63.

SUR L'HYPOCYCLOÏDE À TROIS REBROUSSEMENTS.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 64 (1864), pp. 101-123.

1. On sait que l'illustre STEINER a énoncé (sans démonstration) des théorèmes très nombreux relatifs à une certaine courbe de la troisième classe et du quatrième ordre (tome 53 de ce journal, p. 231). Je crois qu'il ne sera pas sans intérêt de voir ces propriétés si élégantes découler tout naturellement de la théorie générale des courbes planes du troisième degré (ordre ou classe), qui a été établie principalement par les beaux travaux de MM. HESSE et CAYLEY *). Cette manière d'envisager la question mettra en évidence le lien naturel qui enchaîne toutes ces propriétés, en apparence si différentes, et fera aussi connaître quelques résultats nouveaux.

La courbe, dont il s'agit dans le mémoire cité de STEINER, passe par les points circulaires à l'infini et a une tangente double, qui est la droite à l'infini. Mais les mêmes théorèmes continuent de subsister pour une courbe quelconque du même ordre et de la même classe: il n'y a presque rien à changer, même aux démonstrations. Il suffit seulement de substituer deux points fixes quelconques aux points circulaires à l'infini: ce qui revient à faire une transformation homographique. Les cercles seront alors surrogés par des coniques passant par les points fixes; au lieu des fonctions trigonométriques d'un angle, on aura certaines fonctions du rapport anharmonique d'un faisceau, dont deux droites soient dirigées aux points fixes **); etc.

*) Voir les tomes 36 et 38 de ce journal; tomes 9 et 10 du journal de M. LIOUVILLE (1e série), et vol. 147, part 2e, des *Philosophical Transactions*. On trouvera l'exposition géométrique de cette théorie dans mon *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (Bologna 1862) [Queste Opere, n. **29** (t. 1.°)], à laquelle je renverrai souvent le lecteur.

**) Si P, Q sont les asymptotes d'un cercle dont le centre soit à l'intersection de deux droites M, N, on sait que le rapport anharmonique du faisceau MNPQ est $\cos 2(MN) - i \sin 2(MN)$. (CHASLES, *Géométrie supérieure*, p. 125).

Comme il n'y a pas, au fond, plus de généralité à considérer ces points fixes quelconques au lieu des points circulaires à l'infini, je retiendrai la même courbe qui a été l'objet des recherches de STEINER: ce qui me permettra d'user un langage plus concis et plus expéditif.

2. Soit donc C^3 une courbe de la troisième classe (et du quatrième ordre), qui soit tangente à la droite à l'infini, en deux points ω, ω', situés sur un cercle quelconque.

Toute droite G qui soit tangente à C^3 en un point g, coupera cette courbe en deux autres points k, k'. La droite à l'infini étant une tangente double de la courbe, celle-ci n'admet qu'une seule tangente ayant une direction donnée; donc, si l'on fait varier G, les droites tangentes en k, k', détermineront sur la droite à l'infini une involution, dont les points doubles sont ω, ω'. Il s'ensuit que les tangentes en k, k' sont *perpendiculaires*.

Ainsi les tangentes de notre courbe sont conjuguées par couples: deux tangentes conjuguées sont perpendiculaires, et leurs points de contact sont situées sur une troisième tangente.

3. Les propriétés des tangentes conjuguées de cette courbe de troisième classe correspondront, par la loi de dualité, aux propriétês des points conjugués d'une courbe de troisième ordre; donc:

La tangente perpendiculaire à G passe par le point commun aux tangentes en k, k (*Introd.* 133).

4. Si trois tangentes G, H, I passent par un même point, les tangentes G', H', I' perpendiculaires respectivement à celles-là, forment un triangle dont les sommets sont situés sur G, H, I (Introd. 134), c'est-à-dire un triangle, dont G, H, I sont les hauteurs. Autrement: si GG', HH' sont deux couples de tangentes perpendiculaires, les droites I I', qui joignent les points où G G' rencontrent H H', formeront une autre couple de tangentes perpendiculaires. Ces trois couples sont les côtés d'un quadrangle complet orthogonal.

5. On voit donc que, si deux tangentes variables H I concourent en x sur une tangente fixe G, les tangentes perpendiculaires H'I' se couperont en un autre point x' de G. Les couples de points xx' sont en involution (*Introd.* 134, a). Les points doubles de cette involution sont évidemment le point à l'infini sur G, et le point μ (de G) où se coupent deux tangentes perpendiculaires J J' *), autres que G. Donc μ est le point milieu du segment variable xx'.

Le point s où G rencontre sa conjuguée G', et le point g, où G est tangente à la

*) Les points de contact de ces tangentes J J' sont situés sur la tangente G', perpendiculaire à G (2.); d'où l'on conclut que chaque tangente G contient un seul point μ.

courbe C^3, sont évidemment deux points conjugués de l'involution; les points kk' où G coupe la courbe (2.) sont de même deux points conjugués; donc chacun des segments sg, kk' a son milieu au point μ.

6. Le lieu du point commun à deux tangentes perpendiculaires est une ligne du troisième ordre (Introd. 132, a; 133, b), à laquelle appartiennent tous les points à l'infini (du plan), parce que la droite à l'infini est une tangente conjuguée à soi-même. En outre, toute tangente G contient deux points (à distance finie) du lieu: le point μ, où se coupent deux tangentes perpendiculaires, autres que G (5.), et le point s, où G est rencontrée par sa conjuguée G'. Donc le lieu des points μ, s est une conique: de plus, ce lieu est un cercle, car il passe par les points ω, ω', où les trois tangentes de C^3 coïncident ensemble sur la droite à l'infini. Ce cercle C^2 forme donc, avec la droite $\omega\omega'$, le lieu complet des intersections des couples de tangentes conjuguées de C^3.

7. Tout point μ (ou s) du cercle C^2 est l'intersection de trois tangentes de la courbe C^3, dont deux sont perpendiculaires entre elles (6.); de plus, elles sont conjuguées harmoniques par rapport à la troisième tangente et à la droite qui touche le cercle au même point (*Introd.* 135, c); c'est-à-dire que l'angle de ces dernières droites a pour bissectrices les deux tangentes perpendiculaires.

Soit ν le point à l'infini sur la troisième tangente: on peut regarder μ, ν comme deux points *correspondants* du lieu de troisième ordre formé par le cercle C^2 avec la droite à l'infini (*Introd.* 133, a; 135, c).

Si l'on joint un point fixe s du cercle à deux points correspondants variables μ, ν, les droites $s\mu, s\nu$ engendreront un faisceau en involution (*Introd.* 134, a), dont les rayons doubles sont les tangentes perpendiculaires de C^2, qui se coupent en s. Réciproquement, si le point μ et la direction $\mu\nu$ sont fixes, et l'on fait varier s sur le cercle, les bissectrices de l'angle $\mu s \nu$ envelopperont la courbe C^3.

8. La courbe de troisième classe C^3, étant du quatrième ordre, possède forcément trois points de rebroussement (de première espèce) pqr, qui sont tous réels, car les points de contact de la tangente double sont imaginaires *). Un point de rebroussement, p, représente trois intersections réunies de la courbe avec sa tangente en ce point; cette tangente rencontrera donc C^3 en un autre point u. Pour cette même tangente, regardée comme droite G (2.), le point de contact g coïncide avec l'une des intersections k, en p; et l'autre intersection k' est représentée par u; d'ailleurs les segments sg et kk' ont le même milieu μ (5.); donc s coïncide avec k' en u. Ce qui revient à dire que le point u et les deux autres points analogues v, w (correspondants à q, r) appartiennent à la courbe C^3 et au cercle C^2.

---

*) Salmon, *Higher plane curves*, p. 171.

Par conséquent la courbe C^3 est touchée en u par une droite U perpendiculaire à pu. Et, comme u est un point de C^3, la droite U représente deux des trois tangentes qu'on peut mener à la courbe par un point quelconque du cercle; ainsi U est aussi tangente au cercle en u (7.).

Donc les droites pu, qv, rw, tangentes aux rebroussements de C^3 et perpendiculaires aux tangentes en u, v, w (communes au cercle et à la courbe C^3) passent par le centre o du cercle.

Soient $u'v'w'$ les points μ relatifs aux tangentes de rebroussement, c'est-à-dire les points du cercle C^2, diamétralement opposés à uvw. Pour une tangente quelconque G, le point μ est le milieu du segment sg; donc u' est le point milieu de up, c'est-à-dire: $op = 3ou'$, $oq = 3ov'$, $or = 3ow'$. Ainsi les points de rebroussement sont situés sur un cercle concentrique à C^2 et de rayon triple que celui-ci.

9. On sait d'ailleurs *) que, pour une courbe de troisième classe et quatrième ordre, le point commun aux tangentes de rebroussement est le pôle harmonique de la tangente double par rapport au triangle formé par les trois rebroussements. Il s'ensuit **) que deux quelconque des tangentes op, oq, or forment, avec les asymptotes $o\omega, o\omega'$ du cercle C^2, un faisceau dont le rapport anharmonique est une racine cubique imaginaire de l'unité; c'est-à-dire que chacun des angles qor, rop, poq est de $120°$. Donc le triangle pqr, et par suite les triangles uvw, $u'v'w'$ sont equilatères.

Cela étant, si l'on fait rouler, dans la concavité du cercle (pqr), un autre cercle de diamètre pu', qui soit d'abord tangent au premier cercle en p, ce point considéré comme appartenant au cercle mobile engendrera une courbe ***) du quatrième ordre, qui aura trois rebroussements en p, q, r, avec les tangentes se coupant en o, et qui touchera en u, v, w le cercle C^2. Cette roulette est précisément notre courbe C^3.

La courbe C^3 est donc l'*hypocycloïde à trois rebroussements* engendrée par un cercle de rayon $=\frac{1}{3}op$ (ou, ce qui donne le même résultat †), de rayon $=\frac{2}{3}op$) qui roule dans l'intérieur du cercle (pqr).

Ainsi toute courbe de troisième classe et quatrième ordre, dont la tangente double soit à l'infini et les points de contact sur un cercle, est nécessairement une hypocycloïde à trois rebroussements. Cette courbe joue donc, parmi les courbes de la troisième classe et du quatrième ordre, le même rôle que le cercle parmi les coniques.

*) Salmon, *Higher plane curves*, p. 171.

) Giornale di Matematiche, vol. I, Napoli 1863, p. 319; vol. II, 1864, p. 62. [Queste Opere, n. **42 (23, 31)].

***) Salmon, *Higher plane curves*, p. 214.

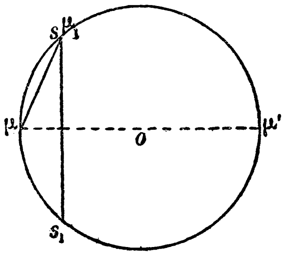
†) Euler, *de duplici genesi tam epicycloïdum quam hypocycloïdum* (Acta Acad. Scient. Imp. Petropolitanae pro anno 1781, pars prior, p. 48).

Je ne m'arrêtrai pas aux théorèmes que STEINER énonce sur la figure de la courbe, sur la longueur de ses arcs et sur la quadrature de son aire, car ils sont des cas particuliers d'autres propositions déjà anciennes et bien connues *).

10. Deux tangentes perpendiculaires de l'hypocycloïde C^3 se coupent en un point s du cercle C^2 (6.), et par suite rencontrent de nouveau la circonférence en deux points μ, μ' en ligne droite avec le centre o; de plus, ces tangentes sont les bissectrices des angles formés par la tangente du cercle avec la troisième tangente ss_1 de C^3 (7.); cette troisième tangente est donc perpendiculaire au diamètre $\mu\mu'$.

D'où il suit, qu'étant donnée une première tàngente μs, ainsi que le cercle C^2, on construira toutes les autres tangentes de C^3, de la manière suivante: menez par s la perpendiculaire à μs et la corde ss_1 perpendiculaire au diamètre qui passe par μ; menez par s_1 la perpendiculaire à ss_1 et la corde s_1s_2 perpendiculaire au diamètre qui passe par s; et toujours ainsi de suite, après avoir obtenue une corde s_ns_{n+1}, menez par s_{n+1} la perpendiculaire à s_ns_{n+1} et une nouvelle corde $s_{n+1}s_{n+2}$ perpendiculaire au diamètre qui passe par s_n. Toutes ces perpendiculaires et ces cordes seront évidemment tangentes à la même courbe C^3.

11. Le point s, où se coupent deux tangentes perpendiculaires $s\mu$, $s\mu'$, soit nommé μ_1 par rapport à la troisième tangente, qui rencontre de nouveau le cercle en s_1. De ce que la troisième tangente μ_1s_1 est perpendiculaire au diamètre $\mu\mu'$, on tire cette simple relation entre les arcs μs, μ_1s_1 mesurés dans le même sens:



$$\widehat{\mu_1 s_1} + 2\widehat{\mu s} = 2\pi.$$

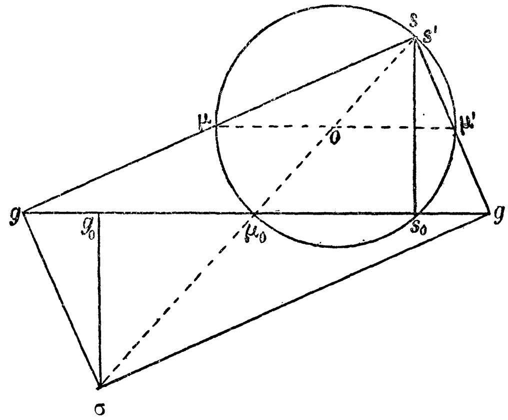
Donc, si deux rayons os, $o\mu$ du cercle C^2 tournent simultanément autour du point o, en sens opposés et avec la condition que leurs vitesses angulaires aient le rapport constant $2:1$, la corde $s\mu$ enveloppera l'hypocycloïde C^3 ou une courbe égale à C^3.

12. Deux tangentes conjuguées de l'hypocycloïde se coupent en s (ou s') et rencontrent de nouveau le cercle C^2 en μ, μ'. Soit μ_0 le point du cercle diamétralement opposé à s; et menons par μ_0 la parallèle à $\mu\mu'$, qui coupe en s_0, g, g' le cercle et

---

*) NEWTON, *Philosophiae nat. Principia math.* lib. I, prop. 49. — DE LA HIRE, *Traité des epicycloïdes et de leur usage dans les méchaniques* (Mém. de math. et de physique, Paris 1694), p. 10-47. — Voir en outre: MAGNUS, *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analyt. Geometrie*, Bd. I. (Berlin 1833) p. 310, 519, 536. — PADULA, *Intorno le curve di 4.° grado che hanno tre punti di regresso di prima specie* (Annali di TORTOLINI, t. 3. Roma 1852, p. 383). — SALMON, *Higher plane curves*, p. 251, 267. — BELLAVITIS, *Sulla classificazione delle curve della 3.ª classe* (Atti dell'Istituto Veneto, serie 2.ª, vol. IV, p. 247, Venezia 1853).

les droites $s\mu, s'\mu'$. On aura $\mu g = s\mu$ et $\mu' g' = s'\mu'$; g et g' sont donc (5.) les points où l'hypocycloïde est touchée par les droites $s\mu, s'\mu'$, et par suite (2.) gg' est une nouvelle tangente, dont le point de contact g_0 sera déterminé par la condition $\mu_0 g_0 = s_0 \mu_0$. Or on a $gg' = 2\mu\mu'$; donc la distance des deux points où l'hypocycloïde est coupée par une tangente quelconque est toujours égale au diamètre du cercle C^2.



13. Menons par g, g' les normales à l'hypocycloïde, c'est-à-dire les droites $g\sigma, g'\sigma$ perpendiculaires resp. à gs, $g's$. La figure $sg\sigma g'$ est un rectangle, et par suite le point σ, commun à ces normales, est en ligne droite avec o et s; et l'on a $\sigma o = 3os$. La perpendiculaire abaissée de s sur gg' passe par s_0 et est tangente à l'hypocycloïde (10.); donc la perpendiculaire abaissée du point σ sur gg' passera par g_0 et sera par conséquent normale, en ce point, à l'hypocycloïde.

Ainsi les normales à l'hypocycloïde aux trois points g, g', g_0 (où cette courbe est touchée par trois droites issues d'un même point s du cercle C^2) concourent en un même point σ (situé sur le diamètre os), dont le lieu est le cercle (pqr) concentrique à C^2 et de rayon triple que celui-ci. Autrement: les normales de l'hypocycloïde C^3 enveloppent une autre hypocycloïde inversement homothétique à C^3; o est le centre, et $3:1$ le rapport de similitude.

14. On a déjà vu que, si trois tangentes de l'hypocycloïde concourent en un même point d, les tangentes resp. perpendiculaires à celles-là forment un triangle abc, dont les sommets appartiennent aux premières droites (4.). Les quatre points $abcd$ sont les sommets d'un quadrangle complet orthogonal circonscrit à la courbe; c'est-à-dire que chacun de ces points est le concours des hauteurs du triangle formé par les trois restants. Soient $a_1 b_1 c_1$ les points diagonaux du quadrangle (les intersections des couples de côtés opposés); ils sont situés sur le cercle C^2, car chacun d'eux est l'intersection de deux tangentes perpendiculaires de C^3. Donc le cercle C^2 contient les pieds des hauteurs, et par suite aussi les milieux des côtés *), pour tout triangle analogue à abc, c'est-à

*) Feuerbach, *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks* (Nürnberg 1822), p. 38. Il résulte d'un autre théorème dû à Feuerbach (ibidem) que le cercle C^2 est l'enveloppe des cercles inscrits et ex-inscrits à tous les triangles analogues à *abc*.

dire pour chaque triangle formé par trois tangentes de l'hypocycloïde, dont les conjuguées passent par un même point. Autrement: le cercle C^2 passe par les points milieux des six côtés de tout quadrangle complet orthogonal analogue à *abcd* (c'est-à-dire circonscrit à l'hypocycloïde); et les droites qui joignent les points milieux des couples de côtés opposés sont des diamètres du cercle.

Il y a un des triangles *abc* qui est équilatère et par suite circonscrit au cercle C^2; c'est le triangle formé par les tangentes en u, v, w (9.).

15. La courbe C^3 étant le lieu d'un point où se croisent deux seules tangentes distinctes, il en résulte qu'elle partage le plan en deux parties, dont l'une est le lieu des points où se coupent trois tangentes réelles distinctes; l'autre au contraire contient les points situés sur une seule tangente réelle. Or, chaque point du cercle C^2 est l'intersection de trois tangentes réelles de l'hypocycloïde; la même propriété appartient donc à tous les points situés dans l'intérieur de l'hypocycloïde, et l'opposée aux points extérieures.

Il s'ensuit que, si le quadrangle *abcd* a un sommet à l'intérieur, les trois autres sommets sont aussi intérieurs, et le quadrangle est complètement réel. Si, au contraire, il y a un sommet extérieur, il y en aura un second qui sera aussi au dehors, mais les deux restants seront imaginaires.

Si l'un des sommets, a, tombe sur la circonférence de C^2, un autre sommet, d, coïncidera en a, à cause des deux tangentes perpendiculaires qui se coupent en ce point. Dans ce cas donc, le quadrangle *abcd* devient un triangle rectangle sgg' (12.), dont l'angle droit a son sommet sur le cercle C^2, et les autres sommets appartiennent à l'hypocycloïde.

16. On peut regarder deux tangentes, $G\,G'$, perpendiculaires, de l'hypocycloïde comme les asymptotes d'un faisceau d'hyperboles équilatères, qui aient un double contact à l'infini, et parmi lesquelles on doit compter la paire de droites $G\,G'$ (hyperbole équilatère avec un point double) et la droite à l'infini regardée comme un système de deux droites coïncidentes (hyperbole équilatère avec une infinité de points doubles). A une autre paire de tangentes perpendiculaires correspondra un autre faisceau d'hyperboles équilatères; et les deux faisceaux auront en commun une hyperbole (la droite à l'infini). Toutes les hyperboles équilatères de ces faisceaux correspondants aux couples de tangentes perpendiculaires de l'hypocycloïde forment donc un *réseau* géométrique (*Introd.* 92); c'est-à-dire que par deux points choisis arbitrairement on peut faire passer une (une seule) hyperbole équilatère, dont les asymptotes soient tangentes à l'hypocycloïde.

Les points doubles des hyperboles du réseau sont les points de croisement des asymptotes (c'est-à-dire les centres des hyperboles) et les points de la droite à l'infini;

cette droite forme donc, avec le cercle C^2 comme *lieu des centres* de toutes ces hyperboles équilatères, la courbe *Hessienne* du réseau (*Introd.* 95).

Les droites qui composent les hyperboles du réseau, douées d'un point double, sont les paires de droites GG'; ainsi l'hypocycloïde C_3, comme *enveloppe des asymptotes* de toutes ces hyperboles équilatères, est la courbe *Cayleyenne* du réseau (*Introd.* 133, b).

La Hessienne est le lieu des couples de pôles conjugués par rapport aux coniques du réseau (*Introd.* 132, b), tandis que la Cayleyenne est l'enveloppe de la droite qui joint deux pôles conjugués (*Introd.* 132, a; 133, b); donc les points correspondants μ, ν du cercle C^2 et de la droite à l'infini (7.) sont des pôles conjugués par rapport à toutes les hyperboles équilatères du réseau; et l'hypocycloïde est l'enveloppe de la droite $\mu\nu$ *).

17. Deux hyperboles équilatères du réseau se coupent en quatre points, sommets d'un quadrangle complet orthogonal, dont le côtés sont tangents à l'hypocycloïde et les points diagonaux sont situés sur le cercle C^2 (*Introd.* 133, d). Ces quatre intersections forment donc l'un des quadrangles *abcd* déjà considérés (14).

Ainsi tout quadrangle *abcd* (orthogonal et circonscrit à C^3) est la base d'un faisceau d'hyperboles du réseau; et réciproquement, chaque hyperbole du réseau passe par les sommets d'un nombre infini de ces quadrangles.

Si le quadrangle *abcd* dégénère en un triangle rectangle, dont le sommet μ de l'angle droit appartiendra au cercle C^2 (15.), toutes les hyperboles équilatères circonscrites auront en μ la même tangente $\mu\nu$ (*Introd.* 135). Donc le cercle C^2 est le lieu des points de contact des hyperboles du réseau (*Introd.* 92), et l'hypocycloïde est l'enveloppe des tangentes communes en ces points de contact entre les hyperboles du réseau.

18. Soit δ le centre du cercle D^2 circonscrit au triangle *abc*; on sait **) que d, intersection des hauteurs de ce triangle, est le centre de similitude directe des cercles C^2, D^2, et que le centre o de C^2 est le point milieu du segment $d\delta$. D'où il suit que le rayon de D^2 est double du rayon de C^2: c'est-à-dire que les cercles circonscrits à tous les triangles analogues à *abc* sont égaux.

Il résulte d'ici encore que les centres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des cercles circonscrits aux triangles *bcd*, *cad*, *abd*, *abc* sont des points symétriques à a, b, c, d, par rapport au point o; et par conséquent que $\alpha\beta\gamma\delta$ est un quadrangle égal et symétrique à *abcd*: o étant le centre de symétrie. Donc les points diagonaux des quadrangles analogues à $\alpha\beta\gamma\delta$

*) M. Schröter a déjà défini la courbe C^3 comme enveloppe de la droite $\mu\nu$ qui joint les points homologues de deux séries projectives de points, dont l'une soit donnée sur la circonférence du cercle C^2, et l'autre sur la droite à l'infini (tom. 54 de ce journal, p. 31).

**) Steiner, *Die geometrischen Konstructionen* (Berlin 1833), p. 51.

sont situés sur la circonférence C^2 (14.), et l'enveloppe des côtés de ces mêmes quadrangles est une courbe égale et symétrique à C^3 (o centre de symétrie).

On sait *) que dans un quadrangle complet orthogonal la somme des carrés de deux côtés opposés $\left(\text{par ex. } \overline{bc}^2 + \overline{da}^2\right)$ est égale à quatre fois le carré du diamètre du cercle (C^2) décrit par les milieux des côtés; cette somme est donc constante pour toutes les couples de côtés opposés dans tous les quadrangles analogues à $abcd$ et $\alpha\beta\gamma\delta$.

19. D'un point quelconque f du cercle D^2 circonscrit au triangle abc abaissons les perpendiculaires sur les côtés de ce triangle. D'après un théorème très-connu, les pieds des trois perpendiculaires sont allignés sur une droite G. Cherchons l'enveloppe de cette droite, lorsque le point f se déplace sur le cercle D^2.

Si f tombe sur l'un des sommets abc, la droite G devient l'une des hauteurs aa_1, bb_1, cc_1 du triangle; et si f est opposé diamétralement à l'un des sommets, G coïncide avec l'un des côtés bc, ca, ab. Les six côtés du quadrangle complet $abcd$ sont donc autant de tangentes de l'enveloppe dont il s'agit.

Si f coïncide avec l'un ou l'autre des points circulaires $\omega\omega'$, la droite G tombe entièrement à l'infini: d'ou il résulte que la droite à l'infini est une tangente double de l'enveloppe. En outre, si G doit avoir une direction donnée, le point f est unique et déterminé; et pour le construire, il suffit de tracer par d une droite ayant la direction donnée, et de joindre les intersections de cette droite par les côtés bc, ca, ab, aux intersections correspondantes (différentes de a, b, c) du cercle D^2 par les hauteurs aa_1, bb_1, cc_1; les trois droites ainsi tracées concourent au point f **).

La courbe enveloppée par les droites G est donc de la troisième classe et a, en commun avec l'hypocycloïde C^3, la tangente double et six autres tangentes, ce qui équivaut à dix tangentes communes: par conséquent les deux courbes coïncident ensemble.

Ainsi l'hypocycloïde C^3 est l'enveloppe des droites G pour tout triangle analogue à abc; c'est-à-dire que, si aux points où les côtés d'un triangle abc sont coupés par une tangente quelconque de l'hypocycloïde, on élève les perpendiculaires sur ces côtés ces perpendiculaires se couperont sur la circonférence du cercle circonscrit au triangle abc.

20. La droite G (19.) est la tangente au sommet d'une parabole N^2, qui a son foyer an f et est inscrite au triangle abc ***). La courbe C^3 est donc l'enveloppe des tangentes au sommet des paraboles inscrites aux triangles (dont l'un quelconque suffit pour dèterminer la courbe) analogues à abc.

---

*) Carnot, *Géométrie de position* (Paris 1803), N. 154.

**) Steiner, *Développement d'une série de théorèmes relatifs aux sections coniques* (Annales de Mathématiques de Gergonne, t. 19, p. 60).

***) Steiner, *Développement* etc. p. 45.

Du reste, cette dèfinition de la courbe C^3 rentre dans la méthode de M. CHASLES *) pour engendrer les courbes de troisième ordre ou classe. Soient, en effet, N^2 une parabole inscrite au triangle abc, et ν le point à l'infini sur la direction perpendiculaire aux diamètres de N^2. La parabole N^2 et le point correspondant ν, en variant ensemble, engendrent deux séries projectives: donc, si par ν on conçoit la droite G tangente à la parabole correspondante N^2, l'enveloppe de G sera une courbe de troisième classe touchée par la droite à l'infini aux points circulaires ω, ω'.

21. Soit f' le point du cercle D^2 (19.), qui donne naissance à une droite G' perpendiculaire à G. Si l'on fait varier simultanément les points ff', ils engendrent (sur le cercle D^2) une involution, dont les points doubles sont évidemment les points circulaires à l'infini: d'où l'on conclut que la droite ff' passe par le centre d du cercle.

Or le point d est (18.) le centre de similitude directe des cercles C^2, D^2 (le rapport de similitude étant $1:2$), et de plus, ce même point d est situé sur la directrice de la parabole N^2 **); le point milieu μ de la droite fd est donc commun à la droite G et au cercle C^2. De même, ce cercle et la droite G' passent par le point μ' milieu de $f'd$. Ainsi les triangles $dff', d\mu\mu'$ sont directement semblables; et par conséquent la droite $\mu\mu'$ est parallèle à ff' et passe par o, point milieu de $d\delta$ (et centre de C^2).

22. Une droite quelconque R coupe l'hypocycloïde C^3 en quatre points: les tangentes en ces points déterminent une parabole P^2, qui est l'*enveloppe-polaire* de la droite R par rapport à C^3, regardée comme courbe de troisiéme classe (*Introd.* 82). Les diamètres de cette parabole sont perpendiculaires à R (*Introd.* 74).

Si, au lieu de R, l'on considère une droite G qui soit tangente à C^3 en g et sécante en k, k', la parabole P^2 sera tangente à C en g, et par conséquent aura son sommet en ce point. En outre, les tangentes à l'hypocycloïde en k, k', étant perpendiculaires (2.), se couperont sur la directrice de P^2; donc la directrice de la parabole P^2 relative à une tangente G de l'hypocycloïde est parallèle à cette tangente et passe par le point μ' du cercle C^2 qui correspond à la tangente G', perpendiculaire à G (6.).

Il résulte d'ici que les directrices des paraboles P^2, relatives aux tangentes de l'hypocycloïde, enveloppent une autre courbe égale, concentrique et symétrique à C^3. Les axes de ces paraboles sont évidemment les normales de C^3, et par suite enveloppent la développée de C^3 (13.). Le lieu des sommets de ces paraboles est l'hypocycloïde C^3 elle-même.

Si R est la tangente double de C^3, c'est-à-dire la droite à l'infini, la parabole P^2 se réduit évidemment aux points circulaires $\omega\omega'$, regardés comme formant une enveloppe de la deuxième classe.

*) Comptes rendus de l'Acad. des sciences (Paris 1853) t. 36, p. 949; t. 37, p. 443.

**) STEINER, *Développement* etc. p. 59.

23. Les paraboles P^2 relatives à toutes les droites du plan forment un *système* qui est corrélatif de ce qu'on appelle *réseau* (16.). Il y a une (une seule) parabole P^2 tangente à deux droites données arbitrairement. Toutes les paraboles P^2 qui touchent une droite donnée ont deux autres tangentes communes (*Introd.* 77), sans compter la droite à l'infini: c'est-à-dire que ces paraboles sont inscrites dans un même quadrilatère, dont un côté est à distance infinie, et correspondent à autant de droites R issues d'un même point (pôle des droites qui forment le quadrilatère).

24. Lorsqu'on considère un faisceau de droites R parallèles, les axes des paraboles correspondantes P^2 auront tous une direction commune, perpendiculaire aux droites R (22.). Mais il y a de plus: la droite à l'infini appartenant, dans ce cas, au faisceau des droites R, l'une des paraboles est formée par les points circulaires $\omega\omega'$; donc toutes les paraboles P^2 correspondantes à un faisceau de droites parallèles ont le même foyer et, par suite, le même axe.

D'où il résulte que le système (23.) des enveloppes-polares de toutes les droites du plan est composé d'un nombre infini de séries, correspondantes aux différentes directions de ces droites: chaque série étant constituée par des paraboles P^2 qui ont le même foyer et le même axe.

25. Tout point du plan est pôle de quatre droites (y comprise la droite à l'infini), qui forment un quadrilatére circonscrit à toutes les paraboles P^2 correspondantes aux droites qui concourent au point dont il s'agit. Ainsi, à chaque point du plan correspond un quadrilatère, et le lieu des sommets de tous ces quadrilatères complets est une courbe du troisiéme ordre, la Cayleyenne du système des paraboles P^2 (*Introd.* 133, d). Or, chacun de ces quadrilatères a trois sommets à l'infini, car l'une des quatre droites dont il résulte est la droite à l'infini: donc la Cayleyenne se compose de la droite à l'infini et d'une conique, lieu des sommets d'un triangle circonscrit aux paraboles P^2 qui correspondent à des droites issues d'un même point (variable dans le plan).

Pour une série de paraboles P^2 ayant le même foyer et le même axe (24.), le triangle circonscrit a l'un de ses sommets au foyer, et les deux autres aux points circulaires à l'infini: donc la conique qui fait partie de la Cayleyenne est un cercle.

Les droites dont le pôle est le point o (concours des tangentes de rebroussement de la courbe fondamentale C^3) sont la droite à l'infini et les côtés du triangle formé par les points de rebroussement (*Introd.* 139, d). Donc le cercle qui, avec la droite à l'infini, constitue la Cayleyenne du système des paraboles P^2, passe par les rebroussements pqr de l'hypocycloïde C^3, et est, par suite, concentrique au cercle C^2 (8.).

Ainsi, ce cercle (pqr) est le lieu des foyers des paraboles P^2 (24.).

26. Les diagonales des quadrilatères qu'on a considérés ci-devant (25.) enveloppent

une courbe de la troisième classe, la Hessienne du système des paraboles P^2 (*Introd.* 133, d). Or, dans une série de paraboles ayant le même foyer et le même axe (24.), l'axe commun est une diagonale du quadrilatère circonscrit; donc la Hessienne est l'enveloppe des axes de toutes le paraboles P^2*).

La Hessienne touche la droite à l'infini aux deux points circulaires $\omega\omega'$ (*Introd.* 96, d); donc elle ne possède que trois points de rebroussement. En outre, elle est touchée par les tangentes de rebroussement de la courbe fondamentale (*Introd.* 100), et par conséquent, ces droites op, oq, or sont des tangentes de rebroussement, aussi pour la Hessienne (*Introd.* 140, a).

Les points pqr (rebroussements de C^3) sont des points simples de la Hessienne, qui y est touchée par le cercle Cayleyen (*Introd.* 141), c'est-à-dire, par des droites perpendiculaires aux tangentes de rebroussement.

De ce qui précède il résulte que la Hessienne du système des paraboles P^2 est une courbe inversement homothétique à C^3: o étant le centre et $3:1$ le rapport de similitude. Autrement: la Hessienne est la développée de la courbe fondamentale (13.).

On voit encore que toutes les courbes de la troisième classe touchées par les tangentes communes à C^3 et à sa Hessienne sont des hypocycloïdes semblables et concentriques à C^3. Et les cercles Cayleyens correspondants à ces hypocycloïdes ont le même centre o.

27. Soit Γ^3 l'hypocycloïde semblable et concentrique à C^3, dont les points de rebroussement soient uvw, où C^3 est touchée par le cercle C^2 (8.). Alors l'hypocycloïde C^3 sera la développée et la Hessienne de Γ^3; et le cercle C^2 formera, avec la droite à l'infini, la Cayleyenne de Γ^3; donc:

L'hypocycloïde C^3 est l'enveloppe des axes des paraboles Π^2, enveloppes-polaires des droites du plan, par rapport à l'hypocycloïde Γ^3 (26.);

Le cercle C^2 est le lieu des foyers des paraboles Π^2 (25.);

Deux tangentes perpendiculaires de l'hypocycloïde C^3 sont des droites conjuguées par rapport à toutes les paraboles Π^2 (*Introd.* 132, b);

Deux paraboles Π^2 sont inscrites dans un même triangle qui est inscrit dans le cercle C^2. Ce triangle, avec la droite à l'infini, forme un quadrilatère complet, dont les diagonales (c'est-à-dire les côtés du triangle circonscrit et homothétique au précédent) sont tangents à l'hypocycloïde C^3 (25., 26.).

28. Soit $\mu\mu_1\mu_2$ l'un de ces triangles inscrits dans C^2 et circonscrits à deux (et par suite à un nombre infini de) paraboles Π^2. Parmi les paraboles inscrites dans le triangle $\mu\mu_1\mu_2$ il y a trois systèmes de deux points, c'est-à-dire $(\mu\nu)$, $(\mu_1\nu_1)$, $(\mu_2\nu_2)$: en désignant

*) Voir à ce propos: Steiner, *Vermischte Sätze und Aufgaben* (t. 55 de ce journal, p. 371).

par ν, ν_1, ν_2 les points à l'infini sur les directions $\mu_1\mu_2$, $\mu_2\mu$, $\mu\mu_1$. Au point μ se croisent deux tangentes perpendiculaires de C^3, qui, étant conjuguées par rapport à toute parabole Π^2 (27.), divisent harmoniquement les segments $\mu_1\nu_1$, $\mu_2\nu_2$, et par suite sont les bissectrices de l'angle $\mu_1\mu\mu_2$. Ainsi les trois couples de tangentes perpendiculaires de l'hypocycloïde, qui se coupent aux points $\mu\mu_1\mu_2$, sont les bissectrices des angles du triangle formé par ces points: ces six tangentes sont donc les côtés de l'un des quadrangles orthogonaux *abcd*, qu'on a déjà rencontrés (14.).

Les troisièmes tangentes qu'on peut mener des points $\mu\mu_1\mu_2$ à l'hypocycloïde sont resp. parallèles aux côtés $\mu_1\mu_2$, $\mu_2\mu$, $\mu\mu_1$ (27.), et par suite (10.) elles sont resp. perpendiculaires aux diamètres de C^2 qui joignent les milieux des côtés opposés du quadrangle formé par les bissectrices.

Ces troisièmes tangentes forment un triangle, dont les côtés ont leurs milieux en μ, μ_1, μ_2; donc ce triangle est l'un des triangles *abc* déjà considérés (14.); et les nouvelles intersections du cercle C^2 par les côtés sont les pieds des hauteurs du même triangle; et ces hauteurs sont elles-mêmes tangentes à l'hypocycloïde.

29. Deux triangles analogues à $\mu\mu_1\mu_2$ sont inscrits dans le cercle C^2, circonscrits à une parabole Π^2 (27.) et conjugués à une hyperbole équilatère Q^2 du réseau dont l'hypocycloïde C^3 est la courbe Cayleyenne (16.); donc le cercle C^2 et la parabole Π^2 sont *polaires réciproques* par rapport à l'hyperbole équilatère Q^2. Ainsi le cercle est circonscrit à un nombre infini de triangles conjugués à l'hyperbole équilatère et circonscrits à la parabole. Toute tangente de la parabole coupe le cercle et l'hyperbole équilatère en quatre points harmoniques; et reciproquement les tangentes qu'on peut mener d'un point du cercle à la parabole et à l'hyperbole équilatère forment un faisceau harmonique (*Introd.* 108, g).

Le centre de l'hyperbole équilatère Q^2 est un point μ du cercle C^2 (16.); le triangle $s\omega\omega'$ est inscrit dans le cercle et conjugué à l'hyperbole; donc il est circonscrit à la parabole Π^2, c'est-à-dire que μ est le foyer de cette parabole.

La tangente au cercle en μ doit être conjuguée à la direction de la parabole, par rapport à l'hyperbole équilatère; donc les asymptotes de cette dernière courbe sont les bissectrices des angles compris par l'axe de la parabole et la tangente du cercle. Ceci revient à une propriété déjà démontrée (7.), car l'axe de la parabole (27.) et les asymptotes de l'hyperbole équilatère (16.) sont les tangentes de l'hypocycloïde qui se coupent au point μ.

30. Toutes les paraboles Π^2 qui sont tangentes à une même droite G, tangente à l'hypocycloïde C^3, ont le même point de contact (*Introd.* 90, b).

En regardant toujours Γ^3 comme courbe fondamentale, par rapport à laquelle toute droite a son enveloppe-polaire et son pôle (*Introd.* 130, a), une droite G tangente à l'hypocycloïde C^3 aura son pôle au point g', où C^3 est touchée par une droite G perpendiculaire à G (*Introd.* 132, c).

Les paraboles Π^2 qui passent par un même point a sont les enveloppes-polaires des droites tangentes à une même conique A^2, qui est le lieu des pôles des droites issues du point a (*Introd.* 136).

Il y a un nombre infini de coniques A^2 qui se réduisent à une couple de points gg': ces deux points appartiennent toujours à l'hypocycloïde C^3, et la droite gg' est tangente à cette même courbe. Les points a auxquels correspondent ces coniques A^2 sont situés sur le cercle C^2 (*Introd.* 136, b).

Toute conique A^2 est tangente à l'hypocycloïde C^3 en trois points, où cette dernière courbe est touchée par les droites resp. perpendiculaires aux tangentes issues du point a (auquel correspond A^2) (*Introd.* 137). D'où il suit que, si a tombe en o, A^2 coïncide avec le cercle C^2; et que l'hypocycloïde C^3 a un contact du cinquième ordre, aux points u, v, w, avec les coniques A^2 correspondantes aux points de rebroussement p, q, r (8.), considérés comme points a.

En outre, pour un point quelconque a, la conique A^2 coupe l'hypocycloïde C^3 én deux points, qui sont les pôles des tangentes du cercle C^2, issues du point a. Cette propriété résulte de ce que les droites tangentes à ce cercle ont leurs pôles sur l'hypocycloïde C^3 (*Introd.* 135).

Les tangentes de l'hypocycloïde C^3, perpendiculaires aux trois droites qui touchent cette courbe et une conique (A^2) aux mêmes points se rencontrent en un point.

Si l'on mène par deux points quelconques six tangentes à l'hypocycloïde, les tangentes resp. perpendiculaires à celles-là forment un hexagone de Brianchon.

Si l'on inscrit une conique quelconque dans l'un des triangles abc, dont il a été question ailleurs (14.), cette conique a trois droites tangentes communes avec l'hypocycloïde, autres que les côtés du triangle abc; et, aux points de contact de ces droites, l'hypocycloïde est touchée par une autre conique (*Introd.* 137, a).

31. Au moyen de l'un quelconque de ces triangles abc, on peut encore engendrer la courbe C^3 d'une autre manière. Concevons la série des coniques Δ^2, inscrites dans le triangle abc et passant par le concours d des hauteurs aa_1, bb_1, cc_1; et supposons qu'on ait tracé, pour chaque conique Δ^2, la droite H tangente en d et la tangente K parallèle à H. On demande quelle courbe est enveloppée par les droites K ?

Les coniques Δ^2 qui touchent la droite à l'infini sont deux paraboles (imaginaires) tangentes en d aux droites $d\omega$, $d\omega'$; et l'on voit aisément que, pour chacune de ces paraboles, la droite K tombe entièrement à l'infini. La droite à l'infini est donc une tangente double (idéelle) de l'enveloppe dont il s'agit. Et comme il n'y a qu'une conique Δ^2 tangente en d à une droite donnée, cette enveloppe n'a qu'une tangente dont la direction soit donnée, et par suite elle est une courbe de la troisième classe.

Si l'on donne à la droite H la position perpendiculaire à l'un des côtés du triangle *abc*, la tangente K coïncidera avec H; car la conique Δ^2 devient, dans ce cas, l'une des couples de points aa_1, bb_1, cc_1, ou, ce qui est la même chose, l'un des segments aa_1, bb_1, cc_1 considérés comme des ellipses dont une dimension soit nulle.

Si H est parallèle à l'un des côtés du triangle *abc*, K sera ce même côté; donc les côtés et les hauteurs du triangle *abc* sont autant de tangentes de la courbe enveloppée par les droites K.

Ainsi cette courbe et l'hypocycloïde C^3 ont la tangente double et six tangentes simples communes; et par suite elles coïncident (19.).

32. Observons que les centres des coniques Δ^2 sont sur la circonférence d'une ellipse inscrite dans le triangle formé par les milieux des côtès du triangle donnè *abc**), et circonscrite au triangle formé par les milieux des hauteurs.

Et les points des coniques Δ^2, qui sont diamétralement opposés à *d*, forment une autre ellipse homothétique à la précédente et de dimensions doubles. Ces points et les droites H correspondantes engendrent deux systèmes projectifs. D'où il suit réciproquement que:

Ètant donnés une conique E^2 et un faisceau de droites, dont le point commun soit *d*, et dont les rayons H correspondent anharmoniquement aux points *h* de E^2; si l'on mène par chaque point *h* la droite K paralléle au rayon correspondant H, l'enveloppe de K est une courbe de troisième classe et quatrième ordre, pour laquelle la droite à l'infini est la tangente double et les points de contact sont située sur les rayons H qui correspondent aux points à l'infini de E^2. Cette courbe est donc (9.) une hypocycloïde lorsque, E^2 étant une ellipse, les points à l'infini de cette conique correspondent aux droites $d\omega, d\omega'$.

Les points ii', où la droite variable H coupe E^2, forment sur cette ellipse une involution; et les couples de points conjugués ii' correspondent anharmoniquement aux points *h*. Il y a trois points *h* qui coïncident avec l'un des points ii' correspondants; c'est-à-dire qu'il y a trois droites H qui passent par les points correspondants *h*. Ces droites sont les tangentes à l'hypocycloïde qui passent par *d*.

33. Voici encore un autre moyen d'engendrer cette merveilleuse courbe, douée de propriétés si nombreuses et si élégantes. Soient *uvw* les sommets d'un triangle équilatère inscrit dans le cercle C^2. Cherchons l'enveloppe d'une corde μs telle que l'on ait, entre les arcs, la relation $\overset{\frown}{\mu u}=\frac{1}{3}\overset{\frown}{\mu s}$, ou bien $\overset{\frown}{\mu u}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{us}$ (et par suite, $\overset{\frown}{\mu v}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{vs}$, $\overset{\frown}{\mu w}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{ws}$).

---

*) Hearn, Researches on curves of the second order etc. (London 1846), p. 39.

Combien de ces cordes μs passent par un point x pris arbitrairement sur la circonférence de C^2? Si l'on considère ce point comme point μ, il suffira de prendre un arc $\widehat{us}=2\,\widehat{\mu u}$ (ce qu'on peut faire d'une seule maniére), et nous aurons, dans la corde μs, une tangente K de l'enveloppe dont il s'agit. Si, au contraire, on considère x comme point s, il faudra prendre un arc $u\mu=\frac{1}{2}su$, ce qui donne deux points μ, μ' diamétralement opposés; et $s\mu$, $s\mu'$ seront deux autres tangentes de l'enveloppe. Ces deux tangentes, G, G′, sont évidemment perpendiculaires entre elles, et la première tangente K est perpendiculaire au diamètre $\mu\mu'$. Notre enveloppe est donc une courbe de la troisième classe.

De la construction qui précède, on déduit que, pour chacun des points uvw la tangente K coïncide avec l'une des G G′; et, par suite, que l'enveloppe est tangente en uvw au cercle C^2, et que les diamètres ou, ov, ow lui sont aussi tangents.

Cette courbe de troisiéme classe est donc l'hypocycloïde à trois rebroussements. Par conséquent, les points u, v, w, où l'hypocycloïde est tangente au cercle C^2, sont des points de trisection pour les arcs sous-tendus par une tangente quelconque de la même courbe.

34. On peut encore rencontrer l'hypocycloïde à trois rebroussements dans la théorie des cubiques gauches (courbes à double courbure du troisième ordre). On sait*) qu'un plan quelconque contient une droite tangente en deux points distincts à une surface développable du quatrième ordre, donnée. Si donc on coupe la surface par un plan passant par la tangente double à l'infini, la section sera une courbe de la troisième classe et du quatrième ordre, ayant la tangente double à l'infini. Et par conséquent, si la développable est tangente en deux points (imaginaires conjuguès) au cercle imaginaire à l'infini, tout plan, dont la trace à l'infini soit la corde de contact, coupera la surface suivant une hypocycloïde (à trois rebroussements). D'où il résulte que:

Si une surface développable du quatriéme ordre est coupée par un plan donné suivant une hypocycloïde, tout plan parallèle au donné coupera la surface suivant une autre hypocycloïde;

Si une cubique gauche passe par les sommets de deux triangles équilatères situés sur deux plans parallèles, et a deux plans osculateurs (imaginaires) parallèles à ces plans, la surface développable formée par les tangentes de la cubique est coupée par tous les plans parallèles aux donnés suivant des hypocycloïdes.

35. Deux hypocycloïdes (à trois rebroussements) sont situées sur deux plans pa-

---

*) Cayley, Mémoire sur les courbes à double courbure et sur les surfaces développables (Journal de mathématiques de *Liouville*, t. 10, 1.^{e} série, p. 245).

rallèles Π_1, Π_2; cherchons l'enveloppe du plan qui coupe les plans donnés suivant deux tangentes de ces courbes. Si par un point arbitraire de l'espace on mène les plans tangents resp. aux deux hypocycloïdes, ces plans enveloppent deux cônes de troisième classe et quatrième ordre, qui ont un plan bitangent commun (parallèle aux plans donnés) et mêmes génératrices de contact, dirigées aux points ω, ω', où le cercle imaginaire à l'infini est rencontré par les plans Π. Ces cônes n'auront donc plus que trois autres plans tangents communs: ce sont les seuls plans qu'on puisse mener par le sommet (pris arbitrairement) à toucher en même temps les deux hypocycloïdes. L'enveloppe demandée est donc une surface développable de la troisième classe et, par suite, du quatrième ordre. La cubique gauche K^3, courbe cuspidale de cette développable, passe évidemment par les points pqr de rebroussement de chacune des hypocycloïdes données et y est osculée par trois plans qui concourent au centre o du triangle équilatère pqr (8.). C'est-à-dire que ce point o est le *foyer* *) du plan Π, par rapport à la cubique gauche.

Et, par suite, la droite à l'infini, commune aux plans donnés, est l'intersection de deux plans tangents (imaginaires) de la développable, dont les génératrices de contact passent par les points circulaires ω, ω'. La cubique gauche K^3 a donc trois asymptotes réelles: autrement, elle est une *hyperbole gauche* **).

De ce qui précède on déduit que tout plan Π, parallèle aux plans donnés, coupe la développable suivant une courbe de troisième classe et quatrième ordre, ayant la tangente double à l'infini et les points de contact en ω, ω', c'est-à-dire, suivant une hypocycloïde C^3, dont les rebroussements pqr appartiennent à la cubique gauche K^3. Le lieu des cercles circonscrits aux triangles équilatères pqr est une hyperboloïde gauche Y ***).

Les plans Π sont conjugués, par couples, en involution: de deux plans conjugués, l'un contient la conique lieu des pôles de l'autre, par rapport aux hyperboles H^2 suivant lesquelles la développable est coupée par ses plans tangents. Toutes les coniques, locales des pôles dans les différents plans Π, passent par les points $\omega\omega'$, et par suite sont des cercles, dont les centres (situés sur une droite, corde idéelle de la cubique gauche) sont les points o, centres des triangles équilatères pqr. Ces cercles sont précisément les cercles C^2 (8.) tangents intérieurement aux hypocycloïdes C^3, c'est-à-dire les cercles lieux des intersections des couples de tangentes perpendiculaires †).

---

*) Mémoire de géométrie pure sur les cubiques gauches (Nouv. Ann. de Math. 2.e série, t. I, p. 287) [Queste Opere, n. **37**] n.o 3.

**) Ibid. n.i 4, 13.

***) Ibid. n.o 8.

†) Ibid. n.i 3, 11.

Tous ces cercles C^2 sont situés sur un hyperboloïde Φ, semblable à Y. Cet hyperboloïde Φ est, en outre, le lieu de la droite intersection de deux plans (conjugués) tangents à la développable et coupant les plans Π suivant des droites perpendiculaires. Ce même hyperboloïde est inscrit dans la développable, et la courbe de contact est une cubique gauche semblable à K^3 *).

Dans l'involution des plans Π, les plans doubles (imaginaires) sont tangents à la développable, et le plan central Π_0 coupe l'hyperboloïde Φ suivant un cercle C_0^2 qui est le lieu des centres des hyperboles H^2 inscrites dans la développable. Les points uvw, où le cercle C_0^2 est tangent à l'hypocycloïde C_0^3 correspondante, sont les traces des asymptotes de la cubique gauche K^3; et les points $u'v'w'$ de C_0^2, diamétralement opposés à $u\,v\,w$, sont les centres des hyperboles (circonscrites au triangle formé par les rebroussements de l'hypocycloïde), suivant lesquelles la cubique gauche est projétée sur le plan central par les trois cylindres passant par elle **).

Un plan tangent quelconque de la développable coupe le cercle C_0^2 en deux points s, μ; et le plan tangent conjugué passe par le même point s et par un autre point μ' (10.). Ces deux points $\mu\,\mu'$, diamétralement opposés dans le cercle, sont les centres des hyperboles H^2, suivant lesquelles la développable est coupée par les deux plans tangents nommés ***).

36. Revenons maintenant à un théorème déjà démontré (10.). Étant donné un point s_1 sur la circonférence d'un cercle C^2, menons arbitrairement une corde s_1s_2; ensuite, une autre corde s_2s_3 perpendiculaire au diamètre qui passe par s_1; après, une troisième corde s_3s_4 perpendiculaire au diamètre qui passe par $s_2, \ldots$ et ainsi de suite. Ces cordes forment une ligne brisée, inscrite dans le cercle et circonscrite à une hypocycloïde douée de trois rebroussements.

La relation entre deux cordes successives $s_{x-1}\,s_x$, $s_x\,s_{x+1}$ est telle que l'arc $\widehat{s_x\,s_{x+1}}$ est double de l'arc $\widehat{s_{x-1}\,s_x}$, mais dirigé en sens contraire; c'est-à-dire, qu'en regardant comme égaux deux arcs, dont la différence soit un multiple de la circonférence 2π, l'on a

$$\widehat{s_x\,s_{x+1}} + 2\widehat{s_{x-1}s_x} = 0\ ,$$

ou bien, en désignant par θ_x l'arc $\widehat{s_1\,s_x}$,

$$\theta_{x+1} + \theta_x - 2\theta_{x-1} = 0\ ,$$

d'où l'on tire aisément

$$\theta_{x+1} + 2\,\theta_x = \theta_2\ ,$$

*) Ibid. n.i 8, 11.
**) Ibid. n.o 14.
***) Ibid. n.o 21.

et par suite

$$(a.)\qquad \theta_x = \frac{1-(-2)^{x-1}}{3}\cdot\theta^2.$$

37. Supposons qu'après une série de sommets tous distincts, $s_1, s_2, \ldots s_{n-1}$ l'on parvienne à un sommet s_n qui coïncide avec l'un de ceux qui précèdent, s_m; et nommons $\mathcal{P}$ le polygone fermè dont les sommets successifs sont les points $s_m, s_{m+1}, \ldots s_{n-1}$. La condition pour la coïncidence des points s_n, s_m est évidemment que la différence $\theta_n - \theta_m$ soit un multiple de 2π, et, par suite de $(a.)$, $\frac{\theta_2}{2\pi}$ doit être un nombre rationnel.

Soit donc $\frac{\theta_2}{2\pi} = \frac{q}{p}$, où q, p désignent deux nombres entiers (positifs) premiers entre eux. L'équation $(a.)$ donne

$$(a'.)\qquad \frac{\theta_n - \theta_m}{2\pi} = \frac{(-2)^{m-1} - (-2)^{n-1}}{3}\cdot\frac{q}{p};$$

par conséquent, si les points s_n, s_m doivent coïncider, il faut satisfaire à la congruence

$$(b.)\qquad q(-2)^{m-1}\left((-2)^{n-m}-1\right) \equiv 0 \pmod{3p}.$$

Soit $p = 2^\alpha . p'$, p' étant un nombre impair. La plus petite valeur de m qui satisfait à $(b.)$ est évidemment

$$m = \alpha + 1,$$

d'où il suit que, si p contient le facteur 2^α, le point $s_{\alpha+1}$ sera le premier sommet du polygone $\mathcal{P}$, c'est-à-dire le sommet où ce polygone se ferme. Autrement: la ligne brisée $s_1 s_2 \ldots s_n$ se composera d'une partie ouvert $s_1 s_2 \ldots s_{\alpha+1}$, qui a α côtés, et d'un polygone fermé $s_{\alpha+1} \ldots s_n$.

Donc, si l'on a simplement $p = 2^\alpha$, il n'y aura pas de polygone fermé; mais la ligne brisée $s_1 s_2 \ldots$ s'arrêtra au point $s_{\alpha+1}$, et tous les sommets successifs coïncideront avec celui-ci.

Au contraire, le polygone $\mathcal{P}$ se ferme au point s_1, toutes les fois que p est un nombre impair.

38. Ayant ainsi déterminé le nombre m, chercons la valeur de n. Si $p = 2^\alpha . p'$, et p' n'est pas premier à 3, la congruence $(b.)$ devient

$$(c.)\qquad (-2)^{n-\alpha-1} - 1 \equiv 0 \pmod{3p'}.$$

Mais si p' est premier à 3 (quelque soit q), le binome $(-2)^{n-\alpha-1}-1$ étant divisible par 3, la congruence à satisfaire sera la suivante

$$(d.)\qquad (-2)^{n-\alpha-1}-1\equiv 0 \quad (\text{mod.}\, p').$$

Ainsi la valeur de $n-\alpha-1$ sera le plus petit exposant qui rend $(-2)^{n-\alpha-1}-1$ divisible par $3p'$ ou par p' suivant que p' est divisible par 3 ou premier à ce nombre. Par exemple,

pour $p=$	3,	5,	6,	7,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	17,	18,	19,	21,	23,	27,	29,	31, ...
on a $m=$	1,	1,	2,	1,	1,	2,	1,	3,	1,	2,	1,	1,	2,	1,	1,	1,	1,	1,	1, ...
et $n=$	4,	5,	5,	7,	10,	6,	6,	6,	13,	8,	13,	9,	11,	10,	7,	23,	28,	28,	11, ...

Ici les propriétés connues des nombres pourraient donner lieu à des théorèmes intéressants, relatifs à ces polygones $\mathcal{P}$ inscrits dans le cercle et circonscrits à l'hypocycloïde. Par exemple: si à deux nombres p, p_1, premiers entre eux, correspondent deux valeurs de $n-m$, dont l'une soit multiple de l'autre, la plus grande de ces valeurs conviendra aussi au nombre pp_1; donc etc.

39. Je me borne à observer qu'en général la valeur de n est plus petite ou au plus égale à p, sauf le cas que p soit une puissance du nombre 3. Si $p=3^\beta$, la congruence $(c.)$ devient

$$(-2)^{n-1}-1\equiv 0 \quad (\text{mod.}\ 3^{\beta+1}).$$

Dans ce cas, le plus petit exposant est

$$n-1 = 3^\beta,$$

d'où

$$n = p+1.$$

40. Je suppose la circonférence du cercle divisée en p parties égales; soit $\mathcal{Q}$ le polygone régulier qu'on obtient en joignant les successifs points de division. Je suppose en outre que la ligne brisée $s_1s_2\ldots$ (36.) ait son premier côté commun avec le polygone $\mathcal{Q}$.

Comme les cordes $s_1s_2, s_2s_3,\ldots$ sous-tendent les arcs $\frac{2\pi}{p}, \frac{4\pi}{p}, \frac{8\pi}{p}, \ldots \frac{2(p-2)\pi}{p}$, $\frac{2(p-1)\pi}{p}, \ldots$, il s'ensuit que tous les côtés de la ligne brisée sont des côtés ou des diagonales du polygone régulier $\mathcal{Q}$. Mais réciproquement, les sommets de $\mathcal{Q}$ n'appartiennent pas tous en général (39.) à la ligne brisée $s_1s_2\ldots s_n$, et d'autant moins au polygone $\mathcal{P}$ qui en fait partie. Seulement, lorsque p est une puissance de 3, on a $m=1$ et $n=p+1$, et par suite, la ligne brisée $s_1s_2\ldots s_n$ forme un polygone fermé $\mathcal{P}$ de p côtés, dont les sommets sont, dans un ordre différent, les sommets du polygone régulier $\mathcal{Q}$ (39.).

41. Dans ce cas de $p=3^\beta$, les grandeurs des côtés du polygone $\mathscr{P}$ se réproduisent avec la période $3^{\beta-1}$; c'est-à-dire que la longueur d'un côté $s_{x-1}s_x$ ne change pas si x reçoit l'accroissement $3^{\beta-1}$. En effet, l'équation $(a'.)$ donne pour l'arc soustendu par le côte $s_{x-1}s_x$, l'expression

$$\theta_x-\theta_{x-1}=\frac{(-2)^{x-2}-(-2)^{x-1}}{3}\cdot\frac{2q\pi}{p};$$

ou bien

$$(e.)\quad \frac{\theta_x-\theta_{x-1}}{2q\pi}=\frac{(-2)^{x-2}}{3^\beta},$$

puisque $p=3^\beta$. Si l'on fait maintenant $x+3^{\beta-1}=y$, on aura

$$\frac{\theta_y-\theta_{y-1}}{2q\pi}=\frac{(-2)^{x-2}}{3^\beta}\cdot(-2)^{3^{\beta-1}};$$

mais l'on a identiquement (39.)

$$(-2)^{3^{\beta-1}}-1=k.3^\beta,$$

k étant un nombre entier; donc

$$\frac{\theta_y-\theta_{y-1}}{2q\pi}=\frac{(-2)^{x-2}}{3^\beta}+k(-2)^{x-2};$$

c'est-à-dire que l'arc $\theta_y-\theta_{y-1}$ ne diffère de l'arc $\theta_x-\theta_{x-1}$ que par un multiple de 2π; et par suite les côtes $s_{y-1}s_y$, $s_{x-1}s_x$ sont égaux. En ajoutant de nouveau 3^{-1} à l'index x, on obtiendra un troisième côté égal à $s_{x-1}s_x$; mais il faut s'arrêter là, car un troisième accroissement $3^{\beta-1}$ donné à x reviendrait à ajouter 2π à l'arc $\widehat{s_{x-1}s_x}$, ce qui reproduirait le premier côté $s_{x-1}s_x$. Ainsi les côtés du polygone $\mathscr{P}$ (pour $p=3^\beta$) sont égaux trois à trois.

L'équation $(e.)$ fait voir que le rapport $(\theta_x-\theta_{x-1}):\frac{2\pi}{p}$ n'est jamais un multiple de 3; et d'ailleurs, puisque les côtés du polygone $\mathscr{P}$ sont égaux trois à trois, le nombre des côtés différents sera $3^{\beta-1}$: ce qui est précisément la moitié du nombre qui marque combien il y a de nombres inférieurs et premiers à p. Les côtés du polygone $\mathscr{P}$ sont donc les côtés et les diagonales, de tous les ordres non divisibles par 3, du polygone régulier $\mathscr{Q}$.

Bologne, 10. mai 1864.