45.

SULLA PROJEZIONE IPERBOLOIDICA DI UNA CUBICA GOBBA.

Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, tomo V (1863), pp. 227-231.
Giornale di Matematiche, volume II (1864), pp. 122-126.

Lemma 1.° Se K è la conica polare di un punto θ rispetto ad un trilatero (i cui vertici siano abc) risguardato come una linea del terz'ordine — cioè se K è la conica circoscritta al trilatero e tangente nei vertici a quelle rette che insieme colle $a\theta, b\theta, c\theta$ ne dividono armonicamente gli angoli — ciascuna delle tangenti condotte per θ alla conica medesima forma colle rette $\theta(a,b,c)$ un sistema equianarmonico*).

Lemma 2.° Due fasci projettivi (in uno stesso piano), l'uno di semplici rette, l'altro di coppie di rette in involuzione, abbiano lo stesso centro θ; e siano $\theta\omega_1$, $\theta\omega_2$ i raggi doppi del secondo fascio, e $\theta a, \theta b, \theta c$, i raggi *comuni* **) ai due fasci. Se ciascuno dei primi due raggi forma cogli ultimi tre un sistema equianarmonico, in tal caso ai raggi $\theta\omega_1$, $\theta\omega_2$ del secondo fascio corrispondono nel primo i raggi $\theta\omega_2$, $\theta\omega_1$ rispettivamente.

1. Sia data una cubica gobba, curva cuspidale di una superficie sviluppabile di terza classe. Data inoltre una retta R, un piano π condotto ad arbitrio per essa sega la cubica in tre punti p, q, r, vertici di tre coni (di secondo grado) prospettivi alla curva. Se le rette qr, rp, pq incontrano R in p', q', r', e se il piano π si fa girare intorno alla retta data, la terna $p'q'r'$ genera un'involuzione di terzo grado, ove le coppie $q'r', r'p', p'q'$ sono le intersezioni di R coi coni anzidetti. L'involuzione ha quattro punti doppi ***), in ciascun de' quali R tocca un cono prospettivo: i punti corrispondenti sono le intersezioni di R con altrettante tangenti della cubica. Dunque *per un punto arbitrario dello spazio passano due coni prospettivi, ed una retta arbitraria ne tocca quattro.*

2. Un dato piano Π seghi la cubica gobba ne' punti abc. Il cono prospettivo alla curva ed avente il vertice in un punto s della medesima ha per traccia su quel piano

*) *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* [Queste Opere, n. **29** (t. 1.°)], 27.

**) *Ibid.* 24, b.

***) *Ibid.* 22.

una conica S circoscritta ad *abc* *). Sia σ il polo di questa conica rispetto al trilatero *abc*, risguardato come una linea del terz'ordine; Σ la retta polare di σ rispetto al trilatero, o (ciò che qui torna lo stesso) rispetto alla conica S.

3. L'inviluppo delle coniche S è la curva W di quart'ordine e terza classe, secondo la quale il piano Π sega la sviluppabile formata dalle tangenti della cubica. La curva W ha tre cuspidi ne' punti *abc*, e tocca la conica S nel punto d'incontro del piano Π colla retta tangente alla cubica in *s*.

4. Quale è il luogo dei punti σ? Sia Λ una trasversale arbitraria (nel piano Π); λ il polo di questa retta. Ogni punto di Λ ha la sua conica polare passante per λ, dunque i punti σ in Λ saranno tanti quanti i coni prospettivi passanti per λ, cioè *due*. Perciò *il luogo del punto σ è una conica* K.

Fra le coniche prospettive (basi dei coni prospettivi sul piano Π) vi sono tre coppie di rette (ab, ac), (bc, ba), (ca, cb), i cui poli σ sono a, b, c; dunque *la conica* K *è circoscritta al trilatero abc.*

5. Sia θ il polo della conica K; le rette Σ polari dei punti di K (ossia dei poli delle coniche prospettive) passeranno tutte per θ **). Le rette $\theta a, \theta b, \theta c$ fanno evidentemente l'ufficio di rette polari dei punti a, b, c.

Condotta ad arbitrio una retta Δ per θ, il polo di essa è un punto δ di K; e le due coniche prospettive passanti per δ hanno i loro poli nelle intersezioni di K con Δ. Siano Γ, Γ' le rette polari di questi due punti.

Variando Δ, le rette Γ, Γ' generano un fascio involutorio e projettivo al fascio semplice delle rette Δ. I raggi *comuni* de' due fasci sono evidentemente $\theta a, \theta b, \theta c$; cioè ciascuno di questi raggi, risguardato come retta Δ, coincide con una delle corrispondenti rette Γ, Γ'.

I raggi doppi del fascio involutorio corrisponderanno alle rette Δ tangenti a K; ma se Δ tocca K, anche le due coniche prospettive passanti per δ coincidono, epperò δ sarà un punto dell'inviluppo W.

Ciascuna delle due rette Δ_1, Δ_2 tangente a K forma (*lemma* 1.°) colla terna $\theta(a, b, c)$ un sistema equianarmonico; cioè nei due fasci projettivi, l'uno semplice, l'altro doppio involutorio, i tre raggi *comuni* formano con ciascuno dei raggi doppi del secondo fascio un sistema equianarmonico. Dunque (*lemma* 2.°) ai raggi doppi Δ_1, Δ_2 dell'involuzione corrispondono nel fascio semplice le stesse rette Δ_2, Δ_1 prese in ordine inverso. Cioè, se ω_1, ω_2 sono i punti in cui K è toccata dalle tangenti per θ (ossia segata dalla retta polare di θ), le rette polari di ω_1, ω_2 sono rispettivamente $\theta\omega_2$, $\theta\omega_1$. Ond'è che per

*) Nouv. Annales de Math. 2e série, t. 1er, Paris 1862, p. 291. [Queste Opere, n. **37**].

**) *Introd.* 130.

ciascuno de' punti ω_1, ω_2 passano la retta polare e la conica polare dell'altro; ossia la retta $\omega_1\omega_2$ tocca in ω_1, ω_2 le coniche polari dei punti ω_2, ω_1.

Ma i punti ω_1, ω_2 appartengono anche alla curva W, che ivi sarà toccata dalle coniche prospettive che vi passano: dunque *la retta* $\omega_1\omega_2$ *tocca in* ω_1, ω_2 *la curva* W, vale a dire è la sua tangente doppia.

In altre parole, $\omega_1\omega_2$ è l'intersezione di due piani osculatori della cubica, i cui punti di contatto 0_1, 0_2 sono i vertici di due coni prospettivi aventi per basi sul piano Π le coniche polari dei punti ω_1, ω_2; e le tangenti alla cubica in 0_1, 0_2 sono le rette $0_1\omega_2$, $0_2\omega_1$.

Da ciò segue che θ è il punto di concorso delle tangenti alla curva W nelle cuspidi a, b, c *). Inoltre le coniche polari di ω_1, ω_2 passano entrambe per θ ed ivi sono rispettivamente toccate dalle rette $\theta\omega_1$, $\theta\omega_2$.

6. Assunti come *corrispondenti* i punti s, σ, la cubica gobba e la conica K sono due forme proiettive, e *la superficie luogo della retta* $s\sigma$ *è un iperboloide* J. Infatti, siccome ad ogni punto di K corrisponde un solo punto della cubica, così K è una linea *semplice* della superficie, e nessuna generatrice di questa può giacere nel piano Π; cioè K è la *completa* intersezione della superficie con Π. Dunque la superficie di cui si tratta è del second'ordine.

Questa superficie incontra la retta $\omega_1\omega_2$ nei punti in cui questa è tangente alla data sviluppabile (osculatrice della cubica gobba); dunque l'iperboloide J non cambia, quando il piano Π si faccia ruotare intorno a quella retta.

7. Siccome l'iperboloide J passa pei punti ω_1, ω_2, così esso contiene le tangenti $0_1\omega_2$, $0_2\omega_1$ della cubica, epperò coincide coll'iperboloide inviluppato dai coni *congiunti,* i cui vertici sono nella retta 0_10_2; ossia, mentre le rette $s\sigma$ sono le generatrici di un sistema, quelle dell'altro sono le rette che uniscono a due a due i punti corrispondenti in cui la cubica è segata dalle coppie di piani congiunti passanti per $\omega_1\omega_2$ **).

L'identità dei due iperboloidi risulta anche dalla seguente considerazione. La retta che tocca in σ la conica K è la polare del punto σ relativa alla conica polare del punto θ, ossia ***) la polare del punto θ relativa alla conica polare del punto σ. Dunque *la conica* K *è l'inviluppo delle rette polari del punto* θ *relative alle coniche prospettive.*

8. Assunte come *corrispondenti* la retta $s\sigma$ e la tangente in s alla cubica gobba, l'iperboloide J e la sviluppabile data sono due sistemi projettivi di rette. Quale è l'inviluppo del piano che contiene due rette corrispondenti? Siccome il piano che tocca

*) Annali di Matematica, t. I, Roma 1858, p. 169. [Queste Opere, n. **9** (t. 1.°)].

**) Nouv. Ann. *ut supra,* p. 302.

***) *Introd.* 130, b.

l'iperboloide in s contiene anche la tangente della cubica gobba in quel punto, così l'inviluppo richiesto sarà il sistema polare reciproco della data cubica rispetto all'iperboloide, vale a dire sarà *una superficie sviluppabile di terza classe,* circoscritta all'iperboloide lungo la cubica gobba.

9. Siano l, l_1 due punti della cubica; x il punto in cui la retta ll_1 incontra il piano Π. Le coniche intersezioni di questo piano coi due coni prospettivi, i cui vertici sono l, l_1, passano entrambe per x, onde la retta polare di x passerà pei poli di quelle due coniche, cioè pei punti λ, λ_1 della conica K corrispondenti ad l, l_1. Donde segue che *le tangenti della conica* K *sono le polari dei punti della curva* W.

Descritta ad arbitrio una conica per abc, essa segherà la curva W in due altri punti w, w_1, piedi di due tangenti della cubica. Se l, l_1 sono i punti di contatto di tali tangenti, ne' corrispondenti punti λ, λ_1 la conica K sarà toccata dalle rette polari di w, w_1; e queste polari concorreranno nel polo della conica $abcww_1$. Per questa conica e per la cubica passa un iperboloide che contiene le due tangenti wl, w_1l_1, le quali separatamente giacciono anche nei due coni prospettivi i cui vertici sono l, l_1, e le cui sezioni col piano Π toccano la curva W rispettivamente in w, w_1.

Per tal guisa, come ogni punto della conica K individua un cono prospettivo, così un punto qualunque del piano Π (non situato nella conica anzidetta) individua un iperboloide passante per la cubica: iperboloide che sega il piano Π secondo la conica polare del punto che si considera.

10. Pei punti abc si può descrivere un circolo; dunque *per la cubica gobba passa un iperboloide* (un solo) *segato secondo circoli dai piani paralleli a* Π.

Se due de' tre punti abc fossero i punti circolari all'infinito del piano Π, tutte le coniche descritte per abc sarebbero circoli, cioè tutte le superficie di second'ordine passanti per la cubica gobba avrebbero una serie di sezioni cicliche parallele al piano Π.

11. Un piano Π_1 seghi la cubica in tre punti $a_1b_1c_1$; il triangolo $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ (inscritto in K) formato dai punti corrispondenti ad $a_1b_1c_1$, sarà circoscritto alla poloconica *) della retta $\Pi\Pi_1$, perchè le rette $\beta_1\gamma_1, \gamma_1\alpha_1, \alpha_1\beta_1$ sono le polari dei punti in cui $\Pi\Pi_1$ è incontrata dalle b_1c_1, c_1a_1, a_1b_1. Ond'è che tutt'i triangoli, analoghi ad $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, nascenti da piani che seghino Π secondo una medesima retta Λ, sono inscritti in K e circoscritti ad una stessa conica: la poloconica di Λ.

Viceversa, si inscriva nel trilatero abc una conica L: essa è la poloconica di quella retta Λ che coi punti di contatto di L divide armonicamente i lati bc, ca, ab; e i vertici degli infiniti triangoli inscritti in K e circoscritti ad L corrispondono a terne di

*) *Poloconica* di una retta data rispetto ad una linea del terz'ordine è la conica inviluppata dalle rette polari dei punti della retta data relative alla linea suddetta (*Introd.* 136).

punti comuni alla cubica ed a piani passanti per Λ: cioè ogni corda di K, tangente ad L, corrisponde ad una corda della cubica, incontrante Λ. Le quattro tangenti comuni a K e ad L corrisponderanno quindi alle quattro tangenti della cubica incontrate da Λ; e le corde della cubica situate ne' piani tangenti alla medesima che passano per Λ corrisponderanno alle rette che toccano L ne' punti comuni a K.

Se per la retta Λ passa un piano osculatore della cubica, cioè se Λ è una tangente della curva W, la conica L toccherà K nel punto che corrisponde al contatto della cubica col piano osculatore.

Finalmente, la poloconica T della retta $\omega_1\omega_2$, tangente doppia della curva W, ha doppio contatto in ω_1, ω_2, colla conica K.

12. Se la retta ll_1 (9) incontra il piano Π in un punto x della conica K, cioè se ll_1 è una generatrice (del secondo sistema) dell'iperboloide J (7), i punti l, l_1 appartengono rispettivamente a due piani *congiunti* passanti per la retta $\omega_1\omega_2$. Ma d'altronde (5) la retta $\lambda\lambda_1$ passa, in questo caso, pel punto θ; dunque, se si inscrive in K un triangolo $\lambda\mu\nu$ che sia circoscritto alla conica T, e se le rette $\theta\lambda$, $\theta\mu$, $\theta\nu$ incontrano di nuovo K in λ_1, μ_1, ν_1, anche il triangolo $\lambda_1\mu_1\nu_1$ sarà circoscritto a T, e i due triangoli $\lambda\mu\nu$, $\lambda_1\mu_1\nu_1$ corrisponderanno alle intersezioni lmn, $l_1m_1n_1$ della cubica con due piani congiunti passanti per la retta $\omega_1\omega_2$.

13. Rappresentati per tal modo sul piano Π i punti della cubica data, molti problemi relativi a questa si tradurranno in ricerche più facili relative alla conica K, che può chiamarsi *la proiezione iperboloidica* della cubica medesima. Evidentemente questa conica può ottenersi da qualunque iperboloide passante per la cubica, purchè il piano segante Π passi per l'intersezione de' due piani osculatori della cubica contenenti quelle tangenti di essa che sono anche generatrici dell'iperboloide medesimo.

Bologna, 26 ottobre 1863.