54.

SUR LES HYPERBOLOÏDES DE ROTATION QUI PASSENT PAR UNE CUBIQUE GAUCHE DONNÉE.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 63 (1864), pp. 141-144.

Commençons par rappeler quelques propriétés des coniques planes.

1. Si plusieurs coniques se touchent mutuellement en deux points fixes, l'involution formée par les couples de points communs aux coniques et à une transversale arbitraire a un point double sur la corde de contact; car celle-ci comptée deux fois représente une conique (du système) tangente à la transversale. D'où il suit que:

" Si l'on cherche une conique passant par deux points donnés s', s'' et ayant un " double contact avec une conique donnée C, la corde de contact passera par l'un ou " par l'autre des points doubles a, α de l'involution déterminée par les couples $s's'', l'l''$; " où $l'l''$ sont les points communs à la conique C et à la droite $s's''$ ".

2. Ces points doubles sont imaginaires seulement dans le cas que, les points $s's'', l'l''$ étant tous réels, les segments $s's'', l'l''$ empiètent en partie l'un sur l'autre; c'est-à-dire dans le cas que des deux points $s's''$ l'un soit intérieur et l'autre extérieur à la conique C, supposée réelle.

3. Si la conique cherchée doit contenir un troisième point s, menons ss'' qui rencontre C en mm'', et cherchons les points doubles b, β de l'involution (ss'', mm''); la corde de contact passera par b ou par β. Donc cette corde sera l'une des quatre droites $ab, \alpha\beta, a\beta, \alpha b$. Si $ab, \alpha\beta$ s'entrecoupent en c, et $a\beta, \alpha b$ en γ, il est évident que c, γ sont les points doubles de l'involution déterminée par ss' et par les points nn', où C est rencontrée par la droite ss'.

" Ainsi, si l'on cherche à décrire une conique qui passe par trois points donnés $ss's''$ " et qui soit doublement tangente à une conique donnée C, le problème admet quatre " solutions. Les quatre cordes de contact forment un quadrilatère complet, dont les " diagonales sont les droites $s's'', s''s, ss'$. "

4. Il est d'ailleurs évident que, si les points $s\,s's''$ sont tous réels, les quatre cordes de contact sont toutes réelles, ou toutes imaginaires. On obtient le premier cas, si la conique C est imaginaire (bien entendu qu'elle soit toujours l'intersection d'une surface réelle du second ordre par un plan réel) ou bien si les points $s\,s's''$ sont tous intérieurs ou tous extérieurs à la conique C supposée rélle (2).

5. Si les points $s's''$ sont imaginaires (conjugués), et s réel (la conique C étant réelle ou imaginaire), les points $b\beta c\gamma$ seront aussi imaginaires: b conjugué à γ, et c à β. Donc il y aura deux cordes réelles seulement, $b\gamma$ et $c\beta$.

6. Il est superflu d'ajouter que les coniques correspondantes à des cordes réelles sont toujours réelles, encore que la conique donnée C soit imaginaire. Le pôle d'une droite réelle par rapport à une conique imaginaire est réel; donc le problème revient à décrire une conique par trois points donnés (dont l'un au moins soit réel, les deux autres étant imaginaires conjugués), de manière qu'une droite donnée (réelle) ait son pôle en un point donné (réel).

7. Si les deux points $s's''$ appartiennent à la conique donnée C, le probleme admet une solution unique, c'est-à-dire une conique tangente à C en s', s'', et passant par s.

8. Si les deux points $s's''$ sont infiniment voisins sur une doite donnée S, c'est-à-dire si la conique cherchée, par-dessus le double contact avec C, doit être tangente à S en s' et passer par s, la corde de contact passera par le point a conjugué harmonique (sur S) de s' par rapport à C; et de plus elle passera par l'un des points c, γ doubles dans l'involution déterminée par le couple ss' avec les points où la conique C est rencontrée par la droite ss'. Donc le problème admet deux solutions, correspondantes aux cordes ac, $a\gamma$.

9. Supposons enfin que les trois points $s\,s's''$ soient infiniment proches dans une conique donnée Z, c'est-à-dire que l'on cherche une conique qui, par-dessus le double contact avec C, soit osculatrice à une autre conique donnée Z en un point donné s. Soit S la droite tangente à Z en s; et soit a le point de S qui est conjugué harmonique de s par rapport à C. On a déjà vu (8) que, si une conique doit toucher S en s et avoir un double contact avec C, la corde de contact passe par a. Observons de plus que, si l'on mène par a deux sécantes arbitraires, les quatre points où ces droites rencontrent C appartiennent à une conique touchée par S en s. Mais, si l'on veut que cette conique soit osculée par Z en s, les sécantes cessent d'être toutes les deux arbitraires; plutôt, chacune d'elles détermine l'autre, si bien qu'elles, en variant ensemble, engendreront un faisceau en involution. Evidemment la droite S est un rayon double de ce faisceau (et la conique correspondante est la même droite S, comptée deux fois); donc l'autre rayon double sera la corde de contact de C avec la conique (unique) qui oscule Z en s et a un double contact avec C.

10. Ces propriétés ont une application immédiate à la recherche des surfaces du second degré (hyperboloïdes) de rotation, passant par une cubique gauche donnée.

Toute surface du second degré passant par la cubique gauche est coupée par le plan à l'infini suivant une conique circonscrite à un triangle fixe, dont les sommets $ss's''$ sont les points à l'infini de la cubique; et réciproquement toute conique passant par $ss's''$ est la trace à l'infini d'une surface du second degré qui contient la cubique gauche.

Si la surface du second degré doit être de rotation, sa trace à l'infini aura un double contact avec le cercle imaginaire C, intersection d'une sphère arbitraire par le plan à l'infini; et la corde de contact sera la trace des plans (cycliques) des cercles parallèles. Ainsi la recherche des surfaces du second degré de rotation, passant par la cubique gauche, est réduite à la détermination des coniques circonscrites au triangle $ss's''$ et doublement tangentes au cercle imaginaire C.

11. Si la cubique gauche a trois asymptotes réelles et distinctes *(hyperbole gauche)*, les points $ss's''$ sont eux-mêmes réels et distincts; donc (3, 4):

Par l'hyperbole gauche passent quatre hyperboloïdes (réels) *de rotation.*

Si par un point arbitraire de l'espace on mène six droites (perpendiculaires deux à deux) *bissectrices des angles des asymptotes, ces droites* (arêtes d'un angle tétraèdre complet, dont chaque plan diagonal est parallèle à deux asymptotes) *sont situées, trois à trois, dans quatre plans qui représentent les directions des sections circulaires des quatre hyperboloïdes de rotation.*

12. Si deux asymptotes coïncident en se réduisant à une droite unique S à l'infini (c'est le cas de l'*hyperbole parabolique gauche)*, aussi deux points $s's''$ se réduisent à un seul point s' sur S. Donc (8):

Par l'hyperbole parabolique gauche passent deux hyperboloïdes (réels) *de rotation. Les plans cycliques de ces surfaces sont tous parallèles à une même droite située dans la direction des plans asymptotiques* (tangents à la cubique à l'infini) *et perpendiculaire à la direction du cylindre hyperbolique qui passe par la courbe. Ces mêmes plans cycliques sont en outre respectivement parallèles à deux droites perpendiculaires, dont les directions divisent en parties égales l'angle des deux cylindres, parabolique et hyperbolique, passant par la courbe.*

13. Si la cubique gauche a une seule asymptote réelle *(ellipse gauche)*, deux points $s's''$, deviennent imaginaires (conjugués); donc (5):

Par l'ellipse gauche passent deux hyperboloïdes (réels) *de rotation* (les deux autres étant imaginaires).

Ici les directions des sections circulaires sont déterminées, comme pour l'hyperbole gauche (11), par les faces d'un angle tétraèdre complet qui, dans le cas actuel, n'a que deux arêtes réelles perpendiculaires et deux faces réelles passant par l'une des arêtes susdites.

14. Si l'ellipse gauche a deux points sur le cercle imaginaire à l'infini (7), on a la propriété suivante:

Si les surfaces du second degré passant par la cubique gauche ont une série commune de plans cycliques, il n'y en a qu'une seule qui soit de rotation.

15. Si la cubique gauche est osculée par le plan à l'infini *(parabole gauche)*, les coniques, suivant lesquelles ce plan coupe les surfaces du second degré passant par la courbe, s'osculent entr'elles en un même point, qui appartient à la cubique, et en ce point elles ont pour tangente commune la droite tangente à la courbe gauche. Parmi ces surfaces considérons celles, en nombre infini, qui ont un axe principal parallèle à la direction des plans asymptotiques et perpendiculaire à la direction du cylindre qui passe par la courbe (9). En concevant ces axes transportés parallèlement à eux-mêmes et réunis ensemble, si bien qu'on aura un seul axe, les couples de plans cycliques passant par cet axe et correspondants aux surfaces individuelles formeront un faisceau en involution, dont un plan double est asymptotique à la cubique. *L'autre plan double de l'involution représentera la direction des sections circulaires de l'hyperboloïde* (unique) *de rotation, passant par la parabole gauche.*

Bologne, octobre 1863.