67.

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DE DEUX THÉORÈMES RELATIFS À LA SURFACE D'ÉGALE PENTE CIRCONSCRITE À UNE CONIQUE.

EXTRAIT D'UNE LETTRE À M. DE LA GOURNERIE.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 2.me série, tome IV (1865), pp. 271-275.

Monsieur,

Dans votre excellent *Traité de Géométrie descriptive*, vous démontrez analytiquement deux beaux théorèmes relatifs aux coniques doubles de la surface d'égale pente dont la directrice est une conique. Un passage de votre *Lettre à* M. LIOUVILLE *), en faisant allusion à ces théorèmes, m'a engagé à en rechercher la démonstration géométrique. C'est cette démonstration que je vous demande la permission de vous communiquer.

On donne deux coniques (A), (D) dans deux plans A, D: soient d, a les pôles de la droite AD par rapport aux coniques (A), (D) respectivement. Les plans tangents

---

*) *Journal de Mathématique,* décembre 1864.

On sait que la surface d'égale pente circonscrite à une conique a trois lignes doubles qui sont des coniques. L'une d'elles est la directrice; la détermination graphique des deux autres présentait quelque difficulté. Le passage de ma Lettre à M. LIOUVILLE, que rappelle M. CREMONA, est le suivant:

... Je trouve que les proiections horizontales des deux lignes doubles cherchées et de la directrice sont des coniques homofocales, et que l' intersection des plans de deux d'entre elles est perpendiculaire au plan de la troisième. Il y a probablement quelque moyen facile de démontrer ces théorèms par la Géométrie

Je suis heureux d'avoir, par cette phrase, provoqué les recherches d'un géomètre aussi distingué que M. CREMONA. J. de la G.

communs à ces coniques enveloppent une développable qui a deux coniques *doubles*, autres que (A), (D). Les plans des quatre coniques forment un tétraèdre conjugué commun à toutes les surfaces du second ordre inscrites dans la développable. Il s'ensuit que si l'on détermine sur la droite AD les points b, c conjugués entre eux par rapport aux deux coniques (A), (D), les plans adc, adb contiendront les deux autres coniques doubles que nous nommerons (B), (C).

Imaginons maintenant dans le plan D une autre conique K ayant un double contact avec la conique (D); soient e, f, les points de contact; g le point de concours des tangentes communes; soient a', b', c', les points où la corde de contact ef est rencontrée par les côtés bc, ca, ab du triangle abc, conjugué à (D). On sait que lorsque deux coniques ont un contact double, les polaires d'un même point quelconque concourent sur la corde de contact; donc a et a', b et b', c et c' sont des couples de points conjugués entre eux, non-seulement par rapport à la conique (D), mais aussi par rapport à la conique K.

Concevons qu'on mène par ge (et de même par gf) deux plans tangents à la conique (A); ces plans touchent la conique (D), donc ils sont tangents aussi aux coniques (B), (C); c'est-à-dire que ge, gf sont les intersections de deux couples de plans tangents communs aux coniques (A), (B), (C). Ces plans couperont un plan mené arbitrairement par ef suivant quatre droites (dont deux se coupent en e, et les deux autres en f), et ces quatre droites seront tangentes aux sections des cônes g(A), g(B), g(C) par ce plan. C'est-à-dire que si l'on fait la perspective des coniques (A), (B), (C) sur un plan passant par ef, l'œil étant en g, on aura trois coniques inscrites dans un même quadrilatère dont deux sommets sont les points e et f.

Supposons maintenant que le plan D soit à une distance infinie, et considérons la conique (D) comme la section à l'infini d'un cône (D) de sommet d; alors d sera le centre commun des coniques (A), (B), (C); et les droites (db, dc), (dc, da), (da, db) seront des couples de diamètres conjugués des coniques (A), (B), (C) respectivement. D'où il suit qu'étant donnés la conique (A) et le cône (D), la droite da sera la conjuguée au plan A par rapport au cône, et les droites db, dc seront conjuguées entre elles par rapport au cône et par rapport à la conique (A), c'est-a-dire qu'elles seront les droites qui divisent harmoniquement l'angle des asymptotes de (A) et l'angle des génératrices du cône (D) comprises dans le plan A. Par conséquent, si (A) est une ellipse, les droites db, dc seront toujours réelles; mais si (A) est une hyperbole, elles peuvent être imaginaires.

Si des points où la conique (A) coupe le plan D on mène les tangentes à la conique (D), ces quatre tangentes sont des génératrices de la développable et se rencontrent en quatre points qui, étant des points doubles de la développable, appartiennent aux deux coniques (B), (C). Si (A) est une ellipse, ces quatre tangentes sont imaginaires, mais donnent deux intersections réelles: donc l'une des coniques (B), (C) sera une hyperbole, et l'autre une ellipse.

Supposons que la conique K soit le cercle imaginaire à l'infini (section d'une sphère arbitraire par le plan à l'infini); le cône (D), dont la section à l'infini a un contact double avec K, devient un cône de révolution, dont l'axe est *dg*. Que cet axe soit vertical; les plans menés par *ef* seront horizontaux. Dans ces hypothèses la développable sera une *surface d'égale pente*.

Les points a et a' étant conjugués par rapport à K, il s'ensuit que les droites *da*, *da'* sont perpendiculaires; c'est-à-dire que les coniques doubles (A), (B), (C) ont cette propriété, que *l'intersection des plans de deux d'entre elles est perpendiculaire à la trace horizontale du plan de la troisième*. C'est l'un de vos théorèmes. Autrement, les trois plans A, B, C et un plan horizontal quelconque forment un tétraèdre dont les arêtes opposées sont orthogonales.

Les perspectives des coniques (A), (B), (C), sur un plan passant par *ef*, avec l'œil en *g*, deviennent des projections orthogonales sur un plan horizontal. Or ces projections sont inscrites dans un même quadrilatère (imaginaire) ayant deux sommets aux points circulaires à l'infini, *e*, *f*, donc *elles sont des coniques homofocales*. C'est l'autre de vos théorèmes.

J'ajoute que l'étude analytique de ces développables devient tres-simple lorsqu'on fait usage de coordonnées planaires, en rapportant les points de l'espace au tétraèdre formé par les plans des coniques doubles, comme tétraèdre fondamental, ainsi que je l'ai fait dans une autre occasion *(Annali di Matematica*, t. II, p. 65) [Queste Opere, n. **11** (t. 1°)]. Il est bien entendu que cette méthode ne peut être employée que dans le cas où le tétraèdre est réel.

Vous pouvez, Monsieur et cher collègue, faire de cette comunication l'usage que vous voudrez; par exemple, vous pouvez la transmettre à M. Prouhet pour les *Nouvelles Annales*...

Bologne, 19 mai 1865.