57.

SOLUTION DE LA QUESTION 491. [58]

Nouvelles Annales de Mathématiques, 2^{me} série, tome III (1864), pp. 25-30.

1. A est une courbe de l'ordre n, B une conique, dans un même plan. D'un point quelconque situé sur A on abaisse une perpendiculaire sur la polaire de ce point relativement à B. 1.° Quelle est l'enveloppe de cette perpendiculaire? 2.° Quel est le lieu du pied de la perpendiculaire?

Deux droites perpendiculaires sont polaires conjuguées par rapport à la conique (enveloppe de deuxième classe) formée par les points circulaires ω, ω' à l'infini; ainsi, le premier problème revient à celui-ci:

Soit m *un point quelconque de* A; M *la droite polaire de* m, *relativement à la conique* B; μ *le pôle de* M, *relativement à la conique* (ω, ω'), *c'est-à-dire le conjugué harmonique du point à l'infini sur* M, *par rapport à* (ω, ω'); *quelle est l'enveloppe de la droite* $m\mu$?

Cherchons combien de droites analogues à $m\mu$ passent par un point arbitraire o. Si l'on mène par o une droite quelconque qui rencontrera A en n points $m, m', \ldots$, les polaires M, M',..., de ces points, par rapport à la conique B, auront leurs pôles $\mu, \mu', \ldots$, relatifs à (ω, ω'), situés sur n droites $o\mu, o\mu', \ldots$. Si, au contraire, on mène arbitrairement une droite $o\mu$ (μ point à l'infini), soit ν le conjugué harmonique de μ, par rapport à (ω, ω'); du point ν on pourra mener n tangentes M, M',... à la courbe A' polaire réciproque de A, par rapport à la conique B. Ces tangentes auront leurs pôles $m, m', \ldots$, relatifs à B, situés sur n droites $om, om', \ldots$. Ainsi, à une droite om correspondent n droites $o\mu$, et à une droite $o\mu$ correspondent n droites om. Donc, par un principe connu (dont M. de Jonquières a fait un heureux usage), il y aura $2n$ coïncidences de deux droites om, $o\mu$ correspondantes; c'est-à-dire, l'enveloppe de $m\mu$ est une courbe K de la classe $2n$.

2. Si m est à l'infini (sur la courbe A), la droite $m\mu$ tombe entièrement à l'infini; donc la droite à l'infini est une tangente de K multiple suivant n, c'est-à-dire K a

$2n$ branches paraboliques. Ainsi, K n'a que n tangentes parallèles à une direction donnée, ou bien passant par un point μ donné à l'infini. Si ν est le conjugué harmonique de μ par rapport à ω, ω', et m, m',..., les pôles, relatifs à B, des n tangentes de A' qui passent par ν, les droites $m\mu$, $m'\mu$,... seront les n tangentes de K qui aboutissent à μ. Si ν est un point (à l'infini) de A', deux tangentes de cette courbe coïncident et, par conséquent, deux tangentes $m\mu$ de K coïncideront aussi, c'est-à-dire μ sera un point de K. Il s'ensuit que la courbe K a $n(n-1)$ asymptotes respectivement perpendiculaires aux asymptotes de A'. En particulier, si ν tombe en ω, le point μ y tombe aussi; donc, si A' a des branches (imaginaires) passant par ω, ω', la courbe K y passe autant de fois.

3. Les droites tangentes des courbes A' et K correspondent entre elles, une à une. En effet, si l'on donne M tangente de A', soient m, μ les pôles de M par rapport aux coniques B et (ω, ω'); $m\mu$ sera la tangente de K qui correspond à M. Réciproquement, soit N une tangente de K, ν le pôle de N par rapport à (ω, ω'); la droite polaire de ν par rapport à la conique B coupera N en un point m, et la droite polaire de m par rapport à la même conique B sera la tangente de A' qui correspond à N. Cela étant, le deuxième problème que je me suis proposé peut être énoncé comme suit:

Trouver le lieu du point commun à deux tangentes correspondantes des courbes A', K.

Menons une transversale arbitraire et cherchons combien de fois deux tangentes correspondantes de A', K se rencontrent sur cette transversale. D'un point quelconque p de la transversale on peut mener n tangentes à A'; les n tangentes correspondantes de K rencontreront la transversale en n points q. Réciproquement, d'un point quelconque q de la transversale on peut mener $2n$ tangentes à K; les $2n$ tangentes correspondantes de A' couperont la transversale en $2n$ points p. Ainsi, à un point p correspondent n points q, et à un point q correspondent $2n$ points p. Donc, il y aura sur la transversale $3n$ coïncidences de deux points p, q correspondants, c'est-à-dire, le lieu cherché est une courbe H de l'ordre $3n$.

Par chacun des points ω, ω' passent n tangentes de A' et les n tangentes correspondantes de K; donc, les points circulaires à l'infini sont des points multiples suivant n, pour la courbe H.

Nous avons vu que la droite à l'infini représente n tangentes de K; par conséquent, les points à l'infini sur les n tangentes correspondantes de A' appartiendront à H; c'est-à-dire, la courbe H a n asymptotes respectivement parallèles aux diamètres de la conique B, qui sont conjugués aux directions des asymptotes de A.

Il est évident que la courbe H passe par les $2n$ intersections de A et B.

4. Si l'on fait $n=2$ (question 491), A et A' sont deux coniques (polaires réciproques par rapport à B); K est de la quatrième classe et H est du sixième ordre. Je vais considérer deux cas particuliers.

1.° Soient A, B et, par conséquent, A′ des paraboles semblables; a leur point commun à l'infini. La polaire de a, par rapport à B, est la droite à l'infini: donc, toute droite menée par a est une tangente de K, c'est-à-dire que cette enveloppe est composée du point a (enveloppe de première classe) et d'une courbe K′ de troisième classe. D'un point quelconque ν à l'infini on peut mener une seule tangente à la parabole A′: donc il y a une seule tangente de K′ qui aboutit à μ, conjugué harmonique de ν par rapport à (ω, ω'). Mais si ν tombe en a, cette tangente de A′ tombe à l'infini; par conséquent, au point a', conjugué harmonique de a par rapport à (ω, ω'), il n'y a qu'une tangente de K′, la droite à l'infini. Cela signifie que a' est un point d'inflexion de K′, et la droite à l'infini est la tangente relative, c'est-à-dire que K′ a deux branches perpendiculaires (avec les convexités intérieures) aux diamètres des paraboles données; autrement K′ est une *parabola cuspidata* (classification newtonienne).

Lorsque A est une conique quelconque, la droite à l'infini représente deux tangentes de K; dans le cas que nous considérons, les tangentes correspondantes de A′ tombent elles mêmes à l'infini: donc, tout point à l'infini compte deux fois comme point du lieu H: par conséquent ce lieu se décompose en deux droites qui coïncident à l'infini et en une courbe H′ du quatrième ordre. On voit aisément que H′ passe par les points circulaires et touche en a la droite à l'infini, c'est-à-dire que H′ a deux branches paraboliques parallèles aux branches des paraboles données.

2.° Soient A, B, et, par conséquent, A′ des cercles concentriques, c'est-à-dire des coniques passant par ω, ω' et ayant en ces points les mêmes tangentes $o\omega$, $o\omega'$ (o centre commun des cercles). On conclut immédiatement de la théorie générale que, dans ce cas particulier, K se réduit à quatre points, dont deux coïncident en o; les deux autres sont ω, ω'; et H se décompose en quatre droites et un cercle; les quatre droites coïncident deux à deux avec $o\omega$ et $o\omega'$; le cercle est A′.

5. Pour $n = 1$, on a ce théorème connu:

On donne une droite A et un faisceau A′ de droites: les points de A correspondent anharmoniquement aux rayons de A′; d'un point quelconque de A on abaisse la perpendiculaire sur le rayon correspondant. L'enveloppe de cette perpendiculaire est une parabole; le lieu du pied de la perpendiculaire est une *cubique circulaire* dont l'asymptote réelle est parallèle au rayon de A′ qui correspond au point à l'infini de A.

6. On démontre d'une manière analogue les théorèmes dans l'espace:

A est une courbe gauche de l'ordre n; B une surface du second degré. D'un point quelconque de A on abaisse la perpendiculaire sur le plan polaire de ce point relativement à B; le lieu de cette perpendiculaire est une surface gauche du degré $2n$, qui a n génératrices à l'infini et un cône asymptote de l'ordre n, dont les génératrices sont respectivement perpendiculaires aux plans tangents du cône asymptote de la surface développable A′, polaire réciproque de A par rapport à B.

Le lieu du pied de la perpendiculaire est une courbe gauche de l'ordre $3n$ qui a $2n$ points sur le cercle imaginaire à l'infini.

Si $n=1$, on a ce théorème:

On donne une droite A dont les points correspondent anharmoniquement aux plans passant par une deuxième droite A'. D'un point quelconque de A on abaisse la perpendiculaire sur le plan correspondant; le lieu de la perpendiculaire est un paraboloïde qui a un plan directeur perpendiculaire à la droite A'; le lieu du pied de la perpendiculaire est une courbe gauche du troisième ordre (cubique gauche) qui passe par les points où le plan directeur nommé rencontre le cercle imaginaire à l'infini. On peut donner à cette espèce de *cubique gauche* le nom de *cercle gauche* ou *cubique gauche circulaire.*