe di 4.° grado.

Genere 0.	Curva doppia Ordine = 3	Sviluppabile bitangente Classe = 3
1.ª specie	Γ 3	Σ 3
2.ª »	$H+R$ $2+1$	$K+R$ $2+1$
3.ª »	R^3 1×3	$K+R$ $2+1$
4.ª »	$H+R$ $2+1$	R^3 1×3
5.ª »	$R+R'+S$ $1+1+1$	$R+R'+S$ $1+1+1$
6.ª »	R^2+S $1\times2+1$	R^2+S $1\times2+1$
7.ª »	Γ 3	R^3 1×3
8.ª »	R^3 1×3	Σ 3
9.ª »	R^3 1×3	R'^3 1×3
10.ª »	R^3 1×3	R^3 1×3
Genere 1.	Curva doppia Ordine = 2	Sviluppabile bitangente Classe = 2
11.ª specie	$R+R'$ $1+1$	$R+R'$ $1+1$
12.ª »	R^2 1×2	R^2 1×2

Milano, aprile 1868.