72.

UN TEOREMA
INTORNO ALLE FORME QUADRATICHE NON OMOGENEE
FRA DUE VARIABILI.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie I, volume IV (1867), pp. 199-201.

Sia

$$\begin{aligned} F(x, y) &\equiv y^2(ax^2+2bx+c) + 2y(a'x^2+2b'x+c') + a''x^2+2b''x+c'' \\ &\equiv x^2(ay^2+2a'y+a'')+2x(by^2+2b'y+b'') + cy^2 + 2c'y+c'' \end{aligned}$$

la forma quadratica proposta. Siano

$$\begin{aligned} X(x) &\equiv (ax^2+2bx+c)\ (a''x^2+2b''x+c'')-(a'x^2+2b'x+c')^2, \\ Y(y) &\equiv (ay^2+2a'y+a'')\,(cy^2+2c'y+c'')-(by^2+2b'y+b'')^2 \end{aligned}$$

i due discriminanti della forma F, cioè sia

$$X(x)=0$$

la condizione perchè l'equazione $F=0$ dia due valori uguali per y, e sia

$$Y(y)=0$$

la condizione perchè l'equazione $F=0$ dia due valori uguali per x *).

Il teorema che qui voglio far notare (ignoro se sia mai stato enunciato) è il seguente. Risguardando $X(x)$ ed $Y(y)$ come due forme biquadratiche, cioè posto:

$$\begin{aligned} X(x) &\equiv dx^4+4ex^3+6fx^2+4gx+k, \\ Y(y) &\equiv \delta y^4+4\varepsilon y^3+6\varphi y^2+4\gamma y+\varkappa, \end{aligned}$$

---

*) È noto che $F(x, y)=0$ è un integrale dell'equazione differenziale

$$\frac{dx}{\sqrt{X(x)}} \pm \frac{dy}{\sqrt{Y(y)}} = 0.$$

le due forme hanno eguali invarianti, vale a dire si ha:

$$dk - 4eg + 3f^2 = \delta\varkappa - 4\varepsilon\gamma + 3\varphi^2,$$

$$dfk + 2efg - dg^2 - ke^2 - f^3 = \delta\varphi\varkappa + 2\varepsilon\varphi\gamma - \delta\gamma^2 - \varkappa\varepsilon^2 - \varphi^3.$$

La verificazione diretta di queste eguaglianze non presenta alcuna difficoltà. Io preferisco osservare che, se si dà ad x, y il significato di coordinate ordinarie, la equazione $F = 0$ rappresenta una curva di quart'ordine avente due punti doppi all'infinito sugli assi coordinati. Ponendo l'origine in un punto della curva (il che equivale a fare $c'' = 0$), e cambiando x, y in $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$, la curva si trasformerà, punto per punto, in un'altra del terzo ordine, passante pei punti all'infinito sugli assi. Allora la equazione $X\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ rappresenterà evidentemente le quattro tangenti della curva di terz'ordine, parallele all'asse $x = 0$; ed analogamente $Y\left(\frac{1}{y}\right) = 0$ sarà l'equazione del sistema delle quattro tangenti parallele all'altro asse. Ma è noto che gli invarianti della forma biquadratica binaria, che rappresenta le quattro tangenti condotte ad una curva di terz'ordine da un suo punto qualunque, sono uguali *) agli invarianti della forma cubica ternaria rappresentante la curva; dunque ha luogo la proprietà enunciata.

*) Astrazion fatta da coefficienti *numerici*, che si possono anche ridurre all'*unità*, modificando la definizione degli invarianti della forma ternaria.