59.

SOLUTION DE LA QUESTION 380. [62]

Nouvelles Annales de Mathématiques, 2me série, tome III (1864), pp. 127-129.

Soient donnés un angle trièdre trirectangle ayant le sommet au point S, *et un point quelconque* O *par lequel on mène un plan* P *coupant les faces de l'angle suivant* ABC; *trois parallèles aux côtés du triangle et passant par le point* O *partagent ce triangle en trois parallélogrammes et trois triangles: p, p', p'' étant les aires des parallélogrammes, on a*

$$\frac{1}{p^2 sin^2(\mathrm{SA}, \mathrm{P})}+\frac{1}{p'^2 sin^2(\mathrm{SB}, \mathrm{P})}+\frac{1}{p''^2 sin^2(\mathrm{SC}, \mathrm{P})}=\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}+\frac{1}{p''}\right)^2\frac{1}{sin^2(\mathrm{SO}, \mathrm{P})}.$$

(Mannheim).

Prenons les arêtes SA, SB, SC du trièdre trirectangle pour axes coordonnés; soient a, b, c les coordonnées du point O, et

$$\lambda(x-a)+\mu(y-b)+\nu(z-c)=0$$

l'équation du plan ABC. Alors, en supposant O placé dans l'intérieur du triangle, on a les aires

$$p=\frac{bc\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}{\lambda},\quad p'=\frac{ca\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}{\mu},\quad p''=\frac{ab\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}{\nu},$$

c'est-à-dire que les aires p, p', p'' sont proportionnelles aux quantités $\frac{1}{\lambda a}$, $\frac{1}{\mu b}$, $\frac{1}{\nu c}$. Il s'ensuit que

$$\frac{1}{\lambda^2 p^2}+\frac{1}{\mu^2 p'^2}+\frac{1}{\nu^2 p''^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}+\frac{1}{p''}\right)^2$$

sont proportionnelles aux quantités

$$a^2+b^2+c^2 \quad \text{et} \quad (\lambda a+\mu b+\nu c)^2,$$

d'où

$$(1)\qquad \frac{1}{\lambda^2p^2}+\frac{1}{\mu^2p'^2}+\frac{1}{\nu^2p''^2}=\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}+\frac{1}{p''}\right)\frac{a^2+b^2+c^2}{(\lambda a+\mu b+\nu c)^2},$$

ce qui exprime le théorème énoncé dans la question 380.

Si le point O tombe hors du triangle ABC, mais dans l'intérieur de l'un des angles BAC, CBA, ACB, par exemple dans ABC, les aires p, p', p'' seront proportionnelles aux quantités $-\frac{1}{\lambda a}, \frac{1}{\mu b}, -\frac{1}{\nu c}$, d'où il suit que, dans ce cas, il faut changer le signe de p' dans l'équation (1).

Si le point O se trouve hors des angles BAC, ABC, BCA, l'équation (1) reste la même.

Tout cela suit immédiatement de la manière dont l'aire du triangle ABC, qui est

$$\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}\,\frac{(\lambda a+\mu b+\nu c)^2}{\lambda\mu\nu},$$

est composée avec les aires des parallélogrammes et des triangles qui résultent des trois parallèles aux côtés BC, CA, AB. Ces dernières aires sont

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}{\mu\nu}\lambda a^2,\quad \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}{\nu\lambda}\mu b^2,\quad \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}{\lambda\mu}\nu c^2.$$