# 56.

## SOLUTIONS DES QUESTIONS 563, 564 ET 565 (FAURE). [56]

*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2.me série, tome III (1864), pp. 21-25.

1. On donne un faisceau de courbes de l'ordre $n$, ayant $n^2$ points communs. Quel est le lieu des foyers *) de ces courbes? Pour connaître l'ordre de ce lieu, il suffit de découvrir le nombre de foyers qui tombent sur une droite quelconque, par exemple sur la droite à l'infini.

Parmi les courbes du faisceau, il y en a $2(n-1)$ du genre parabolique, c'est-à-dire qui sont tangentes à la droite à l'infini. Ces courbes seules peuvent avoir des foyers à l'infini.

Soient $\omega$, $\omega'$ les points circulaires à l'infini. Si par chacun de ces points on mène les $n(n-1)$ tangentes à une courbe du faisceau, les $n^2(n-1)^2$ intersections de ces tangentes sont les foyers de la courbe. Lorsque celle-ci est parabolique, il n'y a que $n(n-1)-1$ tangentes (autres que la droite à l'infini) issues de $\omega$ ou de $\omega'$; donc $\big(n(n-1)-1\big)^2$ foyers seulement seront à distance finie; les autres $2n(n-1)-1$ tombent à l'infini. Cela doit être répété pour chacune des $2(n-1)$ courbes paraboliques; donc la droite à l'infini contient

$$2(n-1)\big(2n(n-1)-1\big)$$

foyers, et par conséquent ce nombre est l'ordre du lieu cherché.

De ces foyers à l'infini, $2(n-1)$ sont les points de contact des courbes paraboliques avec la droite $\omega\omega'$: les autres $4(n-1)\big(n(n-1)-1\big)$ coïncident évidemment avec $\omega$, $\omega'$; donc, chacun des points circulaires est multiple, suivant le nombre $2(n-1)\big(n(n-1)-1\big)$.

Parmi les courbes du faisceau, il y en a $3(n-1)^2$ qui ont un point double; ces $3(n-1)^2$ points sont des points doubles aussi pour la courbe des foyers.

*) On appelle *foyers* d'une courbe les intersections des tangentes menées à la courbe par les deux points circulaires à l'infini.

En résumé: Le lieu des foyers de toutes les courbes de l'ordre $n$, ayant $n^2$ points communs, est une courbe de l'ordre

$$2(n-1)\left(2n(n-1)-1\right),$$

qui passe $2(n-1)\left(n(n-1)-1\right)$ fois par chacun des points circulaires à l'infini, et deux fois par chacun des $3(n-1)^2$ points doubles des courbes données.

Pour $n=2$ on a le théorème de M. Faure, qui constitue la question 565, savoir: *le lieu des foyers des coniques qui passent par quatre points est une courbe du sixième ordre.*

2. Soit donnée une série de courbes de la classe $m$, c'est-à-dire le système de toutes les courbes de cette classe qui ont $m^2$ tangentes communes. En suivant le même raisonnement, on trouve que le lieu des foyers est une courbe de l'ordre $2m-1$, ayant deux points imaginaires, multiples de l'ordre $m-1$, situés à l'infini sur un cercle, et un seul point réel à l'infini, déterminé par la courbe qui, seule dans le système donné, est parabolique.

3. Soient données quatre droites $abc$, $ab'c'$, $a'bc'$, $a'b'c$ formant un quadrilatère complet, dont $a$ et $a'$, $b$ et $b'$, $c$ et $c'$ sont les sommets opposés. Les diagonales $aa'$, $bb'$, $cc$ forment un triangle ABC (A intersection de $bb'$ et de $cc'$, etc.). Considérons les coniques inscrites dans le quadrilatère donné: parmi ces coniques, il y a une parabole et trois systèmes de deux points, c'est-à-dire $(a, a')$, $(b, b')$, et $(c, c')$.

Toute conique du système considéré a quatre foyers: ce sont les quatre intersections des tangentes menées par les points circulaires, $\omega$ et $\omega'$. Pour la parabole, trois foyers tombent à l'infini en $\omega$, $\omega'$ et au point $i$ où la parabole est tangente à la droite $\omega\omega'$. Ce dernier point est sur la droite qui passe par les milieux des diagonales $aa'$, $bb'$, $cc'$, parce que cette droite contient les centres de toutes les coniques du système. La parabole a un quatrième foyer $o$, qui n'est pas à l'infini: c'est l'intersection des tangentes $o\omega$, $o\omega'$ à la courbe, qui passent par les points circulaires.

Les deux triangles $o\omega\omega'$, $bca'$ étant circonscrits à une même conique (la parabole du système), sont inscrits dans une seconde conique. Mais toute conique passant par $\omega$, $\omega'$ est un cercle: donc $o$ appartient au cercle qui passe par $b$, $c$, $a'$. De même pour les triangles $cab'$, $abc'$, $a'b'c'$; donc, le foyer $o$ de la parabole est le point commun aux cercles circonscrits aux quatre triangles formés par les droites données.

En vertu de ce qu'on a observé au n.° 2, le lieu des foyers des coniques (courbes de la deuxième classe) tangentes aux quatre droites données est une courbe du troisième ordre passant par les points circulaires à l'infini, c'est-à-dire une *cubique circulaire*, selon l'expression de M. Salmon. Cette courbe a une seule asymptote réelle, qui est parallèle à la droite des centres. Les six sommets du quadrilatère appartiennent aussi à la cubique, parce que ces points sont des foyers pour les coniques $(a\,a')$, $(b\,b')$, $(c\,c')$.

Ainsi, sur chacune des diagonales $aa'$, $bb'$, $cc'$ nous connaissons deux points de la cubique, lieu des foyers: cherchons la troisième intersection.

Si $l$ est cette troisième intersection de la diagonale $aa'$ par la cubique, les droites $l\omega$, $l\omega'$ seront tangentes à une même conique du système. Or, les couples des tangentes menées par $l$ aux coniques du système forment une involution. La diagonale $aa'$ est un rayon double de cette involution, parce qu'elle est la seule tangente qu'on puisse mener de $l$ à la conique $(a, a')$. Le second rayon double est $l$A; en effet, A est le pôle de $aa'$ par rapport à toute conique du système, donc $l$A est tangente en $l$ à la conique du système qui passe par $l$.

Deux droites conjuguées de l'involution (les tangentes menées par $l$ à une même conique du système) et les droites doubles doivent former un faisceau harmonique; par conséquent, l'angle des droites $laa'$, $l$A doit être divisé harmoniquement par $l\omega$, $l\omega'$. Mais si, dans un faisceau harmonique, deux rayons conjugués passent par les points circulaires à l'infini, on sait que les deux autres sont rectangulaires *); donc, $laa'$ et $l$A sont à angle droit, c'est-à-dire, les troisièmes intersections de la cubique par les diagonales sont les pieds $l$, $m$, $n$ des hauteurs du triangle ABC.

Remarquons que les neuf points $a$, $a'$, $b$, $b'$, $c$, $c'$, $l$, $m$, $n$ ne suffisent pas pour déterminer la cubique dont il s'agit. En effet, par ces points passent les trois droites $aa'$, $bb'$, $cc'$ et, par conséquent, un nombre infini d'autres courbes du troisième ordre. Pour déterminer notre courbe, lieu des foyers, ajoutons qu'elle est circulaire, qu'elle a son asymptote réelle parallèle à la droite qui passe par les milieux des diagonales du quadrilatère, et qu'elle passe par le point $o$ commun aux cercles circonscrits aux quatre triangles du quadrilatère.

Ainsi, les théorèmes de M. FAURE **) sont démontrés.

---

*) On peut définir ces droites qui vont aux points circulaires à l'infini comme les rayons doubles de l'involution engendrée par un angle droit qui tourne autour de son sommet fixe. (CHASLES, *Géometrie supérieure*).

**) 563. *La courbe du troisième ordre qui passe par les six sommets d'un quadrilatère complet et par les pieds des hauteurs du triangle formé par ses diagonales passe par les points circulaires à l'infini.* [57]

564. *Cette courbe est le lieu des foyers des coniques inscrites dans le quadrilatère et rappelle le cercle dans la théorie des courbes du troisième ordre.*