49.

CONSIDERAZIONI SULLE CURVE PIANE DEL TERZ'ORDINE, COLLE SOLUZIONI DELLE QUESTIONI 26 E 27. [25]

Giornale di Matematiche, volume II (1864), pp. 78-85.

I.

È noto per un celebre teorema di NEWTON *) che qualsivoglia curva piana del terz'ordine è projettiva ad una delle parabole divergenti, le quali sono comprese nell'equazione

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d + 3ey^2 = 0. \tag{1}$$

La trasformazione projettiva si effettua **) mandando a distanza infinita un flesso e la relativa tangente stazionaria. Prendendo per asse delle x la polare armonica di questo flesso, la quale dopo la projezione risulta un *diametro* della curva, si ottiene l'equazione dianzi scritta ***).

NEWTON distingue nelle curve rappresentate da quell'equazione cinque forme essenzialmente diverse.

Se l'equazione

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0 \tag{2}$$

ha tre radici reali e differenti, la (1) rappresenta la *parabola campaniformis cum ovali* (specie 67.ª di NEWTON, fig. 70), composta di una branca parabolica e di un ovale.

---

*) *Enumeratio linearum tertii ordinis* (fa seguito all'edizione latina dell'*Optice*, Londini 1706), pag. 19.

**) CHASLES, *Aperçu historique*, note XX.

***) SALMON, *Higher plane curves*, 144.

Se l'equazione (2) ha due radici imaginarie, si ha la *parabola pura campaniformis* (specie 71.ª di Newton, fig. 74), costituita da una semplice branca parabolica.

Se l'equazione (2) ha due radici eguali, la (1) rappresenta la *parabola nodata* (specie 68.ª di Newton, fig. 72) o la *parabola punctata* (specie 69.ª di Newton, fig. 73).

Finalmente, se la (2) ha tre radici eguali, si ha la *parabola cuspidata*, detta anche *parabola Neiliana* o *parabola semicubica* (specie 70.ª di Newton, fig. 75).

Siano S e T gli invarianti di quarto e sesto grado, di una data curva di terz'ordine. Dalle conosciute espressioni generali di S, T *), si desume pel caso che la curva sia rappresentata dall'equazione (1),

$$\mathrm{S}=e^2(b^2-ac)\,,\qquad \mathrm{T}=4e^3(2b^3+a^2d-3abc)\,,$$

e, detto R il discriminante,

$$\mathrm{R}=64\mathrm{S}^3-\mathrm{T}^2\,,$$

si avrà

$$\mathrm{R}=16e^6\left(4(b^2-ac)^3-(2b^3+a^2d-3abc)^2\right),$$

cioè

$$\mathrm{R}=-16e^6a^2\Delta\,;$$

ove

$$\Delta=a^2d^2-3b^2c^2+4db^3+4ac^3-6abcd$$

è il discriminante della (2).

Ora è noto che l'equazione (2) ha tre radici reali distinte, ovvero ne ha due imaginarie, secondo che Δ è negativo o positivo; dunque se $\mathrm{R}>0$ la (1) rappresenta una *parabola campaniformis cum ovali*, e se $\mathrm{R}<0$ *una parabola pura campaniformis*.

Se $\Delta=0$, all'equazione (1) si può dare la forma

$$a\left(x+\frac{b}{a}+\frac{\mathrm{T}^{\frac{1}{3}}}{ae}\right)\left(x+\frac{b}{a}-\frac{\mathrm{T}^{\frac{1}{3}}}{2ae}\right)^2+3ey^2=0\,,$$

ovvero

$$a^2x'\left(x'-\frac{3\mathrm{T}^{\frac{1}{3}}}{2ae}\right)^2+3aey^2=0\,,$$

ove si è posto

$$x+\frac{b}{a}+\frac{\mathrm{T}^{\frac{1}{3}}}{ae}=x'\,.$$

La parte reale della curva è situata dalla banda delle x' positive o delle x' nega-

*) Salmon, *Higher plane curves,* 199, 200.

tive, secondo che $ae<0$, ovvero $ae>0$; onde il punto doppio

$$x' = \frac{3T^{\frac{1}{3}}}{2ae}, \quad y=0$$

è situato, rispetto all'origine delle x', dalla stessa banda della curva o dalla banda contraria, secondo che T è negativo o positivo. Dunque la (1) rappresenta una *parabola nodata* se $R=0$ e $T<0$; invece rappresenta una *parabola punctata* se $R=0$ e $T>0$.

Se oltre ad $R=0$ si ha $T=0$ (epperò anche $S=0$), il primo membro della (2) diviene un cubo perfetto, e la (1) rappresenta una *parabola cuspidata*.

Supposto ora che la parabola divergente (1) venga trasformata mediante la prospettiva, le quantità R, S, T non muteranno di segno, ma si conserveranno positive, negative o nulle, quali erano per lo avanti. Dunque, data una qualsivoglia curva di terz'ordine:

1.° Se il discriminante R è positivo, la curva è composta di due *pezzi* distinti, cioè di due parti che rimangono separate per qualsivoglia projezione. Uno di questi pezzi contiene tre flessi reali; l'altro pezzo non ha punti singolari e può essere projettato in un ovale, e come tale può chiamarsi un *ovale*, estendendo questa parola a significare anche le forme paraboliche ed iperboliche che nascono dalla projezione di un ovale ordinaria *). (In questo senso, una curva di second'ordine è sempre un ovale).

2.° Se il discriminante R è negativo, la curva consta di un solo pezzo dotato di tre flessi reali.

3.° Se il discriminante R è nullo, la curva è costituita da un solo pezzo e possiede un punto doppio, il quale è un nodo o un punto isolato o una cuspide secondo che l'invariante T è negativo, positivo o nullo.

Per tal modo è risoluta la quistione 26, proposta dal sig. SYLVESTER.

II.

È noto che il rapporto anarmonico delle quattro rette che si possono condurre da un punto *qualunque* di una curva di terz'ordine (e sesta classe) a toccarla altrove è un numero *costante* **). Questo numero, che può essere denominato il *rapporto anarmonico* della cubica, si conserva inalterato nella prospettiva; cioè esso è comune a tutte le cubiche projettive; ed al contrario due cubiche di diverso rapporto anarmonico non possono essere projettive.

---

*) BELLAVITIS, *Sulla classificazione delle curve di terz'ordine* (Mem. della Società Italiana, tom. XXV, parte 2.ª), Modena 1851.

**) SALMON, *Higher plane curves*, 158.

Sia la *parabola campaniformis cum ovali :*

(1) $$y^2 = x(x-a)(x-b)$$

(a e b positivi, $a<b$), ove l'origine delle coordinate è un punto d'intersezione dell'ovale col diametro $y=0$. Le tangenti che si possono condurre alla curva da questo punto sono rappresentate dalla equazione

$$y^4 + 2(a+b)y^2x^2 + (a-b)^2x^4 = 0,$$

da cui

$$\frac{y^2}{x^2} = -(a+b) \pm 2\sqrt{ab}.$$

E siccome $a+b > 2\sqrt{ab}$, così quelle quattro tangenti sono tutte imaginarie.

Pongasi ora $x-b=x'$, cioè si trasporti l'origine delle coordinate nel punto in cui il diametro $y=0$ incontra la branca parabolica. L'equazione (1) diverrà

$$y^2 = x'(x'+b)(x'+b-a),$$

e le tangenti dalla nuova origine saranno

$$y^4 - 2(2b-a)y^2x'^2 + a^2x'^4 = 0,$$

da cui

$$\frac{y^2}{x^2} = (2b-a) \pm 2\sqrt{b(b-a)}.$$

E siccome $2b-a > 2\sqrt{b(b-a)}$, così le quattro tangenti sono tutte reali.

Osserviamo poi che il rapporto anarmonico della cubica è *) eguale a quello dei quattro punti in cui il diametro $y=0$ (che è la polare armonica del flesso all'infinito) incontra la curva e la retta all'infinito (che è la tangente nel flesso medesimo); ond'è che quel rapporto anarmonico è eguale ad $\left(\frac{a}{b}, \frac{a-b}{a}, \frac{b}{b-a}\right)$. Se $b=2a$, la cubica è *armonica.*

Consideriamo ora la *parabola pura campaniformis:*

$$y^2 = x\left((x+a)^2 + b^2\right),$$

posta l'origine nel punto in cui la curva è segata dal diametro $y=0$. Le quattro tangenti condotte dall'origine sono rappresentate dall'equazione

$$y^4 - 4ay^2x^2 - 4b^2x^4 = 0,$$

*) *Introd. ad una teoria geom. delle curve piane* [Queste Opere, n. **29** (t. 1.°)], 145.

da cui

$$\frac{y^2}{x^2}=2a\pm 2\sqrt{a^2+b^2},$$

dunque due sole di esse sono reali.

Il rapporto anarmonico della cubica è $\left(\frac{-a+bi}{-a-bi}\,,\ \frac{2bi}{-a+bi}\,,\ \frac{a+bi}{2bi}\right)$ *); epperò, se $a=0$, la cubica è armonica.

Da quanto precede concludiamo che, data una qualsivoglia curva di terz'ordine:

1.° Se il discriminante R è positivo, nel qual caso la cubica è composta di due pezzi distinti, una branca coi flessi ed un ovale, da ciascun punto dell'ovale non si può condurre alcuna retta reale a toccare altrove la curva; mentre da ogni punto della branca coi flessi si possono condurre quattro rette reali, due a toccare altrove la branca medesima e due a toccare l'ovale. Il rapporto anarmonico della curva è sempre un numero reale, però diverso da $(0, 1, \infty)$; ma può essere $\left(-1, 2, \frac{1}{2}\right)$ nel qual caso la cubica è armonica.

2.° Se il discriminante R è negativo, da ciascun punto della curva si possono condurre due (e solamente due) rette reali a toccarla altrove. Il rapporto anarmonico della cubica è sempre imaginario, salvo che la cubica sia armonica, nel qual caso il rapporto suddetto diviene $\left(-1, 2, \frac{1}{2}\right)$.

3.° La cubica è armonica quando l'invariante T è nullo: onde in tal caso il segno del discriminante R sarà quello stesso dell'invariante S; cioè una cubica armonica consta di due pezzi distinti o di un pezzo unico, secondo che S è positivo o negativo.

4.° Quando S è nullo, si ha $R=-T^2$; dunque una cubica *equianarmonica* **) è sempre costituita da un pezzo solo.

5.° Finalmente, quando $R=0$, la cubica non è più della sesta classe, ed il suo rapporto anarmonico diviene $(0, 1, \infty)$.

III.

Data una curva di terz'ordine (e di sesta classe), è noto che si possono determinare quattro trilateri (*sizigetici*), ciascun de' quali è formato da tre rette contenenti i nove flessi della curva. Uno di questi trilateri è costituito da tre rette reali: prese le quali

*) $i=\sqrt{-1}$.

**) *Introd.* 131, *b*; 145.

come lati del triangolo fondamentale, in un sistema di coordinate trilineari, l'equazione della curva sarà

(1) $$x^3+y^3+z^3+6dxyz=0.$$

Condotta pel punto $y=z=0$ la retta $\omega y-z=0$, questa sarà tangente alla cubica, purchè sia sodisfatta la condizione

(2) $$(1+\omega^3)^2+32d^3\omega=0,$$

da cui

$$\omega^3=-(1+16d^3)\pm\sqrt{32d^3(1+8d^3)},$$

onde ω avrà un valor reale, quando sia $d>0$, ovvero quando sia $1+8d^3<0$. Siccome il discriminante R della (1) è eguale a $-(1+8d^3)^3$; così, quando la cubica sia composta di due pezzi distinti, ω avrà un valor reale.

Supposto adunque che ω abbia un valor reale θ, dalla

$$(1+\theta^3)^2+32d^3\theta^3=0,$$

si ricaverà

$$d=-\frac{1}{2\theta}\left(\frac{1+\theta^3}{2}\right)^{\frac{2}{3}},$$

epperò la (2), ossia la condizione affinchè la retta $\omega y-z=0$ sia tangente alla cubica (1) diverrà

$$(\theta^3\omega^3-1)(\theta^3-\omega^3)=0,$$

equazione di sesto grado le cui radici sono

$$\theta\,,\quad \alpha\theta\,,\quad \alpha^2\theta\,,\quad \frac{1}{\theta}\,,\quad \frac{1}{\alpha\theta}\,,\quad \frac{1}{\alpha^2\theta}\,,$$

indicata con α una radice cubica imaginaria dell'unità. Dando questi sei valori ad ω nelle equazioni

$$\omega y-z=0\,,\quad \omega z-x=0\,,\quad \omega x-y=0\,,$$

si avranno i tre sistemi di sei tangenti che si ponno condurre alla curva dai vertici del triangolo fondamentale. In ciascun sistema vi sono due tangenti reali. Sono inoltre evidenti le proprietà che seguono:

1.° In ciascun sistema le sei tangenti sono accoppiate in involuzione, così:

$$\begin{aligned} \theta y-z&=0\,, & y-\theta z&=0\,,\\ \alpha\theta y-z&=0\,, & y-\alpha\theta z&=0\,,\\ \alpha^2\theta y-z&=0\,, & y-\alpha^2\theta z&=0\,; \end{aligned}$$

nella quale involuzione le $y=0$, $z=0$ sono rette coniugate, e $y+z=0$, $y-z=0$ sono i raggi doppi.

Le medesime sei tangenti si possono accoppiare in involuzione anche altrimenti:

$$\begin{array}{ll} \theta y - z = 0\,, & y - \alpha\theta z = 0\,, \\ \alpha\theta y - z = 0\,, & y - \alpha^2\theta z = 0\,, \\ \alpha^2\theta y - z = 0\,, & y - \theta z = 0\,, \end{array}$$

ove $y=0$, $z=0$ sono rette coniugate, mentre i raggi doppi sono $y+\alpha^2 z=0$, $y-\alpha^2 z=0$.

Ovvero anche così:

$$\begin{array}{ll} \theta y - z = 0\,, & y - \alpha^2\theta z = 0\,, \\ \alpha\theta y - z = 0\,, & y - \theta z = 0\,, \\ \alpha^2\theta y - z = 0\,, & y - \alpha\theta z = 0\,, \end{array}$$

ove $y=0$, $z=0$ sono ancora rette coniugate, e $y+\alpha z=0$ $y-\alpha z=0$ sono le rette doppie.

Le tre coppie di raggi doppi formeranno adunque una nuova involuzione, cogli elementi doppi $y=0$, $z=0$.

2.° Ciascun sistema si divide in due terne,

$$\begin{array}{lll} \theta y - z = 0\,, & \alpha\theta y - z = 0\,, & \alpha^2\theta y - z = 0\,, \\ y - \theta z = 0\,, & y - \alpha\theta z = 0\,, & y - \alpha^2\theta z = 0\,, \end{array}$$

e in ciascuna terna le tre tangenti formano un fascio equianarmonico con l'una o con l'altra delle rette $y=0$, $z=0$.

IV.

Per un flesso i della data cubica si conduca una trasversale a segare nuovamente la curva ne' punti m, n; le tangenti concorreranno in un punto t della retta I polare armonica di i. E siccome la retta I è incontrata dalla trasversale nel punto coniugato armonico di i rispetto ai due m, n, così le tangenti tm, tn, formeranno sistema armonico colle ti ed I *).

Se invece si assume un punto qualunque t in I, e da esso si tiri una tangente tm alla cubica, verrà con ciò ad essere data un'altra tangente passante per lo stesso punto t:

*) *Introd.* 139.

la quale può costruirsi in due modi: o come coniugata armonica di tm rispetto alle ti, I; o come tangente in quel punto n che è in linea retta con m e col flesso i.

Dunque le sei tangenti che si ponno condurre alla cubica da un punto qualunque t della polare armonica I di un flesso i, sono coniugate a due a due in modo che i punti di contatto di due coniugate sono in linea retta col flesso i, e le due coniugate medesime formano sistema armonico colla I e colla retta che da t va al flesso i; cioè le sei tangenti formano un fascio in involuzione, i cui raggi doppi sono I e ti *).

È noto **) che i punti in cui si segano a tre a tre le nove rette I, polari armoniche de' flessi, sono i vertici r de' trilateri sizigetici, cioè de' trilateri formati dalle dodici rette che contengono a tre a tre i flessi medesimi. Onde, se r è un vertice di un tale trilatero, in esso si segheranno le polari armoniche de' tre flessi situati nel lato opposto: e le sei tangenti della cubica passanti per r saranno coniugate in involuzione in tre modi distinti, avendo per elementi doppi la retta che va da r ad uno de' flessi nominati e la polare armonica corrispondente.

Sia $r_1r_2r_3$ un trilatero sizigetico, ed $i_1i_2i_3$ tre flessi della cubica situati in una stessa retta e rispettivamente nei lati r_2r_3, r_3r_1, r_1r_2; le loro polari armoniche concorrono in uno stesso punto e passano poi rispettivamente per r_1, r_2, r_3. Per ciascuno di questi tre ultimi punti potremo condurre alla cubica due tangenti i cui punti di contatto siano in linea retta col flesso corrispondente; e siccome le tre corde di contatto segano la curva in tre punti $i_1i_2i_3$ allineati sopra una retta, così le altre sei intersezioni, cioè i sei punti di contatto, saranno in una conica ***).

Questo teorema comprende in sè quello del signor SYLVESTER (questione 27). La cubica si supponga composta di due pezzi distinti: un ovale †) ed una branca con tre flessi reali $i_1i_2i_3$. Ed i punti $r_1r_2r_3$ siano i vertici di quello fra i trilateri sizigetici che è tutto reale: i lati del quale passeranno rispettivamente pei flessi anzidetti. Si è già dimostrato che da ciascuno de' punti $r_1r_2r_3$ si possono condurre due tangenti reali (due sole) alla curva: dunque quei punti sono tutti esterni all'ovale e le tangenti che passano per essi toccano tutte e sei l'ovale medesimo. Così è dimostrato che:

Se una curva di terz'ordine ha un ovale, e se dai vertici del trilatero sizigetico si

---

*) Di qui consegue che il problema (di sesto grado) di condurre da un punto dato una retta tangente ad una data curva di terz'ordine è risolubile algebricamente, se il punto dato è situato nella polare armonica di un flesso.

**) *Introd.* 142.

***) *Introd.* 39, *a*.

†) S'intenda questo vocabolo *ovale* nel senso generale attribuitogli dal prof. BELLAVITIS ed esplicato sopra (I).

conducono le coppie di tangenti all'ovale, i loro sei punti di contatto appartengono ad una conica.

Aggiungasi che le tangenti medesime vanno a segare la branca de' flessi in sei punti situati in un'altra conica *).

Ma dalle cose precedenti emerge una proprietà più generale. Ritenuto ancora che $i_1 i_2 i_3$ siano tre flessi in linea retta, di una qualsivoglia data cubica, siano $t_1 t_2 t_3$ tre punti presi ad arbitrio e rispettivamente nelle polari armoniche di quelli. Condotte per ciascuno de' punti $t_1 t_2 t_3$ due tangenti i cui punti di contatto siano in linea retta col flesso corrispondente, siccome le tre corde di contatto segano la curva in tre punti $i_1 i_2 i_3$ di una medesima retta, così le rimanenti intersezioni, cioè i punti di contatto delle sei tangenti saranno in una conica. E le medesime tangenti incontreranno di nuovo la curva in altri sei punti appartenenti ad una seconda conica.

Bologna, 24 maggio 1864.

*) *Introd.* 45, *b*.