55.

SUR LA SURFACE DU QUATRIÈME ORDRE QUI A LA PROPRIÉTÉ D'ÊTRE COUPÉE SUIVANT DEUX CONIQUES PAR CHACUN DE SES PLANS TANGENTS.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 63 (1864), pp. 315-328.

1. Dans les *Monatsberichte* de l'Académie royale des sciences de Berlin (juillet et novembre 1863) on lit des communications très-intéressantes, faites par MM. KUMMER, WEIERSTRASS et SCHRÖTER au sujet de la surface du quatrième ordre qui jouit de la propriété d'être coupée suivant deux coniques (courbes du second degré) par chacun de ses plans tangents: surface, dont la première découverte est due à l'illustre STEINER.

Dans ce mémoire, je me suis proposé d'étudier cette remarquable surface. J'aurai occasion de démontrer, par les moyens de la géométrie pure, non-seulement les théorèmes déjà connus, mais d'autres encore, nouveaux et peut-être dignes d'attention.

2. Je considère, dans un plan donné E, une courbe du troisième ordre *(cubique fondamentale)*, sa *Hessienne*, qui est une autre courbe du même ordre, et le système des coniques polaires des points du plan, par rapport à la première courbe, lesquelles forment un *réseau* géométrique du second ordre. Je considère, en outre, les *poloconiques pures* et *mixtes* des droites du plan *).

Toute droite R a quatre pôles, qui forment la base du faisceau des coniques polaires des points de R: le triangle conjugué à ces coniques est inscrit dans la Hessienne, et ses sommets r sont conjugués (par rapport à toutes les coniques du réseau) aux points où R rencontre la même courbe. De plus, la Hessienne est tangente, aux points r, à la poloconique pure de R, et est coupée, en ces mêmes points, par la poloconique mixte de R et d'une autre droite arbitraire.

*) Voir mon *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane,* sez.ᵉ IIIª (Bologna 1862). [Queste Opere, n. **29** (t. 1.°)].

3. Soit $J^{(2)}$ une surface du second degré; o un point fixe de cette surface; T la droite intersection du plan E par le plan tangent à $J^{(2)}$ en o. Désignons par t les points de contact de la Hessienne avec la poloconique pure de T.

4. Considérons, dans le plan E, une conique polaire S; trois droites menées du point o aux sommets d'un triangle conjugué à cette conique, percent la surface $J^{(2)}$ en trois points, dont le plan passe constamment par un point fixe s, quel que ce soit le triangle conjugué *). Ce point s, qu'on peut regarder comme *correspondant* à la conique S, est évidemment situé sur la droite qui joint o au pôle de T, par rapport à S.

5. Supposons maintenant que la conique S soit variable autour des sommets d'un quadrangle fixe (pôles d'une droite fixe R). Les points diagonaux r de ce quadrangle forment un triangle conjugué à toutes les positions de S; donc le point correspondant s se maintiendra dans le plan P des trois points, où la surface $J^{(2)}$ est rencontrée par les droites or. Les pôles de la droite T, par rapport aux coniques S du faisceau, sont situés dans une autre conique K, passant par les points r; donc le lieu du point s est la conique H, intersection du plan P par le cône oK **).

6. La courbe K est la poloconique mixte des droites R, T, elle passe donc par les points t (2.). Il s'ensuit que, si l'on fait varier (dans le réseau) le faisceau des coniques polaires S, c'est-à-dire que si l'on fait varier la droite R, la conique K passera toujours par les trois points fixes t: et par conséquent, les coniques H, lieux des points s correspondants à toutes les coniques du réseau, rencontreront les trois droits fixes ot***).

7. Tout plan P contient deux coniques H. En effet, le plan P coupe la surface $J^{(2)}$ suivant une conique, et le cône déterminé par celle-ci, avec le sommet o, rencontrera la Hessienne, non-seulement aux points r, mais encore en trois points nouveaux r', par lesquels (et par les points t) passe la poloconique mixte K' de T et d'une autre droite R', coupant la Hessienne dans les pôles conjugués aux points r' (2.). Le cône oK' tracera sur le plan P une conique H', passant par les points où la première conique H s'appuie aux droites ot. La quatrième intersection des coniques H, H' sera le point s qui correspond (4.) à la conique S, polaire du point RR' †).

8. Si la droite R coïncide avec T, K deviendra la poloconique pure de T. Le plan de la conique H coupe la surface $J^{(2)}$ suivant une conique qui, dans ce cas, se confond avec H'; car le cône passant par cette conique, avec le sommet o, rencontre la Hes-

*) Chasles, *Mémoire sur deux principes généraux de la science: la dualité et l'homographie* (Mémoires couronnés par l'Académie royale de Bruxelles, t. XI, 1837; pag. 707-708).

**) Weierstrass (Monatsb. p. 337); Schröter (ibid. p. 524).

***) Schröter (ibid. p. 533).

†) Weierstrass (ibid. p. 338); Schröter (ibid. p. 534).

sienne aux points t et en trois autres points; et la conique passant par ces derniers points et par les t détermine de nouveau le même cône. La surface $J^{(2)}$ contient donc une certaine conique H *).

9. Soient τ_1, τ_2, τ_3 les points où T rencontre la Hessienne, c'est-à-dire les pôles conjugués aux points t_1, t_2, t_3; on sait que $\tau_1 t_2 t_3$, $t_1 \tau_2 t_3$, $t_1 t_2 \tau_3$ sont des ternes de points en ligne droite. Supposons que la droite R prenne la position $\tau_1 t_2 t_3$; dans ce cas, la conique K passera (2.) par les points $t_1 \tau_2 \tau_3$, $t_1 t_2 t_3$, et par conséquent elle se décomposera en deux droites, $t_1 t_2$, $t_1 t_3$. Les droites or, qui, dans ce cas, deviennent $o(t_1, \tau_2, \tau_3)$, percent $J^{(2)}$ en trois points, dont les deux derniers coïncident avec o, parce que le plan $o\tau_2\tau_3$ est tangent à la surface $J^{(2)}$ en o (3.); le plan P de ces points passe donc par ot_1, mais il est du reste indéterminé. Et la section du cône oK par ce plan P, c'est-à-dire la conique H, se réduit à la droite ot_1, regardée comme un système de deux droites superposées. De même pour ot_2 et ot_3 **).

10. De quel ordre est la surface, lieu des points s, ou bien des coniques H? Chacune des droites ot représente une conique H pour tout plan qui passe par cette droite (9.): ainsi ot est une droite *double* sur la surface. Toutes les coniques H rencontrent ces trois droites ot (6.): donc les droites $o(t_2, t_3)$ représentent l'intersection complète de la surface par le plan ot_2t_3. Il s'ensuit que *le lieu du point s est une surface $J^{(4)}$ du quatrième ordre*, sur laquelle $o(t_1, t_2, t_3)$ sont des droites doubles, et o est un point triple: en effet, toute droite menée par o contient un seul point s ***).

11. Dès que la Hessienne est le lieu des sommets des triangles conjugués aux coniques S, prises deux à deux, il est évident que la surface $J^{(4)}$ passe par la courbe gauche du sixième ordre, intersection de $J^{(2)}$ avec le cône, dont o est le sommet et la Hessienne est la base. Cette courbe gauche et une certaine conique H (8.) forment ensemble la complète intersection des surfaces $J^{(2)}$, $J^{(4)}$ †).

12. Tout plan tangent à $J^{(4)}$ coupe cette surface suivant une ligne du quatrième ordre ayant quatre points doubles: le point de contact et les intersections du plan par les droites doubles ot. *Donc la section de la surface $J^{(4)}$ par un quelconque de ses plans tangents est le système de deux lignes du second degré.*

Réciproquement, *tout plan qui coupe $J^{(4)}$ suivant deux coniques est tangent à la surface.* En effet, parmi les quatre points communs aux coniques, trois appartiendront aux droites doubles; le quatrième est nécessairement un point de contact ††).

---

*) SCHRÖTER (ibid. p. 535).

**) SCHRÖTER (ibid. p. 533-534).

***) WEIERSTRASS (ibid. p. 338); SCHRÖTER (ibid. p. 537).

†) SCHRÖTER (ibid. p. 535).

††) KUMMER (ibid. p. 332); WEIERSTRASS (ibid. p. 338).

13. Quelle est la classe de la surface $J^{(4)}$? Menons, dans l'espace, une droite arbitraire G, qui rencontrera la surface en quatre points $ss_1s_2s_3$. Si un plan tangent passe par G, les deux coniques H contenues dans ce plan rencontreront G en deux couples de points, qui seront ss_1, s_2s_3, ou ss_2, s_3s_1, ou ss_3, s_1s_2. Il y a donc au plus trois plans tangents qui passent par G; c'est-à-dire que *la surface* $J^{(4)}$ *est de la troisième classe* *).

Par deux points ss_1 donnés sur la surface, on peut, en général, mener une seule conique H. En effet, les droites $o(s, s_1)$, avec les trois droites ot, déterminent un cône du second degré, qui, passant par les droites doubles de la surface $J^{(4)}$, la coupera de nouveau suivant une ligne du deuxième ordre.

Si les points ss_1 sont infiniment proches, on trouve qu'une droite G, tangente à la surface $J^{(4)}$ en un point s, touche en ce point une conique H. Le plan de cette conique en contient une autre H', qui, en général, ne passe pas par s, mais par les deux autres intersections de $J^{(4)}$ par G. Toutefois, si G est osculatrice à la surface, H' passe par s et touche en ce point une autre droite G': la deuxième osculatrice correspondante au point s. Dans ce cas, le plan des coniques HH' (et des droites GG') est tangent à la surface en s.

14. La section faite par un plan quelconque dans la surface $J^{(4)}$ est une courbe du quatrième ordre qui possède, en général, trois points doubles (sur les droites ot) et est, par suite, de la sixième classe. D'où il suit que *le cône circonscrit à la surface, dont le sommet soit un point arbitraire de l'espace, est du sixième ordre.* Ce cône est d'ailleurs, ainsi que la surface $J^{(4)}$, de la trosième classe; il aura donc neuf génératrices cuspidales, c'est-à-dire que *par un point quelconque de l'espace on peut mener neuf droites osculatrices à la surface. Et un plan arbitraire contient six droites osculatrices,* car la courbe du quatrième ordre, suivant laquelle $J^{(4)}$ est coupée par ce plan, a six points d'inflexion.

Par un point de la courbe susdite on peut lui mener quatre tangentes, dont les points de contact soient ailleurs; donc *le cône circonscrit, dont le sommet soit sur la surface* $J^{(4)}$, *est du quatrième ordre.* Ce cône, étant de la troisième classe, aura trois génératrices cuspidales et un plan bitangent: le plan qui touche $J^{(4)}$ au sommet du cône. On conclut d'ici que *par un point quelconque de la surface* $J^{(4)}$ *on peut lui mener trois droites osculatrices, dont le contact soit ailleurs.*

La même courbe de la sixième classe a deux tangentes issues de chacun de ses points doubles; donc *le cône circonscrit, dont le sommet soit sur une droite double, est du deuxième ordre* et, par suite, de la deuxième classe **).

15. Les plans tangents qu'on peut mener à la surface $J^{(4)}$ par un point d d'une

*) SCHRÖTER (ibid. p. 538).

**) KUMMER (ibid. p. 333); SCHRÖTER (ibid. p. 538).

droite double ot se partagent en deux séries: les uns passent par ot; les autres enveloppent le cône du second degré, déjà mentionné. Pour les premiers plans, les points de contact sont sur la droite ot; pour les derniers, le contact a lieu ailleurs. Mais le cône susdit admet deux plans tangents qui passent par ot: ces plans donc sont ceux qui touchent $J^{(4)}$ au point d; c'est-à-dire qu'ils sont le lieu des droites osculatrices à la surface en d. En effet, un plan mené arbitrairement par ot coupe la surface $J^{(4)}$ suivant une conique qui passe par o, car ce point est triple sur la surface: la deuxième intersection de la conique par la droite ot est un point d, où ce plan est tangent à la surface (12.).

Les plans menés par une droite double ot forment une involution, où deux plans conjugués sont tangents à la surface en un même point d. Les plans correspondants au point o sont évidemment ceux qui passent par ot et par l'une des deux autres droites doubles. Les points de contact des plans doubles de l'involution sont des points *cuspidaux* pour la surface $J^{(4)}$.

16. Ainsi, par un point arbitraire d de la droite double ot on peut mener deux droites dont chacune rencontre la surface en quatre points coïncidents: ces droites sont les tangentes en d aux coniques H situées dans les deux plans qui touchent la surface au même point. De quel degré est la surface, lieu de ces droites? Pour ce lieu, ot est une droite double; en outre, tout plan mené par ot ne contient qu'une de ces droites: *le lieu cherché est*, par suite, *une surface du troisième degré.* D'où je conclus que le plan des deux génératrices issues d'un même point d de ot passe par une droite fixe A*). Or les génératrices correspondantes au point o sont évidemment les deux autres droites doubles de $J^{(4)}$; donc le plan de celles-ci contient la droite A.

Nous aurons ainsi trois droites fixes A_1, A_2, A_3, correspondantes aux droites doubles $o(t_1, t_2, t_3)$, et situées respectivement dans les plans ot_2t_3, ot_3t_1, ot_1t_2. Un point quelconque α de A_1 détermine une droite génératrice de la surface du troisième degré relative à ot_1: cette génératrice passe par α et est située dans le plan αot_1. Si le point α tombe à l'intersection des droites A_1, ot_3, la génératrice correspondante est ot_3: mais cette droite est une génératrice aussi de la surface du troisième degré relative à ot_2; le point commun à A_1 et ot_3 appartient donc aussi à A_2. *Les trois droites* $A_1 A_2 A_3$ *sont*, par suite, *dans un même plan* Π *et forment un triangle, dont les sommets* $a_1 a_2 a_3$ *sont situés sur les droites* $o(t_1, t_2, t_3)$.

17. Il suit d'ici que le plan Π contient six droites passant, deux à deux, par a_1, a_2, a_3, et ayant chacune quatre points coïncidents communs avec la surface $J^{(4)}$

*) Voir mon Mémoire *Sulle superficie gobbe del terz'ordine* (Atti del R. Istituto Lombardo, vol. II, Milano 1861). [Queste Opere, n. **27** (t. 1.°)].

(elles sont les génératrices des trois surfaces gauches du troisième degré relatives à $o(t_1, t_2, t_3)$, qui correspondent aux points a_1, a_2, a_3); c'est-à-dire que la courbe du quatrième ordre, $L^{(4)}$, intersection de $J^{(4)}$ par le plan Π, a, dans chacun de ses points doubles a, non seulement trois, mais quatre points consécutifs communs avec chacune de ses tangentes au point double. Or l'on sait, par la théorie des courbes planes du quatrième ordre avec trois points doubles, que, lorsque les deux droites, qu'on peut, en général, mener par un point double à toucher une telle courbe ailleurs, coïncident respectivement avec les tangentes au point double, dans ce cas, ces tangentes sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites qui joignent ce point aux deux autres points doubles. Chaque droite double *oat* a donc cette propriété que *les deux plans tangents en a sont conjugués harmoniques, non seulement par rapport aux plans tangents aux points cuspidaux* (15.), *mais aussi par rapport aux plans déterminés par cette droite avec les deux autres droites doubles.*

18. Par la même théorie des courbes du quatrième ordre avec trois points doubles, on sait que les six droites tangentes aux points doubles d'une telle courbe forment un héxagone de *Brianchon:* donc les trois couples de plans tangents en $a_1 a_2 a_3$ enveloppent un cône du second degré, conjugué au trièdre des droites doubles.

Autrement: dans l'involution (15.) des couples de plans tangents aux points d'une droite double ot, on pourra déterminer deux plans conjugués (soit a leur point de contact) qui divisent harmoniquement l'angle des plans passant par les autres droites doubles. Les points de contact, $a_1 a_2 a_3$, de ces trois couples singulières, correspondantes aux trois droites doubles, déterminent un plan Π coupant la surface $J^{(4)}$ suivant une telle courbe du quatrième ordre, que ses six tangentes aux points doubles enveloppent une conique conjuguée au triangle $a_1 a_2 a_3$.

19. Soient ω, $\bar{\omega}$ les points cuspidaux sur la droite double oa. Par chacun de ces points on peut mener une seule droite qui rencontre $J^{(4)}$ en quatre points consécutifs: c'est la tangente à la conique suivant laquelle le plan (unique) tangent en ce point coupe la surface. Les deux droites analogues, correspondantes à ω et $\bar{\omega}$, marqueront sur la droite A les points doubles ε, η, de l'involution déterminée sur cette droite par les couples de plans qui passent par oa (15.).

Si d est un point quelconque de oa, il est évident qu'on pourra trouver, sur la même droite, un autre point d', tel que les plans tangents en d, d' forment un faisceau harmonique. Si l'on fait varier ensemble les points d, d', on a une involution dans laquelle o, a sont des points conjugués (17.), et ω, $\bar{\omega}$ sont les points doubles. Donc *les points cuspidaux* ω, $\bar{\omega}$ *divisent harmoniquement le segment* oa.

20. Toute conique H, tracée sur la surface $J^{(4)}$, est projectée, du point o sur le plan Π, suivant une conique K, circonscrite au triangle $a_1 a_2 a_3$ (6.). Réciproquement,

toute conique K décrite par les points a est la perspective d'une conique H déterminée (la section de $J^{(4)}$ par le cône oK). La conique K rencontre la courbe du quatrième ordre, $L^{(4)}$, en deux autres points s, s_1; soient s_2, s_3 les nouvelles intersections de $L^{(4)}$ par la droite ss_1. La conique K', décrite par les points $a_1a_2a_3$ et s_2s_3, est évidemment la perspective de la conique H' située avec H dans un même plan P, dont la trace sur Π est la droite $ss_1s_2s_3$. Je nommerai *conjuguées* ces coniques K, K'.

Si le plan P rencontre la droite double oa en d, les deux plans tangents en d contiendront, séparément, les droites tangentes aux coniques H, H', et traceront, par suite, sur le plan Π les droites tangentes en a aux coniques K, K'. Et, à cause de la relation d'involution entre les couples de plans passant par oa (15.), *les couples de droites menées par* a (dans le plan Π) *formeront une involution, dans laquelle deux droites conjuguées sont tangentes, en ce point, à deux coniques* K, K' *conjuguées.* Dans cette involution, les droites qui joignent a aux deux autres points doubles de $L^{(4)}$ sont évidemment conjuguées; tandis que les rayons doubles de l'involution sont les traces des plans tangents aux points cuspidaux de oa, c'est-à-dire les droites $a\varepsilon$, $a\eta$ (19.).

Ce qui est démontré dans ce numéro et dans les deux suivants ne cesse pas de subsister, si, au lieu du plan Π, l'on considère un autre plan transversal, arbitraire.

21. On sait que toute courbe plane du quatrième ordre, avec trois points doubles, a quatre tangentes doubles, dont les points de contact sont situés sur une même conique. Si ii' sont les points communs à la courbe $L^{(4)}$ et à une de ses tangentes doubles, la conique décrite par les points $a_1a_2a_3ii'$ sera conjuguée à elle-même, et par suite elle sera la perspective de deux coniques H superposées. On voit bien d'ailleurs que les plans tangents en i, i' ne peuvent pas être différents, car ils représenteraient quatre plans tangents menés par une même droite: ce qui est en opposition avec la classe de la surface (13.). Donc un même plan (représentant trois plans tangents consécutifs) touche la surface en i, i': et par conséquent, ce plan contient deux coniques H coïncidentes en une seule, dans chaque point de laquelle le même plan est tangent à la surface.

Ainsi nous arrivons à la conclusion *qu'entre les plans tangents de la surface* $J^{(4)}$, *il y en a quatre singuliers*, $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}_3$, *dont chacun contient une seule conique* ($\mathscr{H}$, $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$, $\mathscr{H}_3$) *et touche la surface tout le long de cette conique* *). Les droites situées dans ces plans sont tangentes à la surface, chacune en deux points: de plus, il est évident que toute tangente double de la surface, qui ne rencontre aucune des droites doubles oa, est située dans l'un des plans $\mathscr{P}$.

Et les tangentes de ces quatre coniques $\mathscr{H}$ sont les droites qui, sans s'appuyer

*) Kummer (ibid. p. 395).

sur une droite double oa, rencontrent la surface en quatre points consécutifs. Par conséquent, *le système de ces quatre coniques constitue le lieu des* points paraboliques *de la surface* $J^{(4)}$ *).

22. Les perspectives des coniques $\mathscr{H}$ sont les quatre coniques $\mathscr{K}$, dont chacune coïncide avec sa conjuguée. Les tangentes aux coniques $\mathscr{K}$, en a, sont les rayons doubles de l'involution des droites tangentes aux couples de coniques conjuguées: donc *les coniques* $\mathscr{H}$ *rencontrent les droites doubles oa aux points cuspidaux* ω, $\bar{\omega}$ (20.).

D'où il suit que *deux plans* $\mathscr{P}$ *se coupent suivant une droite tangente aux deux coniques* $\mathscr{H}$ *correspondantes, en un même point: et ce point est l'un des six points cuspidaux de la surface.* Autrement: les droites $\omega_1\varepsilon_1$, $\bar{\omega}_1\eta_1$, qui passent par les points cuspidaux de oa_1, et les autres droites analogues, relatives à oa_2 et oa_3, sont les arêtes du tétraèdre formé par les quatre plans $\mathscr{P}$.

Pour fixer les idées, supposons que

le plan	$\mathscr{P}$	contienne	les points	$\omega_1\omega_2\omega_3\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$,
»	$\mathscr{P}_1$	»	»	$\omega_1\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3\varepsilon_1\eta_2\eta_3$,
»	$\mathscr{P}_2$	»	»	$\bar{\omega}_1\omega_2\bar{\omega}_3\eta_1\varepsilon_2\eta_3$,
»	$\mathscr{P}_3$	»	»	$\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2\omega_3\eta_1\eta_2\varepsilon_3$;

et soient p, p_1, p_2, p_3 les sommets du même tétraèdre, de manière que ses arêtes contiendront les systèmes de points qui suivent:

$$\mathscr{P}\mathscr{P}_1 \equiv p_2p_3\omega_1\varepsilon_1, \qquad \mathscr{P}_2\mathscr{P}_3 \equiv pp_1\bar{\omega}_1\eta_1,$$
$$\mathscr{P}\mathscr{P}_2 \equiv p_3p_1\omega_2\varepsilon_2, \qquad \mathscr{P}_3\mathscr{P}_1 \equiv pp_2\bar{\omega}_2\eta_2,$$
$$\mathscr{P}\mathscr{P}_3 \equiv p_1p_2\omega_3\varepsilon_3, \qquad \mathscr{P}_1\mathscr{P}_2 \equiv pp_3\bar{\omega}_3\eta_3.$$

23. La droite $\omega_1\varepsilon_1$ est coupée en ω_1, ε_1 par les plans oa_2a_1, oa_2a_3, et en p_2, p_3 par les droites $\bar{\omega}_2\eta_2$, $\omega_2\varepsilon_2$, ou (ce qui est la même chose) par les plans tangents à la surface en $\bar{\omega}_2$, ω_2. Or ces quatre plans forment un faisceau harmonique (15.); donc l'arête p_2p_3 du tétraèdre $pp_1p_2p_3$ (et de même l'arête pp_1) est divisée harmoniquement par les arêtes oa_1, a_2a_3 du tétraèdre $oa_1a_2a_3$. Cela peut être répété pour les autres couples d'arêtes: *on a donc une telle relation de réciprocité entre les deux tétraèdres, que chaque couple d'arêtes opposées de l'un est divisée harmoniquement par deux arêtes*

*) En général, si une surface donnée a une droite *double,* cette droite est *quadruple* sur la surface Hessienne. Dans notre question, les trois droites oa et les quatre coniques $\mathscr{H}$ constituent ensemble la complète intersection de la surface du quatrième ordre, $J^{(4)}$, avec sa Hessienne, qui est une surface du huitième ordre.

opposées de l'autre. Et chaque couple d'angles dièdres opposés de l'un (des tétraèdres) est divisée harmoniquement par des plans passant par deux arêtes opposées de l'autre.

J'observe en outre que les quatre droites $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$, $\varepsilon_1\eta_2\eta_3$, $\eta_1\varepsilon_2\eta_3$, $\eta_1\eta_2\varepsilon_3$ (intersections du plan Π par les plans $\mathscr{P}$, et, par suite, tangentes doubles de la courbe $L^{(4)}$) forment un quadrilatère complet, dont les diagonales sont a_2a_3, a_3a_1, a_1a_2; car, ces dernières droites étant divisées harmoniquement par les couples de points $\varepsilon_1\eta_1$, $\varepsilon_2\eta_2$, $\varepsilon_3\eta_3$, il s'ensuit que les droites $\varepsilon_1\eta_1$, $\varepsilon_2\eta_2$, $\varepsilon_3\eta_3$ sont les côtés d'un triangle ayant ses sommets aux points a_1, a_2, a_3.

24. La conique $\mathscr{H}$ est inscrite dans le triangle $p_1p_2p_3$; ω_1, ω_2, ω_3 sont les points de contact (22.), et ε_1, ε_2, ε_3 sont les conjugués harmoniques des points de contact, par rapport aux couples de sommets du triangle circonscrit. Soient ii' les points où la conique $\mathscr{H}$ rencontre le plan Π; on sait que chacun de ces points forme, avec $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$, un système *équianharmonique*, c'est-à-dire un tel système dont les rapports anharmoniques fondamentaux sont égaux entre eux *). Analoguement pour les coniques $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$, $\mathscr{H}_3$, par rapport aux droites $\varepsilon_1\eta_2\eta_3$, $\eta_1\varepsilon_2\eta_3$, $\eta_1\eta_2\varepsilon_3$. Or ces quatre droites forment un quadrilatère, dont $a_1a_2a_3$ est le triangle diagonal; *donc les huit points* $ii'i_1i'_1i_2i'_2i_3i'_3$ *appartiennent à une même conique conjuguée aux triangles* $a_1a_2a_3$, $a_1\varepsilon_1\eta_1$, $a_2\varepsilon_2\eta_2$, $a_3\varepsilon_3\eta_3$ **), c'est-à-dire à une conique $L^{(2)}$ passant par les points doubles des trois involutions $(a_2a_3, \varepsilon_1\eta_1)$, $(a_3a_1, \varepsilon_2\eta_2)$, $(a_1a_2, \varepsilon_3\eta_3)$. Ces points doubles sont déterminés par les couples de droites tangentes en a_1, a_2, a_3 à la courbe $L^{(4)}$ (18.); donc $L^{(2)}$ coïncide avec la conique enveloppée par les six droites tangentes à $L^{(4)}$ dans ses points doubles.

(Cette coïncidence n'a pas lieu, si au plan Π on substitue un autre plan transversal quelconque; car, dans ce cas, les tangentes à $L^{(4)}$ en a_1 ne sont plus conjuguées harmoniques par rapport à a_1a_2, a_1a_3; etc).

On démontre aisément que la même conique $L^{(2)}$ est l'enveloppe d'une droite qui coupe la courbe $L^{(4)}$ en quatre points équianharmoniques. Réciproquement, la courbe $L^{(4)}$ est l'enveloppe d'une conique circonscrite au triangle $a_1a_2a_3$, laquelle coupe $L^{(2)}$ en quatre points équianharmoniques.

25. La conique $\mathscr{H}$ passe par les points $\omega_1\omega_2\omega_3ii'$, et touche en ω_1 la droite $\omega_1\varepsilon_1$; la conique $\mathscr{H}_1$ passe par les points $\omega_1\bar\omega_2\bar\omega_3i_1i'_1$, et touche en ω_1 la même droite $\omega_1\varepsilon_1$. Les points $\eta_1\omega_2\bar\omega_3$ sont en ligne droite, parce qu'ils appartiennent à deux plans, $\mathscr{P}_2$ et oa_2a_3; de même pour les points $\eta_1\bar\omega_2\omega_3$. En outre, les points $ii'i_1i'_1$ (intersections

*) *Introduzione* etc. 27; *Giornale di matematiche,* Napoli 1863, p. 319, 377. [Queste Opere, n. **42**].

**) J'ignore si cette propriété est connue, mais on la démontre avec facilité. Du reste, la situation des huit points i sur le périmètre d'une même conique peut être déduite aussi de ce qu'ils sont les points de contact de la courbe $L^{(4)}$ avec ses tangentes doubles (21.).

des coniques $\mathcal{H}\mathcal{H}_1$ par le plan Π) forment un quadrangle complet inscrit dans la conique $L^{(2)}$, dont $a_1\varepsilon_1\eta_1$ sont les points diagonaux (24). Par conséquent, les cônes dont le sommet commun soit η_1 et les bases soient les coniques $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_1$, ont les génératrices $\eta_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, i, i')$ communes, et au surplus ils sont touchés par le même plan, le long de la génératrice $\eta_1\omega_1$. Donc ces cônes coïncident entre eux; c'est-à-dire que les coniques $\mathcal{H}\mathcal{H}_1$ sont situées sur un même cône au sommet η_1. De même, ε_1 est le sommet d'un cône qui passe par les coniques $\mathcal{H}_2\,\mathcal{H}_3$; etc. En d'autres mots: *la tangente commune à deux coniques $\mathcal{H}$ et le sommet du cône qui passe par elles divisent harmoniquement l'un des côtés du triangle $a_1a_2a_3$.*

26. Les plans $oa_1\varepsilon_1$, $oa_2\varepsilon_2$, $oa_3\varepsilon_3$ coupent les côtés du triangle $a_1a_2a_3$ en trois points $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$, qui sont en ligne droite; donc les plans $oa_1\eta_1$, $oa_2\eta_2$, $oa_3\eta_3$ conjugués harmoniques de ceux-là (par rapport aux couples de plans passant par les droites doubles oa) rencontreront le plan Π au point ν pôle harmonique de la droite $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ par rapport au triangle $a_1a_2a_3$. Or ces trois derniers plans passent ensemble par p; les points o, ν, p sont donc en ligne droite. Il s'ensuit que les droites $o(p, p_1, p_2, p_3)$ rencontrent le plan Π en quatre points ν, ν_1, ν_2, ν_3, qui sont les pôles harmoniques des droites $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$, $\varepsilon_1\eta_2\eta_3$, $\eta_1\varepsilon_2\eta_3$, $\eta_1\eta_2\varepsilon_3$, par rapport au triangle $a_1a_2a_3$. Ces quatre points forment un quadrangle complet, dont les couples de côtés opposés sont

$$\begin{array}{ll} \nu\nu_1a_1\eta_1, & \nu_2\nu_3a_1\varepsilon_1, \\ \nu\nu_2a_2\eta_2, & \nu_3\nu_1a_2\varepsilon_2, \\ \nu\nu_3a_3\eta_3, & \nu_1\nu_2a_3\varepsilon_3, \end{array}$$

et par suite les points diagonaux sont a_1, a_2, a_3.

27. Je prends maintenant le quadrangle $\nu\nu_1\nu_2\nu_3$ comme base de cette *trasformation conique* que mon ami M. Beltrami a étudiée dans son intéressant mémoire *Intorno alle coniche di nove punti* *). Dans cette transformation, à un point m (du plan Π) *correspond* le point m' déterminé par les droites $m'(a_1, a_2, a_3)$ conjuguées harmoniques des droites $m(a_1, a_2, a_3)$, par rapport aux couples de côtés opposés du quadrangle, qui se croisent en a_1, a_2, a_3.

Les tangentes, en a, à la courbe $L^{(4)}$ sont des droites correspondantes, parce qu'elles divisent harmoniquement l'angle des droites $a(\varepsilon, \eta)$, côtés du quadrangle. Par conséquent, *à la courbe $L^{(4)}$ correspondra la conique $L^{(2)}$* touchée par les six tangentes de $L^{(4)}$ aux points doubles; et les points de contact de ces droites avec $L^{(2)}$ appartiendront aux côtés du triangle $a_1a_2a_3$.

Si l'on circonscrit au triangle $a_1a_2a_3$ une conique K, soit k son pôle harmonique

*) Memorie dell'Accademia di Bologna, serie 2ª, vol. IIº, 1863.

par rapport au même triangle, et D la droite polaire de k, par rapport à K. Soit k' le point correspondant à k; D′ la droite correspondante à la conique K; et K′ la conique correspondante à la droite D. Il est évident que les coniques K, K′ sont conjuguées (20.); le point k' est le pôle harmonique de K′ par rapport au triangle $a_1a_2a_3$, et, en outre, le pôle de D′ par rapport à K′.

La polaire de k par rapport à K′ et la polaire de k' par rapport à K sont une seule et même droite $\mathcal{D}$, qui passe par le points où les coniques conjuguées K, K′ rencontrent la courbe du quatrième ordre $L^{(4)}$.

Si les points kk' coïncident en un seul, ce qui arrive aux sommets du quadrangle fondamental, par ex. en ν, les droites DD′ et aussi $\mathcal{D}$ deviennent une seule et même droite, $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$; et les coniques KK′ se confondent avec la conique $\mathcal{K}$. Celle-ci est donc la conique polaire harmonique du point ν (par rapport au triangle $a_1a_2a_3$) et correspond (dans la transformation) à la droite $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$. Dès que cette droite passe par ε_1, point de a_2a_3, la conique correspondante sera touchée en a_1 par la droite $a_1\varepsilon_1$. Donc les côtés du triangle $\nu_1\nu_2\nu_3$ sont tangentes en a_1, a_2, a_3 à la conique $\mathcal{K}$ (22). D'où l'on conclut que *les quatre coniques $\mathcal{K}$ se touchent entre elles, deux à deux, aux points* a_1, a_2, a_3 (22.).

Les intersections ii' de la droite $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ par sa conique correspondante sont des points correspondants; et dès que ces points sont situés sur la courbe $L^{(4)}$, ils appartiendront aussi à la conique $L^{(2)}$: résultat déjà obtenu autrement (24.).

Le point ν a pour polaire la droite $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$, soit par rapport à la conique $\mathcal{K}$, soit par rapport à $L^{(2)}$: donc ces deux coniques se touchent entre elles en i, i'; ce qui est évident aussi, parce que la droite $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ est une tangente double de la courbe $L^{(4)}$ (23.).

28. Concevons maintenant une surface Σ du second degré, passant par le six points cuspidaux $\omega\bar{\omega}$. Or ces points divisent harmoniquement les segments oa (19.); le point o est donc le pôle du plan Π par rapport à Σ. On a encore trois conditions libres pour déterminer complètement cette surface: je dispose de deux entre elles, de manière que le plan tangent en ω_1 passe par la droite a_2a_3. Ainsi les droites oa_1, a_2a_3 deviennent réciproques (par rapport à Σ); et par suite le plan tangent (à Σ) en $\bar{\omega}_1$ passe par a_2a_3, et le plan polaire de a_1 est oa_2a_3. Cela posé, la droite réciproque de oa_2 passe par a_1 et est située dans le plan Π. Maintenant, je dispose de la troisième condition libre de manière que Σ soit touchée en ω_2 par le plan $a_1\omega_2a_3$; alors la droite a_3a_1 sera réciproque de oa_2; oa_3a_1 sera le plan polaire de a_2; et le plan tangent en $\bar{\omega}_2$ passera par a_3a_1. Ainsi la surface Σ est pleinement déterminée: les droites oa_3, a_1a_2 sont réciproques et, par suite, les plans tangents en ω_3, $\bar{\omega}_3$ passent par a_1a_2. Donc le tétraèdre $oa_1a_2a_3$ est conjugué à la surface Σ; et les droites $\omega\varepsilon$, $\bar{\omega}\eta$ sont tangentes à cette même surface en ω, $\bar{\omega}$.

La conique $\mathcal{H}$ et la surface Σ ont en commun les points $\omega_1\omega_2\omega_3$ et les droites tangentes en ces points: donc $\mathcal{H}$ est située entièrement sur Σ. C'est-à-dire que *les quatre coniques $\mathcal{H}$ résultent de l'intersection de la surface du quatrième ordre* $J^{(4)}$ *par une seule et même surface du second degré,* Σ, *conjuguée au tétraèdre* $oa_1a_2a_3$.

29. Cette propriété n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus général que je vais démontrer.

J'observe en premier lieu que, si une droite G rencontre une droite double oa en un point d et ensuite la surface $J^{(4)}$ en deux autres points ss_1, on pourra mener (13.) par G deux plans tangents P, P_1, par-dessus le plan Goa qui coupe la surface suivant une conique (15.) passant par ss_1. Les deux coniques H situées dans P rencontrent G aux couples de points ds, ds_1; et de même pour les deux coniques situées dans P_1. D'où l'on tire cette conséquence: que si, entre ces quatre coniques, l'on en choisit deux, qui ne soient pas dans un même plan et qui n'aient pas leurs tangentes en d situées dans un même plan passant par oa, ces deux coniques auront, outre d, un autre point commun s.

Cela posé, qu'on circonscrive au triangle $a_1a_2a_3$ une première conique K, dont soient a_1l_1, a_2l_2, a_3l_3 les tangentes aux sommets. Après, qu'on circonscrive au même triangle une deuxième conique K_1 qui soit touchée en a_1 par la droite $a_1l'_1$ conjuguée de a_1l_1 (dans l'involution dont il a été question ailleurs (20.)); et soient $a_2\lambda_2$, $a_3\lambda_3$ ses tangentes en a_2, a_3. Décrivons ensuite, autour du même triangle, une troisième conique K_2; qui touche en a_2, a_3 les droites $a_2l'_2$, $a_3\lambda'_3$ conjuguées de a_2l_2, $a_3\lambda_3$. Enfin, soit K_3 la conique décrite par $a_1a_2a_3$, qui est tangente en a_2, a_3 aux droites $a_2\lambda'_2$, $a_3l'_3$ conjuguées de $a_2\lambda_2$, a_3l_3. Les tangentes en a_1 aux coniques K_2, K_3 seront évidemment deux droites conjuguées $a_1\lambda_1$, $a_1\lambda'_1$.

Désignons par H, H_1, H_2, H_3 les coniques, situées sur la surface $J^{(4)}$, dont les perspectives sur le plan Π (le centre de projection étant toujours en o) sont les quatre coniques susdites K, K_1, K_2, K_3.

Or deux droites conjuguées (dans le plan Π) issues du point a sont les traces des plans tangents à la surface en un même point de oa; les coniques H, H_1 ont donc un point commun d_1, sur oa_1. Ces deux coniques ne sont pas dans un même plan, car leurs perspectives K, K_1 n'ont pas en a_2, a_3 des tangentes conjuguées; par conséquent, H, H_1 auront, outre d_1, un autre point commun s_1, dont la projection est la quatrième intersection des coniques K, K_1. De même, les coniques H_2, H_3 auront en commun un point δ_1 sur oa_1 et un autre point σ_1; etc. Soient (d_2, s_2), (δ_2, σ_2), (d_3, s_3), (δ_3, σ_3) les points analogues correspondants aux couples de coniques HH_2, H_3H_1, HH_3, H_1H_2.

Les coniques H, H_1, sans être dans un même plan, ont deux points communs d_1, s_1. On pourra donc décrire par ces deux coniques et par le point δ_1 une surface du second degré, Φ. Cette surface passe par cinq points $\delta_1 d_2 \delta_3 s_2 \sigma_3$ de la conique H_2 et par cinq points $\delta_1 \delta_2 d_3 \sigma_2 s_3$ de la conique H_3; donc *les quatre coniques* $H H_1 H_2 H_3$ *sont situées dans une seule et même surface* Φ *du second degré.*

Les plans de ces coniques coupent la surface du quatrième ordre $J^{(4)}$ suivant quatre autres coniques $H' H'_1 H'_2 H'_3$, qui résulteront par suite de l'intersection de $J^{(4)}$ par une autre surface Φ' du second degré *).

Bologne, 12 février 1864.

---

*) Dans ce mémoire j'ai employé la considération du système des coniques polaires relatives à une courbe du troisième ordre (2.), et cela seulement parce que les notations qui en résultent sont très-simples. Mais on obtient les mêmes propriétés et on les démontre absolument de la même manière, lorsqu'on prend pour point de départ un réseau *quelconque* de coniques.