53.

SOPRA ALCUNE QUESTIONI NELLA TEORIA DELLE CURVE PIANE *). [38]

Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, tomo VI (1864), pp. 153-168.

Sulla generazione di una curva mediante due fasci projettivi.

1. Siano dati due fasci projettivi di curve. Le curve del primo fascio abbiano in un punto-base o la tangente comune, e questo punto giaccia anche sulla curva del secondo fascio che corrisponde a quella curva del primo per la quale o è un punto doppio. In questo caso, è noto (*Introd.* 51, b) che il luogo delle intersezioni delle curve corrispondenti dei due fasci passa due volte per o. Ora ci proponiamo di determinare le due tangenti del luogo nel punto doppio.

2. *Lemma.* Siano (U, V, W,...), (U', V', W',...) le curve corrispondenti di due fasci projettivi dello stesso ordine n, i quali generano una curva K dell'ordine $2n$, passante pei punti-base dei due fasci.

Le curve U, U' individuano un nuovo fascio i cui punti-base sono in K; ogni curva U'' di questo fascio segherà K in altri n^2 punti, pei quali e per un punto fissato ad arbitrio in K descrivendo una curva d'ordine n, questa segherà K in altri n^2-1 punti *fissi*, qualunque sia la curva U'' scelta nel fascio (UU') (*Introd.* 54, a). Se il punto arbitrario è un punto-base del fascio (VV'), esso cogli altri n^2-1 punti fissi costituirà la base (VV'). Infatti la curva U sega K in $2n^2$ punti, de' quali n^2 giacciono in U', e gli altri n^2 in V; e così U' sega K in $2n^2$ punti de' quali n^2 appartengono ad U e gli altri a V'. Dunque una qualsivoglia curva U'' del fascio (UU') segherà K in altri n^2 punti

*) Queste brevi note sono destinate ad emendare o completare alcuni punti dell'*Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane.* [Queste Opere, n. **29** (t. 1.°)]. Nell'impresa di scemare alquanto i moltissimi difetti di questo libro, io sono stato fraternamente consigliato e ajutato dal mio egregio amico, il ch. Dr. Hirst.

situati in una curva V'' del fascio (VV'). Donde segue che i fasci (U, U', U'',...), (V, V', V'',...) sono projettivi e che la curva da essi generata è ancora K.

Analogamente le seconde n^2 intersezioni di U'' con K saranno anche situate in una curva W'' del fascio (WW'). E per tal modo otteniamo un nuovo fascio (U'', V'', W'',...) projettivo ai dati, i punti-base del quale giacciono in K. Siccome poi le curve U'', V'', W'',... appartengono rispettivamente ai fasci (UU'), (VV'), (WW'),... i cui punti-base sono tutti in K, così il fascio (U'', V'', W'',...) insieme con l'uno o con l'altro dei dati genera di nuovo la medesima curva K. Ossia:

Dati due fasci projettivi (U, V, W,...), (U', V', W',...) *di curve dello stesso ordine, i quali generano una curva* K; *se* U'' *è una curva scelta ad arbitrio nel fascio* (UU'), *si possono determinare altre curve* V'', W'',... *che appartengano rispettivamente ai fasci* (VV'), (WW'),... *e formino con* U'' *un nuovo fascio projettivo ai dati e generante con ciascuno di questi la medesima curva* K.

3. Siano ora (U, V,...), (U', V',...) due fasci projettivi di curve d'ordine qualunque, i quali generino una curva K. Se L, L' sono due linee arbitrarie, i due fasci projettivi (UL, VL,...), (U'L', V'L',...) che si ottengono accoppiando L o L' a ciascuna curva dell'uno o dell'altro fascio dato, genereranno evidentemente un luogo composto delle tre curve KLL'. Le linee L, L' siano poi scelte di tale ordine che i due nuovi fasci risultino dello stesso ordine; e, secondo il teorema precedente, si formi un nuovo fascio ($\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$,...) projettivo ai precedenti, le cui curve appartengano rispettivamente ai fasci (UL, U'L'), (VL, V'L'),... e siano tali che il nuovo fascio insieme col precedente (U'L', V'L',...) generi il luogo KLL'. Allora è evidente che i due fasci projettivi ($\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$,...) e (U', V',...) genereranno il luogo KL.

4. Supponiamo ora che tutte le curve del fascio (UV) tocchino una stessa retta R in uno stesso punto o; sia V la curva per la quale o è un punto doppio; e la corrispondente curva V' passi anch'essa per o. Allora K avrà due rami incrociati in o: quali saranno le tangenti di K nel punto medesimo?

Si scelga per L una linea non passante per o; ed L' sia composta della retta R e di un'altra linea non passante per o. In tal caso le curve del fascio (UL, U'L',...) avranno in o la stessa tangente R: sia $\mathcal{U}$ quella curva di questo fascio, per la quale o è un punto doppio. Questo punto è doppio per le due curve complesse VL, V'L'; epperò esso sarà doppio per tutte le curve del fascio (VL, V'L'), fra le quali trovasi $\mathcal{V}$. Ora, la curva K (insieme con L) è generata dai due fasci projettivi (U', V',...), ($\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$,...) nel secondo de' quali tutte le curve hanno un punto doppio in o; dunque (in virtù del teorema *Introd.* 52, [39] ove si faccia $r=0$, $r'=2$) le tangenti di K in o sono le tangenti della curva $\mathcal{V}$ del secondo fascio la quale corrisponde a quella curva V' del primo che passa per o.

Siccome $\mathcal{V}$ appartiene al fascio (VL, V'L'), così le due tangenti di K in o sono raggi coniugati in una involuzione quadratica nella quale le tangenti di V sono coniugate fra loro, e la tangente di V' è coniugata con R (*Introd.* 48).

Dimostrazione del teorema fondamentale per le polari miste. [40]

5. *Lemma* 1.° La polare *) di un punto qualunque passa pei punti doppi della curva fondamentale (*Introd.* 16).

Lemma 2.° Le polari di un punto fisso rispetto alle curve di un fascio formano un altro fascio (*Introd.* 84, a).

Lemma 3.° Se la curva fondamentale è composta di una retta e di un'altra curva, e se il polo è preso in questa retta, la polare è composta della retta medesima e della polare relativa alla seconda curva (Questa proprietà consegue dalla definizione delle polari e dal teorema *Introd.* 17).

Lemma 4.° Se per gli n^2 punti in cui una curva d'ordine n è incontrata da n rette passanti per un punto o, si descrive un'altra curva dello stesso ordine, il punto o ha la stessa polare rispetto alle due curve (Infatti le polari di o rispetto alle due curve hanno $n-1$ punti comuni sopra ciascuna delle n rette date).

6. Sia ora data una curva (fondamentale) C_n d'ordine n, e siano o, o' due punti qualisivogliano dati. Indichiamo con $P_{oo'}$ la polare di o rispetto alla polare di o'; ed analogamente con $P_{o'o}$ la polare di o' rispetto alla polare di o; dimostreremo che $P_{oo'}$ e $P_{o'o}$ coincidono in una sola e medesima curva.

Si conduca per o' una retta arbitraria R, e sia J_n il fascio delle n rette condotte da o alle n intersezioni di C_n ed R. Le altre $n(n-1)$ intersezioni dei luoghi C_n, J_n giaceranno tutte (*Introd.* 43,b) in una curva C_{n-1} d'ordine $n-1$. Siccome C_n appartiene al fascio (J_n, RC_{n-1}), così la polare di o' rispetto a C_n apparterrà (lemma 2°) al fascio (φ_{n-1}, $R\Gamma_{n-2}$), ove φ_{n-1} è il fascio di $n-1$ rette concorrenti in o che costituiscono la polare di o' rispetto a J_n (*Introd.* 20), e Γ_{n-2} è la polare di o' rispetto a C_{n-1}: la qual curva Γ_{n-2} accoppiata con R forma la polare di o' rispetto al luogo RC_{n-1} (lemma 3°). Dal lemma 4° poi segue che la curva $P_{oo'}$ non è altra cosa che la polare di o rispetto ad $R\Gamma_{n-2}$, epperò essa passa per le $n-2$ intersezioni di Γ_{n-2} ed R (lemma 1°).

Da ciò che C_n passa per le n^2 intersezioni dei luoghi J_n ed RC_{n-1}, segue ancora (lemma 4°) che la polare di o rispetto a C_n coincide colla polare di o rispetto ad RC_{n-1}, epperò passa per le $n-1$ intersezioni di C_{n-1} ed R (lemma 1°). La curva $P_{o'o}$ passerà adunque per gli $n-2$ centri armonici del sistema formato dalle anzidette

---

*) S'intenda sempre *prima polare*.

$n-1$ intersezioni, rispetto al polo o'; cioè $P_{o'o}$ passerà per gli $n-2$ punti in cui R sega Γ_{n-2}.

Da ciò si raccoglie che le polari miste $P_{oo'}$, $P_{o'o}$ hanno $n-2$ punti comuni sopra una trasversale condotta arbitrariamente pel punto o'. Dunque esse non sono altro che una sola e medesima curva d'ordine $n-2$.

7. Abbiansi ora nel piano $\mu+1$ punti qualisivogliano $o, o', o'', \dots o^{(\mu)}$, e si indichi con $P_{oo'o''}$ la polare di o rispetto a $P_{o'o''}$, con $P_{oo'o''o'''}$, la polare di o rispetto a $P_{o'o''o'''}$ ecc. Dal teorema ora dimostrato segue manifestamente che la polare $P_{oo'o''\dots o^{(\mu)}}$ rimane la stèssa curva, in qualunque ordine siano presi i poli $o, o', o'', \dots o^{(\mu)}$. Se poi si suppone che r di questi punti coincidano in un solo o, e che gli altri $\mu+1-r=r'$ si riuniscano insieme in o', avremo il teorema generale:

Per una qualsivoglia curva fondamentale, la polare $(r)^{ma}$ di un punto o rispetto alla polare $(r')^{ma}$ di un altro punto o' coincide colla polare $(r')^{ma}$ di o' rispetto alla polare $(r)^{ma}$ di o. [41]

Sui punti doppi delle curve di un fascio. [42]

8. Le curve di un dato fascio d'ordine n abbiano un punto $(r)^{plo}$ o comune, e siano o', o'' due punti fissati ad arbitrio nel piano (*Introd.* 88). Le polari di o rispetto a quelle curve hanno in o un punto $(r)^{plo}$ colle stesse tangenti delle curve date, e queste tangenti formano un'involuzione di grado r. Invece le polari di o' hanno in o un punto $(r-1)^{plo}$, e le loro tangenti sono aggruppate in un'involuzione di grado $r-1$. Le due involuzioni sono projettive ed un gruppo qualunque della seconda è (*Introd.* 74) la polare di o' rispetto al fascio di rette costituenti il corrispondente gruppo della prima.

I due fasci di polari di o ed o', essendo projettivi, generano una curva d'ordine $2(n-1)$, la quale ha in o un punto $(2r-1)^{plo}$ e per tangenti i raggi comuni alle due involuzioni, i quali sono evidentemente la retta oo' ed i raggi doppi dell'involuzione di grado r (*Introd.* 19).

Analogamente le polari di o ed o'' generano un'altra curva d'ordine $2(n-1)$, passante $2r-1$ volte per o ed avente ivi per tangenti la retta oo'' ed i raggi doppi dell'involuzione di grado r.

Per tal modo le due curve d'ordine $2(n-1)$ hanno in o un punto $(2r-1)^{plo}$ e $2(r-1)$ tangenti comuni: epperò il punto o rappresenta $(2r-1)^2+2(r-1)$ intersezioni delle medesime. Siccome poi o tiene anche le veci di r^2 punti-base del fascio delle polari di o, e siccome $(2r-1)^2+2(r-1)-r^2=(r-1)(3r+1)$, così:

Se le curve di un fascio hanno un punto $(r)^{plo}$ comune, questo equivale ad $(r-1)(3r+1)$ punti doppi del fascio medesimo.

9. Supponiamo ora che le curve del fascio dato abbiano, nel punto $(r)^{plo}$ o, anche le r tangenti comuni: nel qual caso una di quelle, chiamisi C_n, avrà $r+1$ rami incrociati in o (*Introd.* 48).

Le polari di o hanno un punto $(r)^{plo}$ in o; ma la polare relativa a C_n passa $r+1$ volte per questo punto. Il medesimo punto è multiplo secondo $r-1$ per le polari di o', ad eccezione di quella che è relativa a C_n, la quale ha r rami incrociati in o. I due fasci di polari essendo projettivi, generano una curva d'ordine $2(n-1)$ con un punto $(2r)^{plo}$ in o (*Introd.* 51).

Analogamente le polari di o e di o'' generano un'altra curva dello stesso ordine, avente anch'essa $2r$ rami incrociati in o: ond'è che questo punto fa le veci di $4r^2$ intersezioni delle due curve d'ordine $2(n-1)$. D'altra parte o rappresenta r^2+r punti-base del fascio delle polari di o (*Introd.* 32); dunque in o sono riuniti $3r^2-r$ punti doppi del fascio dato.

10. Se delle tangenti comuni alle curve date in o ve ne sono s coincidenti in una retta R, questa toccherà in o (*Introd.* 74) s rami di ciascuna polare di o ed $s-1$ rami di ciascuna polare di o' e di o'': quindi anche ciascuna delle due curve d'ordine $2(n-1)$ avrà in o un numero $s-1$ di tangenti riunite in R. In questo caso adunque, il punto o rappresenta $4r^2+s-1$ intersezioni delle due curve suaccennate. Ossia:

Se le curve di un fascio hanno uno stesso punto $(r)^{plo}$ ed in questo tutte le tangenti comuni, delle quali ve ne sia un numero s di coincidenti in una retta unica, quel punto tien luogo di $r(3r-1)+s-1$ punti doppi del fascio.

Ed in particolare, se $s=r$, cioè se tutte le tangenti coincidono in una sola retta, il punto multiplo comune equivale a $3r^2-1$ punti doppi del fascio.

11. Si supponga invece che una sola curva C_n, tra quelle del dato fascio, passi r volte per un punto o ed ivi abbia s tangenti riunite in una retta R. Allora la polare di o rispetto a C_n avrà r rami incrociati in o colle stesse tangenti di C_n. E la polare di un punto qualunque o' rispetto alla medesima curva C_n avrà in o un punto $(r-1)^{plo}$ con $s-1$ tangenti coincidenti in R. Quindi i fasci delle polari di o e di o' genereranno una curva d'ordine $2(n-1)$, avente un punto $(r-1)^{plo}$ in o ed $s-1$ tangenti riunite in R (*Introd.* 51,g). Una curva analoga colle stesse proprietà sarà generata dalle polari di o e da quelle di un altro punto qualunque o'': e per queste due curve d'ordine $2(n-1)$ il punto o terrà luogo di $(r-1)^2+s-1$ intersezioni; dunque:

Se in un fascio vi ha una curva dotata di un punto $(r)^{plo}$ con s tangenti coincidenti, questo punto fa le veci di $(r-1)^2+s-1$ punti doppi del fascio.

12. Se il punto o, che è $(r)^{plo}$ per C_n, appartiene anche (come punto semplice) alle altre curve del dato fascio, le quali in tal caso avranno ivi un contatto $(r)^{punto}$, le polari di o passano tutte per o; epperò in questo punto si taglieranno r rami di ciascuna delle

curve d'ordine $2(n-1)$ generate dai fasci di polari. Ne segue che queste curve hanno r^2+s-1 intersezioni coincidenti in o. Ma in questo punto sono anche riuniti r punti-base del fascio delle polari di o; dunque:

Se una curva di un fascio passa r volte per uno de' punti base ed ha ivi s tangenti riunite, quel punto tien luogo di $r(r-1)+s-1$ *punti doppi del fascio.* [43]

Sulle reti geometriche d'ordine qualunque.

13. Una rete di curve d'ordine n (*Introd.* 92) è dessa in generale una rete di prime polari? Siccome una rete è determinata da tre curve, così è da ricercarsi se, date tre curve A_1, A_2, A_3 d'ordine n e non appartenenti ad uno stesso fascio, sia possibile di determinare tre punti a_1, a_2, a_3 (non in linea retta) ed una curva d'ordine $n+1$ rispetto alla quale le tre curve date siano le prime polari di a_1, a_2, a_3.

La curva fondamentale ed i tre poli dipendono da $\frac{1}{2}(n+1)(n+4)+6$ condizioni: mentre se si domanda l'identità delle tre curve date colle polari dei tre punti, bisognerà sodisfare a $\frac{3}{2}n(n+3)$ condizioni. La differenza $(n-2)(n+4)$ di questi numeri è nulla soltanto per $n=2$. Eccettuato adunque il caso di $n=2$, una rete di curve non è in generale una rete di prime polari. [44]

14. Consideriamo pertanto una rete affatto generale, la quale sia individuata da tre curve A_1, A_2, A_3 d'ordine n; e sia A_0 un'altra curva della rete, tale che tre qualunque delle quattro curve $A_0\, A_1\, A_2\, A_3$ non appartengano ad uno stesso fascio. Fissiamo ad arbitrio nel piano quattro punti $a_0\, a_1\, a_2\, a_3$, tre qualunque dei quali non siano in linea retta, e consideriamoli come corrispondenti alle quattro curve anzidette. Ciò premesso, i punti del piano e le curve della rete si possono far corrispondere fra loro, in modo che a punti in linea retta corrispondano curve di un fascio (projettivo alla punteggiata). Se consideriamo dapprima una retta che unisca due de' punti dati, per es. a_0a_1, la projettività fra i punti della retta a_0a_1 e le curve del fascio A_0A_1 sarà determinata dalla condizione che ai punti a_0, a_1 corrispondano le curve A_0, A_1, ed al punto d'intersezione delle rette a_0a_1, a_2a_3 corrisponda la curva comune ai fasci A_0A_1, A_2A_3: poste le quali cose, ad un altro punto qualunque di a_0a_1 corrisponderà una curva affatto individuata del fascio A_0A_1.

Per una retta qualunque R, ai punti in cui essa è segata da tre lati del quadrangolo $a_0a_1a_2a_3$ corrispondono tre curve già determinate in ciò che precede, le quali apparterranno necessariamente ad uno stesso fascio: quindi ad un quarto punto qualsivoglia in R corrisponderà una determinata curva del fascio medesimo; e viceversa. — E la curva A corrispondente ad un dato punto a si troverà considerando questo come l'intersezione di due rette (che per semplicità si potranno condurre rispettivamente per due de' punti dati) ed assumendo la curva comune ai due fasci relativi alle rette medesime.

15. Per tal modo ad un punto a corrisponde una certa curva A della rete (comune a tutti i fasci relativi alle rette che passano per a), e viceversa ad una curva A della rete corrisponde un punto individuato a (comune a tutte le rette i cui fasci corrispondenti contengano la curva A).

Tutte le curve della rete che passano per uno stesso punto a formano un fascio, epperò corrispondono ai punti di una certa retta R; e reciprocamente questa retta contiene i punti corrispondenti a quelle curve della rete che passano per certi n^2 punti fissi, uno de' quali è a. Onde possiamo dire che ad un punto qualunque a corrisponde una certa retta R (luogo de' punti le cui curve corrispondenti A passano per a); ma viceversa ad una retta R, fissata ad arbitrio, corrispondono n^2 punti (costituenti la base del fascio delle curve A corrispondenti ai punti di R).

Dunque ad un punto del piano corrispondono una curva A della rete ed una retta, e viceversa ad una curva della rete corrisponde un punto individuato, mentre ad una retta corrispondono n^2 punti. E dalle cose precedenti segue:

Se la curva A *di un punto a passa per un altro punto a', viceversa la retta* R *di a passa per a; e reciprocamente.*

16. Quale è il luogo dei punti che giacciono nelle rispettive curve A, ovvero (ciò che è la medesima cosa, in virtù del teorema precedente) nelle corrispondenti rette R? Sia T un'arbitraria trasversale: ad un punto a di questa corrisponde una curva A che sega T in n punti a'. Viceversa, se si prende ad arbitrio in T un punto a', le curve A passanti per a' corrispondono ai punti di una retta R, che incontra T in un punto a. Cioè ad un punto a corrispondono n punti a', e ad un punto a' corrisponde un punto a; epperò la trasversale T contiene $n+1$ punti del luogo di cui si tratta. Dunque:

Il luogo di un punto situato nella corrispondente curva A *è una curva* K *d'ordine $n+1$.*

Quale è l'inviluppo delle rette R che contengono uno de' loro punti corrispondenti? Sia a un punto arbitrario; le rette passanti per a hanno i loro punti corrispondenti situati nella curva A del punto a, la quale sega la curva K (del teorema precedente) in $n(n+1)$ punti; ciascuno de' quali corrisponde alla retta R che lo unisce ad a. Dunque:

L'inviluppo di una retta R *che passi per uno degli n^2 punti che le corrispondono è una curva* H *della classe $n(n+1)$.*

Il punto a apparterrà ad H, se due di quelle rette che uniscono a alle intersezioni di A e K coincidono, cioè se A tocca K; dunque:

La curva H *è l'inviluppo delle rette* R *che corrispondono ai punti della curva* K, *ed è anche il luogo dei punti ai quali corrispondono curve* A *che tocchino* K.

Quando le curve della data rete sono le prime polari de' loro punti corrispondenti rispetto ad una curva fondamentale, in questa coincidono insieme le due curve H e K.

17. Ma anche nel caso più generale sussistono quasi tutte le proprietà dimostrate nell'*Introduzione* per un sistema di prime polari: anzi rimangono invariate le stesse dimostrazioni; e ciò perchè quelle proprietà e quelle dimostrazioni in massima parte dipendono non già dalla connessione polare delle curve della rete con una curva fondamentale, ma piuttosto dalla determinabilità *lineare* delle medesime per mezzo di tre sole fra esse. Così si hanno i seguenti enunciati, che sussistono per una rete qualsivoglia e si dimostrano col soccorso della definizione delle reti e dei teoremi superiori (15, 16).

Se un punto percorre una curva C_m *d'ordine* m, *la corrispondente retta* R *inviluppa una curva* L *della classe* mn, *che è anche il luogo di un punto al quale corrisponda una curva* A *tangente a* C_m. *Se* C_m *non ha punti multipli, l'ordine di* L *è* $m(m+2n-3)$; *ma questo numero è diminuito di* $r(r-1)+s-1$ *se* C_m *ha un punto* $(r)^{plo}$ *con* s *tangenti coincidenti.*

Da questo teorema segue che il numero delle curve A che toccano due curve C_m, $C_{m'}$ è eguale al numero delle intersezioni delle due corrispondenti curve L, gli ordini delle quali sono conosciuti.

Alle cuspidi di C_m corrispondono le tangenti stazionarie di L, e siccome si conoscono così di questa curva la classe, l'ordine ed il numero de' flessi, si potranno determinare, per mezzo delle formole di Plücker, i numeri de' punti doppi, delle tangenti doppie e delle cuspidi della medesima curva L. Questi numeri poi esprimono quante curve A hanno un doppio contatto con C_m, quante un contatto tripunto colla stessa C_m, ecc. (*Introd.* 103).

18. *Il luogo di un punto* p *le cui rette polari relative alle curve* A *della rete passino per uno stesso punto* o *è una curva dell'ordine* $3(n-1)$, *che si può chiamare la* Hessiana *o la* Jacobiana *della rete* [45], *e che può essere definita anche come il luogo dei punti di contatto fra le curve della rete, o il luogo dei punti doppi delle curve medesime* (*Introd.* 90a, 92, 95).

Il luogo di un punto o *nel quale si seghino le rette polari di uno stesso punto* p, *rispetto alle curve della rete, è una curva d'ordine* $3(n-1)^2$, *che si può chiamare la curva* Steineriana *della rete* (*Introd.* 98, a).

Quindi ad ogni punto p della Jacobiana corrisponde un punto o della Steineriana, e reciprocamente: e l'inviluppo della retta po, la quale tocca in p tutte le curve della rete che passano per questo punto, è una curva della classe $3n(n-1)$ (*Introd.* 98, b).

Il luogo di un punto a *al quale corrisponda una curva* A *dotata di un punto doppio* p *è una curva* Σ *dell'ordine* $3(n-1)^2$.

La curva Σ coincide colla Steineriana quando le curve A sono le prime polari de' punti corrispondenti, rispetto ad una curva fondamentale (*Introd.* 88, d).

La retta R che corrisponde al punto p tocca (*Introd.* 118) in a la curva Σ; ossia: *La curva* Σ *è l'inviluppo delle rette* R *che corrispondono ai punti della Jacobiana.*

Di qui si può immediatamente concludere la classe della curva Σ, non che le singolarità della medesima, e si avranno quindi le formole (*Introd.* 119-121) esprimenti: quanti fasci vi siano in una data rete qualsivoglia le curve de' quali si tocchino in due punti distinti, o abbiano fra loro un contatto tripunto; e quante curve contenga la rete le quali siano dotate di due punti doppi o di una cuspide.

19. E qui giova notare che quelle formole presuppongono la Jacobiana sprovveduta d'ogni punto multiplo. Ma è ben facile di assegnare le modificazioni che subirebbero i risultati medesimi quando la Jacobiana avesse punti multipli.

Se le curve di una rete hanno d punti comuni con tangenti distinte, ed altri k punti comuni ne' quali esse si tocchino, la Jacobiana avrà (*Introd.* 96, 97) in ciascun di quelli un punto doppio, ed in ciascun di questi un punto triplo con due tangenti coincidenti nella tangente comune alle curve della rete [46]. Ne segue che quei punti equivalgono a $2d+4k$ intersezioni della Jacobiana con una qualunque delle curve della rete, epperò (*Introd.* 118, b) la classe di Σ sarà

$$3n(n-1)-2d-4k.$$

Supponiamo poi che, astrazione fatta dai punti comuni alle curve della rete, la Jacobiana abbia altri δ punti doppi e $\varkappa$ cuspidi. Allora (*Introd.* 103) l'ordine del luogo di un punto a cui corrisponda una curva A tangente alla Jacobiana sarà

$$3(n-1)(5n-6)-2(d+\delta)-3\varkappa-7k; \quad [47]$$

epperò il numero dei flessi di Σ sarà (*Introd.* 118, d)

$$3(n-1)(4n-5)-2(d+\delta)-3\varkappa-7k, \quad [48]$$

donde si concluderanno poi, colle formole di Plücker, le altre singolarità della curva.

Se le curve della rete avessero un punto $(r)^{plo}$ comune, il medesimo sarebbe multiplo secondo $3r-1$ per la Jacobiana. Siccome poi un fascio qualunque della rete conterrà, oltre a quel punto, solamente altri $3(n-1)^2-(r-1)(3r+1)$ punti doppi (8), così l'ordine di Σ subirà in questo caso la diminuzione di $(r-1)(3r+1)$ unità (*Introd.* 88, d) *), ecc.

*) { E la classe di Σ subirà la diminuzione $r(3r-1)$. }

20. *Se una curva* C_m *sega la Jacobiana in* $3m(n-1)$ *punti* p, *la curva* Σ *toccherà ne' corrispondenti* $3m(n-1)$ *punti* a *il luogo* L *dei punti ai quali corrispondono curve* A *tangenti a* C_m (*Introd.* 122). Ecc. ecc. [49]

Sulle reti di curve di second'ordine.

21. Data una rete di coniche, consideriamole come polari relative ad una curva di terz'ordine incognita, e cerchiamone i poli. Siano A_1, A_2, A_3 tre coniche della rete, non circoscritte ad uno stesso quadrangolo: e si supponga, ciò che evidentemente è lecito senza punto scemare la generalità della ricerca, che A_1, A_2 siano due paja di rette rispettivamente incrociate in o_1, o_2; ed A_3 passi per questi due punti. Sia poi o_3 il terzo punto diagonale del quadrangolo formato dalle quattro intersezioni di A_1, A_2; e si chiamino a_1, a_2, a_3 i poli incogniti delle tre coniche. Siccome la retta polare di a_2 rispetto ad A_1 dee coincidere (6) colla retta polare di a_1 rispetto ad A_2, così tale polare sarà necessariamente la retta o_1o_2; epperò a_1, a_2 saranno rispettivamente situati in o_2o_3, o_1o_3. La polare di a_1 rispetto ad A_3 dev'essere anche la polare di a_3 rispetto ad A_1, dunque passerà per o_1; cioè a_1 giace anche sulla tangente ad A_3 in o_1. Analogamente a_2 è situato nella tangente ad A_3 in o_2.

Trovati così a_1, a_2, siano $o_1\omega_1$, $o_2\omega_2$ le loro polari rispetto ad A_3: queste rette saranno anche le polari di a_3 rispetto ad A_1, A_2: dunque a_3 è l'intersezione della coniugata armonica di $o_1\omega_1$ rispetto alle due rette A_1, colla coniugata armonica di $o_2\omega_2$ rispetto alle due rette A_2.

Ed ora si potrà costruire il polo a di qualunque altra conica A della rete: infatti il punto a sarà, rispetto ad A_3, il polo di quella retta che è la polare di a_3 rispetto ad A.

Viceversa, dato un punto a, si potrà determinare la sua conica polare A per es. nel seguente modo. Si cerchi la retta R che unisce i poli di due coniche della rete passanti per a. La conica richiesta A sarà quella rispetto alla quale a è il polo della retta R.

Ed ecco come si possono determinare le intersezioni della cubica fondamentale con una trasversale qualunque T. Se x è un punto in T, la sua conica polare sega T in due punti x'. Viceversa, se si prende in T un punto x', le coniche polari passanti per x' hanno i loro poli nella retta polare di questo punto, la quale segherà T in un punto x. Quindi le coppie di punti x' formano un'involuzione (quadratica) projettiva alla serie semplice de' punti x. I tre punti comuni alle due serie sono quei punti di T che giacciono nelle rispettive coniche polari, cioè sono i punti ove la cubica fondamentale è incontrata dalla trasversale T.

22. Veniamo ora a casi particolari e supponiamo che nella rete vi sia una conica

consistente in una retta P presa due volte: conica che indicheremo col simbolo P^2. Se anche in questo caso le coniche della rete formano un sistema di polari, ciascun punto della retta P dev'essere il polo di una conica dotata di punto doppio [nel polo p della conica P^2] (*Introd.* 78); ma d'altronde le coniche polari dei punti di una retta formano un fascio: dunque nella rete vi dev'essere un fascio di coniche tutte dotate di punto doppio [in p]. Un tal fascio non può essere che un fascio di coppie di rette [passanti per p] in involuzione: ed i raggi doppi, Q, R, daranno due nuove coniche Q^2, R^2 della rete. [50] Donde segue (*Introd.* 79) che le rette P, Q, R formano un trilatero, ciascun lato del quale preso due volte costituisce la conica polare del vertice opposto.

Queste tre coniche P^2, Q^2, R^2, in causa della loro speciale natura, non bastano per individuare tutto il sistema dei poli: cioè qui il problema di trovare la curva fondamentale rimane indeterminato. Esso diverrà determinato se per un'altra conica della rete (che non sia un pajo di rette) si assume ad arbitrio il polo (fuori delle rette PQR). [51]

La conica della rete che debba passare per due punti dati o, o' si determina col metodo ordinario (*Introd.* 77, a). La conica del fascio (P^2, Q^2) che passa per o è un pajo di rette formanti sistema armonico con P, Q, e così pure la conica del fascio (P^2, R^2) passante per o è un pajo di rette coniugate armoniche rispetto alle due P, R. Queste due coniche intersecandosi determinano un quadrangolo completo, il cui triangolo diagonale è PQR. Ora la conica richiesta è quella che passa pei vertici di questo quadrangolo e per o': dunque, per essa, PQR è un triangolo coniugato. Cioè tutte le coniche della rete sono coniugate ad uno stesso triangolo.

La curva Hessiana si compone in questo caso delle tre rette P, Q, R, [52] e per conseguenza (*Introd.* 145) la cubica fondamentale è equianarmonica.

Di qui risulta che la rete non può contenere una quarta conica che sia una retta presa due volte. Ciò è anche evidente perchè una tal retta farebbe necessariamente parte della Hessiana la quale, essendo una linea del terz'ordine, non può contenere più di tre rette.

23. Supposta adunque l'esistenza di una conica P^2 in una rete di coniche, affinchè queste siano un sistema di polari, è d'uopo che i punti di P siano poli di coniche consistenti in coppie di rette d'un fascio in involuzione. Se questa involuzione ha due raggi doppi Q, R, distinti fra loro e dalla retta P, otteniamo il caso or ora considerato (22). Supponiamo ora invece che i due raggi doppi coincidano, ossia che tutte le coppie anzidette abbiano una retta comune Q: in questo caso, de' tre lati del trilatero PQR due, Q, R, coincidono, epperò la Hessiana consterà della retta Q presa due volte e della retta P. (Si ottiene questo medesimo caso se uno de' raggi doppi dell'involuzione, supposti distinti, coincide colla retta P).

I punti di Q sono poli di coniche consistenti in coppie di rette coniugate armonicamente con PQ; ed i punti di P sono poli di coniche composte della retta fissa Q e di una retta variabile intorno ad un punto fisso *o* di Q. Il punto PQ, appartenendo ad entrambe quelle rette, sarà il polo della conica Q^2; ed il punto *o*, doppio per le coniche polari de' punti di P, avrà per conica polare P^2. Si vede anche facilmente che, come nel caso precedente i punti QR, RP, PQ erano i poli delle rette P, Q, R rispetto a tutte le coniche della rete, così nel caso attuale i punti *o* e PQ sono i poli delle rette P, Q relativamente a tutte le coniche della rete.

Da ciò che precede si raccoglie che tutte le coniche della rete toccano Q nel punto PQ, e siccome questo punto ha per polare la conica Q^2, così la cubica fondamentale avrà una cuspide nel punto PQ colla tangente Q. E la retta P (che nel caso precedente, più generale, conteneva tre flessi della cubica) nel caso attuale congiunge la cuspide al flesso (unico) della curva fondamentale. La conica polare del flesso è composta della retta Q e della tangente stazionaria: quindi il punto *o* è l'intersezione della tangente cuspidale colla tangente stazionaria.

24. Può aver luogo il caso ancor più particolare che tutti e tre i lati del triangolo coniugato PQR coincidano in una sola retta P. Allora è chiaro che ogni punto di P sarà il polo di una conica composta della stessa retta P e di una seconda retta variabile intorno ad un punto fisso *o* di P; e questo punto *o* sarà il polo della conica P^2. Ne segue che tutte le coniche della rete hanno fra loro un contatto tripunto in *o* colla tangente P; e che tutti i punti di questa retta appartengono alla cubica fondamentale, la quale risulta composta della retta P e di una conica tangente a P in *o*.

Naturalmente la Hessiana è in questo caso la retta P presa tre volte.

25. Le considerazioni precedenti manifestano che allorquando la rete contiene una conica P^2, o due coniche P^2, Q^2, affinchè quella ammetta una cubica fondamentale è necessario che le coniche della rete si possano risguardare come coniugate ad uno stesso triangolo di cui i tre lati o due soltanto coincidono insieme: ossia è necessario che, nel primo caso, tutte le coniche della rete abbiano fra loro un contatto tripunto colla tangente comune P; e nel secondo caso, che le coniche della rete tocchino una delle rette P, Q nel punto comune a queste, ed abbiano rispetto all'altra uno stesso polo fisso. [[53]]

Ma se la rete contiene una o due coniche consistenti in un pajo di rette coincidenti, e non sono sodisfatte le dette condizioni, le coniche della rete non costituiscono un sistema di polari. Ciò ha luogo per es. se la rete è individuata da una conica P^2 e da due coniche che non seghino P negli stessi punti; se la rete è formata da coniche seganti una retta P in due punti fissi e rispetto alle quali un altro punto fisso di P abbia per polare una retta data; se la rete contiene due coniche P^2, Q^2 ed un'altra conica qualunque non passante pel punto PQ; ecc. Nel primo di questi casi la Jacobiana è composta della retta P e di una conica che sega P ne' due punti coniugati armonici rispetto alle coniche della rete; nel secondo caso la Jacobiana contiene due volte la retta P ed inoltre quell'altra retta data che è polare di un punto di P rispetto a tutte le coniche della rete; nel terzo caso la Jacobiana è composta delle due rette P, Q e della corda di contatto di quella conica della rete che è tangente a P e Q. [54]

Concludiamo pertanto che il problema " data una rete di coniche, trovare una cubica rispetto alla quale le coniche siano le polari dei punti del piano " ammette una (una sola) soluzione sempre allorquando nella rete non vi sia alcuna conica che consista in due rette coincidenti. Se di tali coniche ve n'è una sola o ve ne sono due, il problema ammette o nessuna soluzione, o infinite soluzioni: e vi sono infinite soluzioni anche nel caso che la rete contenga tre di quelle coniche eccezionali. Nei casi in cui il problema è indeterminato, ciascuna soluzione è individuata col fissare ad arbitrio il polo di una conica della rete, [55] conica che non consista in due rette coincidenti.

Sulle curve di terz'ordine.

26. Sia i un flesso di una data curva di terz'ordine ed I la retta polare armonica di i. Siccome due tangenti della curva i cui punti di contatto siano in linea retta col flesso i concorrono in un punto m della retta I e formano sistema armonico colla mi e colla medesima I (*Introd.* 139, a), così:

Le sei tangenti che si possono condurre ad una cubica da un punto della polare armonica di un flesso sono accoppiate in involuzione, in modo che la corda di contatto di due tangenti coniugate passa pel flesso *).

E siccome le polari armoniche dei flessi sono le medesime per tutte le cubiche sizigetiche alla data, così:

Dato un fascio di cubiche sizigetiche, se da un punto della polare armonica di un flesso si tirano coppie di tangenti alle cubiche in modo che la corda di contatto passi sempre pel flesso suddetto, quelle infinite coppie di tangenti formano un'involuzione, i cui raggi doppi sono la retta condotta al flesso e la polare armonica.

Siano $m_1 m_2 m_3$ tre punti presi ad arbitrio e rispettivamente nelle polari armoniche di tre flessi 1 2 3 situati in linea retta. Condotte per ciascuno de' punti $m_1 m_2 m_3$ due tangenti alla cubica i cui punti di contatto siano in linea retta col flesso corrispondente, siccome le tre corde di contatto segano la curva in tre punti 1 2 3 che sono in una

*) Giornale di matematiche, t. 2, pag. 84 (Napoli 1964). [Queste Opere, n. **49**].

retta, così le altre sei intersezioni, cioè i punti di contatto delle sei tangenti, giaceranno in una conica (*Introd.* 39, a).

Se r è un vertice di un trilatero rr_1r_2 sizigetico alla cubica data, per r passano le polari armoniche dei tre flessi situati nel lato opposto (*Introd.* 142). Dunque le sei tangenti che si possono condurre da r alla cubica sono accoppiate in involuzione in tre maniere diverse: a ciascuna di queste maniere corrispondono come raggi doppi la retta che congiunge r ad uno de' tre flessi e la relativa polare armonica.

Conducendo per un flesso i situato in r_1r_2 una trasversale qualunque, il coniugato armonico di i rispetto alle intersezioni della trasversale con rr_1, rr_2 è situato nella polare armonica di i (*Introd.* 139). Ne segue che le rr_1, rr_2 sono coniugate armoniche rispetto alla retta ri ed alla polare armonica di i. Dunque i raggi doppi delle tre involuzioni formate dalle tangenti che si possono condurre per r alla cubica data (ed alle altre cubiche sizigetiche) sono accoppiati pur essi in una nuova involuzione i cui elementi doppi sono i lati rr_1, rr_2 del trilatero sizigetico. Ossia:

Tre flessi in linea retta e le intersezioni di questa retta colle polari armoniche dei flessi medesimi formano tre coppie di punti in involuzione).*

È noto (*Introd.* 132, c) che se due tangenti ad una data cubica concorrono in un punto della medesima curva, ciascuna di quelle tangenti è la retta polare del punto di contatto dell'altra rispetto ad una cubica di cui la data è la Hessiana. È noto inoltre (*Introd.* 148) che se una retta tocca una cubica in un punto e la sega in un altro, le rette polari del primo punto, rispetto alle cubiche sizigetiche colla data, passano tutte pel secondo punto. Ne segue che:

*Le quattro tangenti che si possono condurre ad una cubica da un suo punto sono le rette polari di uno qualunque de' punti di contatto rispetto alla cubica medesima ed a quelle altre tre cubiche delle quali la data è la Hessiana **).*

Ora, il rapporto anarmonico delle rette polari di un punto rispetto a quattro curve date di un fascio è costante, qualunque sia quel punto: si ha dunque così una nuova dimostrazione del teorema di SALMON (*Introd.* 131), essere costante il rapporto anarmonico delle quattro tangenti che arrivano ad una cubica da un suo punto qualunque.

27. Nel piano di una data curva del terz'ordine si immaginino condotte $n+1$ trasversali che seghino la curva nelle $n+1$ terne di punti

$$(v_1v_2a_1), \quad (v_3v_4a_3), \quad (v_5v_6a_5), \ldots (v_{2n+1}v_{2n+2}a_{2n+1}).$$

*) Questa proprietà si rende evidente anche osservando che il punto in cui la polare armonica di i sega r_1r_2 è coniugato armonico di i rispetto agli altri due flessi situati nella medesima retta r_1r_2. Ne segue ancora (*Introd.* 26) che ciascuno de' due punti r_1r_2 combinato coi tre flessi situati nella retta r_1r_2 forma un sistema equianarmonico.

**) Educational Times, december 1864, p. 214 (London).

Si unisca il punto v_{2n+2} al punto a_1 mediante una retta che seghi di nuovo la curva in v_{2n+3}. Si tiri la retta v_2v_3 che incontri ulteriormente la curva in a_2; e sia v_{2n+4} la terza intersezione della curva colla retta $v_{2n+3}a_2$. Continuando in questo modo si otterranno altre $3n$ trasversali contenenti le terne di punti

$$(v_{2n+2}a_1v_{2n+3}),\quad (v_2v_3a_2),\quad (v_{2n+3}a_2v_{2n+4}),\quad (v_{2n+4}a_3v_{2n+5}),\quad (v_4v_5a_4),$$
$$(v_{2n+5}a_4v_{2n+6}),\ \ldots\ (v_{4n+1}a_{2n}v_{4n+2}).$$

Ora dei $3(2n+1)$ punti $v_1v_2\ldots v_{4n+2}$, $a_1a_2\ldots a_{2n+1}$ risultanti dall'intersezione della cubica colle $2n+1$ rette

$$(v_1v_2a_1),\quad (v_3v_4a_3),\quad (v_5v_6a_5),\ \ldots\ (v_{2n+1}v_{2n+2}a_{2n+1}),$$
$$(v_{2n+3}v_{2n+4}a_2),\quad (v_{2n+5}v_{2n+6}a_4),\ \ldots\ (v_{4n+1}v_{4n+2}a_{2n}),$$

ve ne sono $6n$ distribuiti sulle $2n$ rette

$$(v_{2n+2}v_{2n+3}a_1),\quad (v_{2n+4}v_{2n+5}a_3),\ \ldots\ (v_{4n}v_{4n+1}a_{2n-1}),$$
$$(v_2v_3a_2),\quad (v_4v_5a_4),\ \ldots\ (v_{2n}v_{2n+1}a_{2n});$$

dunque gli altri tre punti $v_1v_{4n+2}a_{2n+1}$ si troveranno pur essi in linea retta (*Introd.* 44). Dunque:

Se dei $3(2n+1)$ *punti che sono i vertici e le intersezioni delle coppie di lati opposti d'un poligono di* $4n+2$ *lati, ve ne sono* $6n+2$ *situati in una curva di terz'ordine, anche il punto rimanente apparterrà alla medesima curva* *).

28. Nel piano di una curva del terz'ordine si tirino due trasversali che seghino la curva nelle terne di punti $(v_1v_2a_1)$, $(w_2w_3a_2)$. Le due rette w_2a_1, v_2a_2 incontrino la curva di nuovo in w_1, v_3. Per v_3 si tiri ad arbitrio una trasversale che seghi la curva in $(v_3v_4a_3)$; quindi congiunto w_3 con a_3, si ottenga la terna $(w_3w_4a_3)$. Per w_4 si conduca ad arbitrio una trasversale che seghi la curva di nuovo nei punti w_5a_4, e congiunto v_4 con a_4, si ottenga la terza intersezione v_5. Si continui colla stessa legge finchè siansi ottenute le terne $(v_{2n-1}v_{2n}a_{2n-1})$, $(w_{2n-1}w_{2n}a_{2n-1})$. Congiungasi allora v_{2n} con v_1 e la retta così ottenuta incontri di nuovo la curva in a_{2n}.

Ora, dei $6n$ punti $v_1v_2\ldots v_{2n}$, $w_1w_2\ldots w_{2n}$, $a_1a_2\ldots a_{2n}$, che risultano dall'intersecare la cubica col sistema delle $2n$ rette

$$(w_1w_2a_1),\quad (w_3w_4a_3),\ \ldots\ (w_{2n-1}w_{2n}a_{2n-1}),$$
$$(v_2v_3a_2),\quad (v_4v_5a_4),\ \ldots\ (v_{2n}v_1a_{2n}),$$

*) Questo teorema, generalizzazione di uno notissimo dovuto a PONCELET (*Introd.* 45, c), mi è stato comunicato dal ch. prof. BRIOSCHI.

ve ne sono $6n-3$ distribuiti sulle $2n-1$ rette

$$(v_1 v_2 a_1),\quad (v_3 v_4 a_3),\ \ldots\ (v_{2n-1} v_{2n} a_{2n-1}),$$
$$(w_2 w_3 a_2),\quad (w_4 w_5 a_4),\ \ldots\ (w_{2n-2} w_{2n-1} a_{2n-2});$$

epperò gli altri tre punti $w_1 w_{2n} a_{2n}$ saranno pure in una retta. Cioè:

Se dei $6n$ *punti che sono i vertici e le intersezioni delle coppie di lati corrispondenti di due poligoni, di* $2n$ *lati ciascuno, ve ne sono* $6n-1$ *situati in una curva di terz'ordine, anche il punto rimanente giacerà nella medesima curva* *).

*) Questo teorema ed il precedente sono stati enunciati da Möbius nel caso che la cubica sia il sistema di una conica e di una retta (*Verallgemeinerung des Pascalschen Theorems*, Giornale di Crelle, tom. 36, Berlin 1848, p. 219).