51.

SUR LE NOMBRE DES CONIQUES QUI SATISFONT À DES CONDITIONS DOUBLES.

NOTE DE M. L. CREMONA, COMMUNIQUÉE PAR M. CHASLES.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences (Paris), tome LIX (1864), pp. 776-779.

« Votre idée heureuse de définir une série de coniques assujetties à quatre conditions communes par deux caractéristiques indépendantes, peut s'étendre tout naturellement à la définition d'un système de coniques assujetties à trois seules conditions communes, par trois nombres λ, μ, ν dont la signification est la suivante:

$$N(2p., 3Z) = \lambda, \quad N(1p., 1d., 3Z) = \mu, \quad N(2d., 3Z) = \nu,$$

où $3Z$, (Z_1, Z_2, Z_3), est le symbole des trois conditions aux modules (α_1, β_1), (α_2, β_2), (α_3, β_3).

« Cette extension est, du reste, explicite déjà dans votre dernière communication *(Comptes rendus*, 22 août); seulement, au lieu des deux équations

$$(1p., 3Z) \equiv (\lambda, \mu), \quad (1d., 3Z) \equiv (\mu, \nu),$$

j'en écrirai une seule,

$$(3Z) \equiv (\lambda, \mu, \nu).$$

« Je me propose de déterminer la fonction de λ, μ, ν qui représente le nombre des coniques du système (λ, μ, ν) ayant un contact double, ou un contact du deuxième ordre avec une courbe donnée quelconque.

« Les formules que vous avez données *(Comptes rendus*, 1er août) donnent immédiatement les valeurs de λ, μ, ν en fonction des coefficients (α, β) des modules des conditions $3Z$, c'est-à-dire

$$\lambda = A + 2B + 4C + 4D,$$
$$\mu = 2A + 4B + 4C + 2D,$$
$$\nu = 4A + 4B + 2C + D,$$

où j'ai posé

$$A = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, \quad B = \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \beta_3, \quad C = \Sigma \alpha_1 \beta_2 \beta_3, \quad D = \beta_1 \beta_2 \beta_3.$$

« Soit W le symbole d'une condition double; soit, de plus,

$$(2\text{p.}, \text{W}) \equiv (x, y), \quad (1\text{p.}, 1\text{d.}, \text{W}) \equiv (y, z), \quad (2\text{d.}, \text{W}) \equiv (z, u);$$

en introduisant dans ces séries, par votre méthode si simple et lumineuse, les conditions Z_1, Z_2, Z_3, on trouve

$$\text{N}(3\text{Z}, \text{W}) = x\text{A} + y\text{B} + z\text{C} + u\text{D}.$$

Posons maintenant

$$x\text{A} + y\text{B} + z\text{C} + u\text{D} = a\lambda + b\mu + c\nu,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} a + 2b + 4c &= x, \\ 2a + 4b + 4c &= y, \\ 4a + 4b + 2c &= z, \\ 4a + 2b + c &= u; \end{aligned}$$

on aura entre x, y, z, u la relation

(1) $$2x - 3y + 3z - 2u = 0,$$

et pour a, b, c les valeurs

(2) $$\begin{gathered} 4a = 2u - z, \quad 4c = 2x - y, \\ 8b = 2(2y - z) - 3(2x - y) = 2(2z - y) - 3(2u - z) \\ = \frac{5}{2}(y + z) - 3(x + u). \end{gathered}$$

« Dans chaque question il ne sera pas difficile de déterminer les nombres x, y, z, u, d'où l'on tirera a, b, c, et, par suite,

$$\text{N}(3\text{Z}, \text{W}) = a\lambda + b\mu + c\nu.$$

« *Premier exemple.* — Que la condition double soit un contact double avec une courbe donnée W d'ordre m, avec d points doubles et r rebroussements. En vertu d'une transformation très-connue, le nombre x des coniques passant par trois points fixes et ayant un contact double avec W est égal au nombre des tangentes doubles d'une courbe d'ordre $2m$, avec $d + \frac{3m(m-1)}{2}$ points doubles et r rebroussements. En désignant par n la classe de W, la classe de la nouvelle courbe sera $2m + n$, et, par suite,

$$2x = 2d + 3m(m-1) + n(4m + n - 9).$$

« Il est très-facile de trouver le nombre des coniques infiniment aplaties, dans la série (2p., W); on a évidemment

$$2x - y = 2m(m-1),$$

d'où l'on tire

$$y = 2d + m(m-1) + n(4m+n-9).$$

« Les nombres z, u sont corrélatifs de y, x; donc

$$z = 2t + n(n-1) + m(4n+m-9),$$
$$2u = 2t + 3n(n-1) + m(4n+m-9),$$

en désignant par t le nombre des tangentes doubles de W.

« La relation (1) est satisfaite, et les (2) donnent

$$4a = 2n(n-1), \quad 4c = 2m(m-1),$$
$$8b = 8mn - (m^2+n^2) - 7(m+n) + 2(d+t)$$
$$= 8mn - 9(m+n) - 3(r+i),$$

en désignant par i le nombre des inflexions de W. Donc, enfin, le nombre des coniques du système (λ, μ, ν) qui ont un contact double avec la courbe W est

$$\frac{1}{2}n(n-1)\lambda + \frac{1}{8}\Big(8mn - 9(m+n) - 3(r+i)\Big)\mu + \frac{1}{2}m(m-1)\nu.$$

« Il va sans dire qu'on peut réduire les quatre nombres m, n, r, i à trois seulement, qu'on peut choisir arbitrairement parmi les six suivants m, n, d, t, r, i.

« *Deuxième exemple.* — Que la condition double soit un contact du second ordre avec la courbe W. Le nombre x sera, dans ce cas, égal au nombre des tangentes stationnaires de la courbe d'ordre $2m$ et classe $2m+n$, avec r rebroussements; donc

$$x = 3n + r.$$

Il n'y a pas de coniques infiniment aplaties dans la série (2p., W); donc

$$2x - y = 0,$$

et, par suite,

$$y = 2(3n+r).$$

Corrélativement,

$$z = 2(3m+i), \quad u = 3m + i.$$

La relation (1) est satisfaite, car on a identiquement

$$3n + r = 3m + i.$$

et les valeurs de a, b, c seront

$$a=0, \qquad b=\frac{1}{2}(3m+i), \qquad c=0,$$

et, par conséquent, le nombre des coniques du système (λ, μ, ν) qui ont un contact du second ordre avec la courbe W est

$$\frac{1}{2}(3m+i)\mu \quad \text{ou bien} \quad \frac{1}{2}(3n+r)\mu.$$

" *Troisième exemple.* — A la condition double substituons deux contacts simples avec deux courbes distinctes V, V' d'ordre m, m' et classe n, n'. Le nombre x sera, dans ce cas, égal au nombre des tangentes communes à deux courbes de classes $2m+n$, $2m'+n'$; donc

$$x=4mm'+2(m'n+mn')+nn'.$$

Le nombre des coniques infiniment aplaties dans la série (2p., V, V') est évidemment

$$2x-y=4mm',$$

d'où

$$y=4mm'+4(mn'+m'n)+2nn';$$

et, corrélativement,

$$z=4nn'+4(mn'+m'n)+2mm',$$

$$u=4nn'+2(mn'+m'n)+nn'.$$

Ces valeurs, qui satisfont à la relation (1), donnent

$$a=nn', \qquad b=mn'+m'n, \qquad c=mm'.$$

Ainsi le nombre des coniques du système (λ, μ, ν) qui sont tangentes aux deux courbes V, V' est

$$nn'\lambda+(mn'+m'n)\mu+mm'\nu,$$

ce qui s'accorde avec la formule que vous, Monsieur, avez déjà donnée (*Comptes rendus*, 1er août) pour le nombre des coniques qui satisfont à cinq conditions simples.

" D'après ce qui précède, on peut calculer les caractéristiques λ, μ, ν d'un système (Z, W) de coniques assujetties à une condition simple et à une condition double. On introduira ensuite, par la même méthode, une nouvelle condition double W', et on obtiendra de cette manière les caractéristiques de la série (W, W') et le nombre N(Z, W, W') des coniques qui satisfont à deux conditions doubles et à une condition simple ".