58.

SOLUTIONS DES QUESTIONS 677, 678 ET 679 (SCHRÖTER). [59]

Nouvelles Annales de Mathématiques, 2me série, tome III (1864), pp. 30-33.

On trouve démontré analytiquement dans les Mémoires de M. M. Hesse et Cayley, et géométriquement dans mon *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, que dans un réseau (rete) de coniques *) il y en a certaines, en nombre infini, qui se réduisent à deux droites, et que ces droites enveloppent une courbe (générale) de troisième classe, que j'ai nommée *courbe cayleyenne* du réseau. [60] Les trois tangentes qu'on peut mener à cette courbe par un point donné o sont les trois côtés [61] du quadrangle complet inscrit aux coniques du réseau qui passent par o.

Un réseau est déterminé par trois coniques données et contient toutes les coniques des trois faisceaux auxquels les coniques données, considérées deux à deux, donnent lieu. Donc

Trois coniques quelconques ont généralement, deux à deux, six cordes communes; les dix-huit cordes qui en résultent touchent une même courbe de la troisième classe (question 679).

Si les trois coniques données (et par conséquent toutes celles du réseau) ont un point commun o, les neuf droites qui joignent o aux neuf points d'intersection des coniques (deux à deux) seront tangentes à la *cayleyenne*. Mais une courbe (propre) de la troisième classe ne peut admettre que trois tangentes au plus, issues d'un même point; donc, dans le cas actuel, la cayleyenne se décompose en une enveloppe de première classe (le point o) et en une enveloppe de deuxième classe (une conique); donc

Si trois coniques ont un point commun, les neuf côtés des trois triangles qui sont formés par les autres points d'intersection des coniques, considérées deux à deux, touchent une même conique (question 678).

*) Un réseau de coniques est l'ensemble de toutes les coniques assujetties à trois conditions communes telles, que par deux points pris à volonté sur le plan il ne passe qu'une seule de ces coniques.

On déduit des mêmes considérations le théorème suivant, très-connu:

Si trois coniques ont une corde commune, les autres cordes communes aux coniques, considérées deux à deux, passent par un même point.

La question 677 est l'inverse de 678. Soient donnés trois triangles $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$, $a_3b_3c_3$, circonscrits à une même conique K; les sommets de ces triangles, considérés deux à deux, déterminent trois coniques C_1, C_2, C_3, c'est-à-dire

$$C_1 \equiv (a_2b_2c_2a_3b_3c_3),\quad C_2 \equiv (a_3b_3c_3a_1b_1c_1),\quad C_3 \equiv (a_1b_1c_1a_2b_2c_2).$$

La cayleyenne du réseau déterminé par les trois coniques C_1, C_2, C_3 aura, d'après la définition de cette courbe, neuf tangentes (les côtés des trois triangles) communes avec la conique K. Mais une courbe (propre) de troisième classe et une conique ne sauraient avoir que six tangentes communes au plus; donc la cayleyenne est formée par deux enveloppes partielles, la conique K et un point.

Soit o la quatrième intersection de C_2 et C_3 (outre $a_1b_1c_1$), et supposons qu'une conique C soit décrite par $oa_2b_2c_2a_3$ et qu'elle rencontre C_2 en $\beta_3\gamma_3$ (outre oa_3). En vertu d'un théorème démontré ci-devant (question 678), les côtés des triangles $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$, $a_3\beta_3\gamma_3$ seront tangents à une même conique, la conique donnée K. Mais K ne peut pas admettre quatre tangentes distinctes $a_3(b_3, c_3, \beta_3, \gamma_3)$ issues d'un même point a_3; donc les triangles $a_3b_3c_3$, $a_3\beta_3\gamma_3$ doivent coïncider, c'est-à-dire la conique C se confondra avec C_1. Ainsi „ les trois coniques C_1, C_2, C_3 ont un point commun o „.

Du théorème 679 on tire aisément les suivants:

Si l'on donne un faisceau de coniques conjointes C *) *et une autre conique quelconque* K, *les cordes communes à* K *et à une conique* C *enveloppent une courbe de troisième classe tangente aux droites conjointes du faisceau et ayant un foyer au centre commun des coniques* C. *Et le lieu des points où se rencontrent deux à deux les cordes opposées est une courbe du troisième ordre qui passe par le centre et par les points à l'infini sur les axes principaux des coniques* C.

Si l'on donne un système de coniques confocales C *et une autre conique quelconque* K, *le lieu des sommets des quadrilatères complets circonscrits à* K *et à une conique* C, *est une courbe de troisième ordre qui passe par les foyers du système* C *et par les deux points circulaires à l'infini. Et les diagonales des quadrilatères nommés enveloppent une courbe de troisième classe tangente aux axes principaux des coniques* C *et à la droite à l'infini.*

---

*) Coniques concentriques et décrites par quatre points (imaginaires) appartenant à un cercle de rayon nul *(Memoria sulle coniche e sulle superficie di second'ordine congiunte; Annali di Matematica, t. III; Roma, 1860).* [Queste Opere, n. **20** (t. 1.°)].