# 48.

## SULLA TEORIA DELLE CONICHE.

*Giornale di Matematiche,* volume II (1864), pp. 17-20 e p. 192.

1. Questa Nota fa seguito all'altra, sullo stesso argomento, inserita nel fascicolo di agosto 1863 di questo giornale (pag. 225). [22]

Proponendomi qui di ricercare il numero delle coniche che sodisfanno a cinque condizioni date (passare per punti dati o toccare curve date *)), premetto il seguente problema (*Introd.* 87): *quale è il luogo di un punto che abbia la stessa retta polare rispetto ad una curva* $C_n$ *d'ordine n e ad alcuna delle coniche d'una data serie d' indice* M?

Per risolvere il quesito, cerchiamo quanti punti del luogo richiesto siano contenuti in una trasversale assunta ad arbitrio. Sia $a$ un punto qualunque della trasversale; A la retta polare di $a$ rispetto a $C_n$; e sia M' l'ordine della linea luogo dei poli della retta A rispetto alle coniche della data serie (cioè il numero delle coniche della serie che toccano una data retta qualsivoglia (*Introd.* 86)), la qual linea segherà la trasversale in M' punti $a'$. Reciprocamente, assunto ad arbitrio un punto $a'$ nella trasversale, le rette polari di $a'$ rispetto alle coniche anzidette formano (*Introd.* 84, b) una curva della classe M, la quale ha $M(n-1)$ tangenti comuni colla curva di classe $n-1$, inviluppo delle rette polari de' punti della trasversale relative a $C_n$ (*Introd.* 81, a). Queste $M(n-1)$ tangenti comuni sono polari, rispetto a $C_n$, d'altrettanti punti $a$ della trasversale. Così ad ogni punto $a$ corrispondono M' punti $a'$, e ad ogni punto $a'$ corrispondono $M(n-1)$ punti $a$; dunque vi saranno $M'+M(n-1)$ punti $a$, ciascuno de' quali coinciderà con uno de' corrispondenti $a'$. Ne segue che il luogo cercato è una linea dell'ordine $M'+M(n-1)$. I punti ove questa linea interseca $C_n$ sono evidentemente punti di contatto fra $C_n$ e alcuna delle coniche della serie; dunque:

*) Le quali s'intenderanno affatto generali nel rispettivo ordine, cioè prive di punti multipli, ed inoltre del tutto indipendenti, sì fra loro, che riguardo agli altri dati della quistione.

Teorema 1.° *Se in una serie di coniche d'indice* M *ve ne sono* M' *tangenti ad una retta qualsivoglia, ve ne saranno* $M'n + Mn(n-1)$ *tangenti ad una data curva d'ordine* n.

2. Il numero M' è in generale eguale a 2M (*Introd.* 85); ma può ricevere una riduzione quando dalle coniche risolventi il problema si vogliano separare i sistemi di rette sovrapposte, che in certi casi vi figurano. Questo non può evidentemente accadere se le coniche della serie devono passare per quattro o per tre punti dati. Avendosi dunque per un fascio di coniche $M=1, M'=2$, il teorema 1.° darà:

Teorema 2.° *Vi sono* $n(n+1)$ *coniche passanti per quattro punti dati e tangenti ad una data linea d'ordine* n.

Cioè le coniche passanti per tre punti dati e tangenti ad una curva d'ordine $n$ formano una serie d'indice $n(n+1)$, e ve ne sono $2n(n+1)$ tangenti ad una retta data. Quindi dallo stesso teorema 1.° si ricava:

Teorema 3.° *Vi sono* $nn_1(n+1)(n_1+1)$ *coniche passanti per tre punti dati e tangenti a due linee date d'ordini* $n, n_1$.

Ossia, le coniche passanti per due punti dati e tangenti a due curve date d'ordini $n, n_1$, formano una serie d'indice $nn_1(n+1)(n_1+1)$. In questo caso, siccome la retta che unisce i due punti dati, risguardata come un sistema di due rette coincidenti, può ben rappresentare una conica della serie, tangente a qualsivoglia retta data, il valore 2M del numero M' sarà suscettibile di riduzione.

Per determinare tale riduzione, ricordiamo che le coniche passanti per due punti dati e tangenti a due rette date formano una serie d'indice 4, nella quale, invece di otto, vi sono solamente quattro coniche (effettive) tangenti ad una terza retta. Se la retta che unisce i punti dati incontra le due rette date in $a, b$, il segmento $ab$, risguardato come una conica (di cui una dimensione è nulla) tangente alle rette date in $a, b$, riesce tangente anche a qualsivoglia terza retta; e, come tale, rappresenta quattro soluzioni (coincidenti) del problema: descrivere pei due punti dati una conica tangente alle due rette date e ad una terza retta. È dunque naturale di pensare che, ove in luogo delle due rette date si abbiano due curve d'ordini $n, n_1$, la riduzione del numero 2M sia $4nn_1$; essendo $nn_1$ le coppie di punti in cui le curve date sono incontrate dalla retta che passa pei punti dati. Accerteremo questa previsione.

3. Applicando il teorema 1.° alla serie delle coniche passanti per due punti e tangenti a due rette date, si ha:

Teorema 4.° *Vi sono* $4n^2$ *coniche passanti per due punti dati e tangenti a due rette e ad una curva d'ordine* n, *date.*

Dal teorema 3.° si desume che le coniche passanti per due punti e tangenti ad una retta e ad una curva d'ordine $n$ formano una serie d'indice $2n(n+1)$, nella quale, pel teorema 4.°, vi sono $4n^2$ coniche tangenti ad un'altra retta; dunque (teorema 1.°):

Teorema 5.° *Vi sono* $2nn_1(nn_1+n+n_1-1)$ *coniche passanti per due punti dati e tangenti ad una retta e a due curve d'ordini* $n, n_1$, *date.*

Questo numero è precisamente eguale a $2nn_1(n+1)(n_1+1)$ diminuito di $4nn_1$.

4. I teoremi 3.° e 5.° fanno conoscere di quale indice sia la serie delle coniche passanti per due punti e tangenti a due curve date, e quante coniche di questa serie siano anche tangenti ad una retta data; dunque il teorema 1.° darà:

Teorema 6.° *Vi sono* $n\,n_1n_2(n\,n_1n_2+n_1n_2+n_2n+nn_1+n+n_1+n_2-3)$ *coniche passanti per due punti dati e tangenti a tre curve d'ordini* $n, n_1, n_2$, *date.*

5. Applicando lo stesso teorema 1.° alla serie (d'indice 4) delle coniche passanti per un punto dato e tangenti a tre rette date, nella quale sappiamo esservi due coniche tangenti ad una quarta retta, si ottiene:

Teorema 7.° *Vi sono* $2n(2n-1)$ *coniche passanti per un punto dato e tangenti a tre rette e ad una curva d'ordine* $n$, *date.*

Pel teorema 4.° e pel 7.° si conoscono i numeri $M, M'$ relativi alla serie delle coniche che passano per un punto dato e toccano due rette ed una curva data; dunque (teorema 1.°):

Teorema 8.° *Vi sono* $2nn_1(2nn_1-1)$ *coniche passanti per un punto dato e tangenti a due rette e a due curve d'ordini* $n, n_1$, *date.*

Così dai teoremi 5.° ed 8.° si conclude:

Teorema 9.° *Vi sono* $2n\,n_1n_2\big(n\,n_1n_2+(n_1n_2+n_2n+nn_1)-(n+n_1+n_2)\big)$ *coniche passanti per un punto dato e tangenti ad una retta e a tre curve d'ordini* $n, n_1, n_2$, *date.*

E dai teoremi 6.° e 9.°:

Teorema 10.° *Vi sono* $n\,n_1n_2n_3\big(n\,n_1n_2n_3+(n_1n_2n_3+n_2n_3n+n_3n_1n+n_1n_2n)+(nn_1+n_2n_3+nn_2+n_3n_1+nn_3+n_1n_2)-3(n+n_1+n_2+n_3)+3\big)$ *coniche passanti per un punto dato e tangenti a quattro curve date d'ordini* $n, n_1, n_2, n_3$.

6. Il teorema 9.° manifesta che, per la serie delle coniche passanti per un punto e tangenti a tre curve, il valore ridotto di $M'$ è $2M-n\,n_1n_2(4n+4n_1+4n_2-6)$. Questa riduzione è dovuta in parte alle tangenti delle curve date, che concorrono nel punto dato, ed in parte alle rette che uniscono questo punto alle intersezioni delle curve medesime, prese a due a due.

Se una retta condotta pel punto dato, a toccare una delle tre curve, incontra le altre due rispettivamente in $a, b$, il segmento $ab$ conta per *quattro* fra le coniche della serie passanti per un punto qualunque di quella retta [23]. Invece, se una retta condotta pel punto dato, ad un'intersezione $a$ di due curve, incontra la terza in $b$, il segmento $ab$ tien luogo di *due* coniche della serie passanti per un punto arbitrario della retta medesima. Il numero totale de' primi segmenti è $n\,n_1n_2(n+n_1+n_2-3)$, e quello dei secondi è $3n\,n_1n_2$: quindi il quadruplo del primo numero aggiunto al doppio del secondo dà la riduzione da farsi a $2M$ per ottenere $M'$.

7. La serie delle coniche tangenti a quattro rette date è d'indice 2, e fra esse ve n'ha una sola che tocchi una quinta retta; dunque, pel teorema 1.°, si avrà:

Teorema 11.° *Vi sono* $n(2n-1)$ *coniche tangenti a quattro rette e ad una curva d'ordine* n, *date.*

Così dai teoremi 7.° ed 11.° si ha:

Teorema 12.° *Vi sono* $nn_1(4nn_1-2n-2n_1+1)$ *coniche tangenti a tre rette e a due curve d'ordini* $n, n_1$, *date.*

E dai teoremi 8.° e 12.°:

Teorema 13.° *Vi sono* $n\,n_1n_2(4n\,n_1n_2-2n-2n_1-2n_2+3)$ *coniche tangenti a due rette e a tre curve d'ordini* $n, n_1, n_2$, *date.*

E dai teoremi 9.° e 13.°:

Teorema 14.° *Vi sono* $n\,n_1n_2n_3\big(2n\,n_1n_2n_3+2(n_1n_2n_3+\ldots)-2(nn_1+\ldots)+3\big)$ *coniche tangenti ad una retta ed a quattro curve d'ordini* $n, n_1, n_2, n_3$, *date.*

E finalmente dai teoremi 10.° e 14.°:

Teorema 15.° *Vi sono* $n\,n_1n_2n_3n_4\big(n\,n_1n_2n_3n_4+(n_1n_2n_3n_4+\ldots)+(nn_1n_2+\ldots)-3(nn_1+\ldots)+3(n+\ldots)\big)$ *coniche tangenti a cinque curve date d'ordini* $n, n_1, n_2, n_3, n_4$.

8. [24] Il teorema 14.° mostra che la differenza tra 2M ed M', per la serie delle coniche tangenti a quattro curve date d'ordini $n, n_1, n_2, n_3$ è $nn_1n_2n_3\big(4(nn_1+\ldots)-6(n+\ldots)+3\big)$. Questa riduzione è dovuta in parte alle tangenti comuni a due delle curve medesime; in parte alle tangenti che dai punti comuni a due curve si possono condurre ad una delle rimanenti; ed in parte alle *diagonali* del sistema, cioè alle rette che uniscono i punti comuni a due curve coi punti comuni alle altre due. Se una retta tangente a due curve incontra le altre due rispettivamente in $a, b$, il segmento $ab$ conta per *quattro* fra le coniche della serie, costituite da una coppia di punti. — Se per un punto $a$ comune a due curve si conduce una tangente alla terza, che incontri la quarta in $b$, il segmento $ab$ conta per *due* fra le coniche della serie, costituite da due punti. — Da ultimo, se il punto $a$ comune a due curve si unisce col punto $b$ comune alle altre due, il segmento $ab$ rappresenta *una* conica della serie, costituita da due punti. Cioè le riduzioni parziali dovute alle tangenti comuni, alle tangenti pei punti d'intersezione ed alle diagonali, sono ordinatamente

$$4n\,n_1n_2n_3\big((nn_1+\ldots)-3(n+\ldots)+6\big)$$
$$6n\,n_1n_2n_3\big((n+\ldots)-4\big)$$
$$3n\,n_1n_2n_3.$$

Correlativamente, nella serie delle coniche tangenti a quattro curve si riscontrano le seguenti coniche dotate di punto doppio:

1.° Se da un punto comune a due curve si tira una tangente alla terza ed una tangente alla quarta curva, queste due tangenti formano una conica che conta per quattro fra quelle della serie, dotate di punto doppio;

2.° Se una tangente comune a due curve incontra la terza curva in un punto da cui si tiri una tangente alla quarta, si ha un paio di rette che conta per due fra le coniche della serie, dotate di punto doppio:

3.° Una tangente comune a due curve ed una tangente comune alle altre due formano insieme una conica della serie, dotata di punto doppio.

9. Queste riduzioni si determinano, senza grande difficoltà, per mezzo di considerazioni analoghe a quelle usate nella 1.ª Nota, e coll'aiuto del seguente teorema:

*La condizione affinchè una conica sia tangente ad una curva* $C_n$ *d'ordine* n, *è del grado* $n(n+1)$ *ne' coefficienti della conica. Se il discriminante della conica è nullo, quella condizione assume la forma* $U^2.V=0$, *ove* U *è del grado* n *e* V *del grado* $n(n-1)$ *rispetto a quei coefficienti.* $U=0$ *è la condizione perchè* $C_n$ *passi pel punto comune alle due rette nelle quali la conica si è decomposta; e* $V=0$ *è la condizione perchè l'una o l'altra di queste rette tocchi* $C_n$.

10. I teoremi 2.°, 3.°, ... 15.° sono stati enunciati, senza dimostrazione, dall'illustre CHASLES in una recentissima comunicazione fatta all'Accademia delle scienze di Parigi (*Compte rendu* del primo febbraio 1864). Mi lusingo che le riduzioni sopra accennate spieghino il disaccordo fra quei teoremi e la formola data, nel tomo 56 del giornale matematico di CRELLE-BORCHARDT, dal mio dotto amico, il signor BISCHOFF di Monaco.

Bologna, 21 febbraio 1864.