62.

SULLE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE DELLE FIGURE PIANE. [72]

NOTA II.

Memorie dell'Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, serie II, tomo V (1865), pp. 3-35.
Giornale di Matematiche, volume III (1865), pp. 269-280, 363-376.

In una breve Memoria che ebbe l'onore d'essere inserita nei volumi della nostra Accademia *), io mi ero proposto il problema generale della trasformazione di una figura piana in un'altra piana del pari, sotto la condizione che i punti delle due figure si corrispondano ciascuno a ciascuno, in modo unico e determinato, e che alle rette della figura data corrispondano nella derivata curve di un dato ordine n. Ed ivi ebbi a dimostrare che le curve della seconda figura, corrispondenti alle rette della prima, debbono avere in comune certi punti, alcuni de' quali sono semplici, altri doppi, altri tripli, ecc.; e che i numeri di punti di queste varie specie debbono sodisfare a certe due equazioni. Naturalmente queste equazioni ammettono in generale più soluzioni, il numero delle quali è tanto più grande quanto è più grande n; e ciascuna soluzione offre una speciale maniera di trasformazione.

Fra tutte le diverse trasformazioni corrispondenti a un dato valore di n ve n'ha una che può dirsi la più semplice, perchè in essa le curve d'ordine n che corrispondono alle rette della figura proposta hanno in comune null'altro che un punto $(n-1)^{plo}$ e $2(n-1)$ punti semplici. Di questa speciale trasformazione si è occupato un abilissimo geometra francese, il sig. JONQUIÈRES, il quale **) ne ha messe in luce parecchie ele-

*) *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane,* Nota 1.ª (Memorie dell'Accademia di Bologna, serie 2ª, tomo 2º, 1863). [Queste Opere, n. **40**].

**) Nouvelles Annales de Mathématiques, Paris 1864.

ganti proprietà e ne ha fatta applicazione alla generazione di una certa classe di curve gobbe.

Ora io mi propongo di mostrare che lo stesso metodo e le stesse proprietà si possono estendere anche alle trasformazioni che corrispondono a tutte le altre soluzioni delle due equazioni che ho accennate. E per tal modo si acquisterà anche un mezzo facile per la costruzione di altrettante classi di curve gobbe.

Però lo scopo principale di questa seconda memoria è uno studio intorno alla curva *Jacobiana*, cioè intorno al luogo dei punti doppi delle curve di una figura che corrispondono alle rette dell'altra. Tale studio chiarirà che la Jacobiana si decompone in più linee di vari ordini, e che i numeri delle linee di questi vari ordini costituiscono una soluzione delle due equazioni di condizione sopra citate. Le soluzioni di queste due equazioni si presentano così coniugate a due a due. Ho anche potuto determinare alcune coppie di soluzioni coniugate corrispondenti ad n qualunque: ma la ricerca del completo sistema delle soluzioni supera di troppo le mie forze perchè io non l'abbia a lasciare a chi può risolvere i difficili problemi dell'analisi indeterminata.

1. Imagino in un dato piano P una rete di curve d'ordine n aventi x_1 punti semplici, x_2 punti doppi, $\ldots x_r$ punti $(r)^{pli}$ $,\ldots x_{n-1}$ punti $(n-1)^{pli}$ comuni: e suppongo che due curve qualunque della rete possano avere un solo punto comune, oltre agli anzidetti che dirò *punti-base* o *punti principali* $\{$*fondamentali*$\}$. Avremo allora le due equazioni *) [73]

$$\sum \frac{r\,(r+1)}{2}\,x_r = \frac{n\,(n+3)}{2} - 2, \tag{1}$$

$$\sum r^2 x_r = n^2 - 1\,, \tag{2}$$

alle quali devono sodisfare i numeri $x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}$.

Una rete siffatta ha parecchie rimarchevoli proprietà che si mettono in evidenza stabilendo una corrispondenza projettiva fra le curve della rete medesima e le rette di un piano.

Imaginiamo infatti un altro piano P', che può anche coincidere con P, ed assumiamo in esso quattro rette $R^1\, R^2\, R^3\, R^4$ (tre qualunque delle quali non passino per uno stesso punto) come corrispondenti a quattro curve $C_n^1\, C_n^2\, C_n^3\, C_n^4$ scelte ad arbitrio nella rete del piano P, in modo però che tre qualunque di esse non appartengano ad uno stesso fascio, e quindi si proceda con metodo analogo a quello che si terrebbe per la costruzione di due figure omografiche **). Alla retta che unisce, a cagion di

*) Veggasi la 1.a Nota già citata.

**) CHASLES, *Géom. Sup.* n.o 507.

esempio, il punto $R^1 R^2$ al punto $R^3 R$ si faccia corrispondere quella curva che è comune ai fasci $C_n^1 C_n^2$, $C_n^3 C_n^4$; ed allora per qualunque altra retta del fascio $R^1 R^2$ la corrispondente curva del fascio $C_n^1 C_n^2$ sia determinata dalla condizione che il rapporto anarmonico di quattro rette del primo fascio sia eguale al rapporto anarmonico de' corrispondenti elementi del secondo. Analoghe considerazioni s'intendano fatte per tutt'i vertici del quadrilatero completo formato dalle quattro rette $R^1 R^2 R^3 R^4$: onde si potrà costruire un fascio di curve, appartenenti alla rete del piano P, il quale sia projettivo al fascio delle rette incrociate in uno qualunque dei vertici del quadrilatero menzionato.

Se ora si fissa ad arbitrio un punto nel piano P', e lo si congiunge a tre vertici del quadrilatero, le rette congiungenti corrispondono a curve del piano P già individuate, ed appartenenti ad uno stesso fascio: epperò a qualunque retta condotta per quel punto corrisponderà una curva unica e determinata.

Per tal modo le rette del piano P' e le curve della rete nel piano P si corrispondono anarmonicamente, ciascuna a ciascuna, in modo che ad un fascio di rette in P' corrisponde in P un fascio projettivo di curve della rete. Alle rette che nel piano P' passano per uno stesso punto a' corrispondono adunque, in P, altrettante curve le quali formano un fascio e per conseguenza hanno in comune, oltre ai punti principali della rete, un solo e individuato punto a. E viceversa, dato un punto a nel piano P, le curve della rete, che passano per a, formano un fascio e corrispondono a rette nel piano P' che s'incrociano in un punto a'. Donde segue che ad un punto qualunque di uno de' piani P, P' corrisponde nell'altro un punto unico e determinato.

2. Se il punto a si muove nel piano P descrivendo una retta R, quale sarà il luogo del corrispondente punto a'? Una qualsivoglia curva della rete in P contiene n posizioni del punto a; dunque la corrispondente retta in P' conterrà le n corrispondenti posizioni di a'. Cioè il luogo di a' sarà una curva d'ordine n: ossia ad una retta qualunque nel piano P corrisponde in P' una curva d'ordine n.

Tutte le rette che nel piano P passano per un medesimo punto formano un fascio: quindi, anche nel piano P', le corrispondenti curve saranno tali che tutte quelle passanti per uno stesso punto formino un fascio, cioè per due punti presi ad arbitrio passi una sola di quelle curve che corrispondono alle rette del piano P. Queste curve costituiscono adunque una rete. E siccome due rette qualunque nel piano P determinano un punto unico, così anche in P' le due corrispondenti curve individueranno un punto solo: le rimanenti loro intersezioni saranno cioè punti comuni a tutte le curve analoghe. Siano $y_1, y_2, \ldots y_r, \ldots y_{n-1}$ i numeri dei punti semplici, doppi, $\ldots (r)^{pli}, \ldots (n-1)^{pli}$ comuni a tutte le curve menzionate (cioè i punti principali della rete formata nel piano P' dalle curve che corrispondono alle rette del piano P); avremo in virtù delle cose discorse,

(3) $$\sum \frac{r(r+1)}{2} y_r = \frac{n(n+3)}{2} - 2,$$

(4) $$\sum r^2 y_r = n^2 - 1.$$

3. Sia ora L_n una data curva della rete in P; L' la corrispondente retta in P'; ed o uno de' punti principali pel quale L_n passi r volte. Se intorno ad o facciamo girare (nel piano P) una retta M, su di essa avremo $n-r$ punti variabili della curva L_n, le altre r intersezioni essendo fisse e riunite in o. La curva variabile M'_n corrispondente (in P') alla retta M segherà per conseguenza la retta data L' in n punti de' quali $n-r$ soltanto varieranno col variare della curva medesima. Dunque M'_n è composta di una curva fissa d'ordine r e di una curva variabile d'ordine $n-r$. I punti della curva fissa corrispondono tutti al punto principale o; ed al fascio delle rette condotte per o nel piano P corrisponderà in P' un fascio di curve d'ordine $n-r$, ciascuna delle quali accoppiata colla curva fissa d'ordine r dà una curva d'ordine n della rete.

Analogamente ad ogni punto principale $(r)^{plo}$ in P' corrisponderà in P una certa curva d'ordine r; cioè ad una retta variabile in P' intorno a quel punto corrisponderà nell'altro piano una linea composta d'una curva variabile d'ordine $n-r$ e d'una curva fissa d'ordine r.

Si chiameranno *curve principali* {*fondamentali*} le curve di un piano (P o P') che corrispondono ai punti principali dell'altro piano (P' o P).

4. In sostanza, i punti di una curva principale nell'uno de' due piani corrispondono ai punti infinitamente vicini al corrispondente punto principale nell'altro piano *). Donde segue che le due curve, l'una principale d'ordine r, l'altra d'ordine $n-r$, che insieme compongono la curva corrispondente ad una retta R passante per un punto principale o di grado r, hanno, oltre ai punti principali, un solo punto comune, il quale è quel punto della curva principale che corrisponde al punto di R infinitamente vicino ad o. E ne segue inoltre che una curva principale, considerata come una serie di punti, è projettiva ad un fascio di rette o, ciò che torna lo stesso, ad una retta punteggiata. Le curve principali hanno dunque la proprietà, del pari che le curve delle reti ne' due piani, di avere il massimo numero di punti multipli che possano appartenere ad una curva di dato ordine **). Così fra le curve principali, le cubiche avranno un punto doppio; le curve del quart'ordine un punto triplo o tre punti doppi;

*) {Da ciò segue che le curve fondamentali sono di genere zero}.

**) CLEBSCH, *Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind* (Giornale di CRELLE-BORCHARDT, t. 64, p. 43, Berlin 1864).

le curve del quint'ordine un punto quadruplo, o un punto triplo e tre punti doppi, o sei punti doppi; ecc.

5. Un fascio di rette nel piano P', le quali passino per un punto qualsivoglia dato, contiene y_r raggi diretti ai punti principali di grado r; quindi il fascio delle corrispondenti curve della rete, nel piano P, conterrà y_r curve, ciascuna *composta* di una curva principale d'ordine r e di un'altra curva d'ordine $n-r$. Se vogliamo calcolare i punti doppi del fascio, osserviamo *) che un punto $(r)^{plo}$ comune a tutte le curve del fascio conta per $(r-1)(3r+1)$ punti doppi: epperò tutt'i punti principali del piano P equivalgono insieme a $\Sigma(r-1)(3r+1)x_r$ punti doppi. A questi dobbiamo aggiungere tanti punti doppi quante sono le curve composte (giacchè le due curve componenti di ciascuna curva composta hanno un punto comune oltre ai punti principali), cioè quanti sono i punti principali del piano P', ossia Σy_r. D'altronde il numero totale dei punti doppi d'un fascio di curve d'ordine n è $3(n-1)^2$; e siccome le curve della rete, avendo già ne' punti principali il massimo numero di punti multipli, non possono avere un ulteriore punto doppio senza decomporsi in due curve separate, così avremo

$$\Sigma(r-1)(3r+1)x_r+\Sigma y_r=3(n-1)^2.$$

Ma le equazioni (1), (2) combinate insieme dànno

(5) $$\Sigma r(3r-2)x_r=3(n-1)^2$$
cioè
$$\Sigma(r-1)(3r-1)x_r+\Sigma x_r=3(n-1)^2$$
dunque
(6) $$\Sigma y_r=\Sigma x_r$$

ossia le due reti nei piani P, P' hanno lo stesso numero di punti principali.

6. Dal fatto che una curva della rete (nel piano P) non può avere, oltre ai punti principali, un altro punto doppio senza decomporsi in due curve una delle quali è una curva principale: nel qual caso poi il punto doppio ulteriore è l'intersezione delle curve componenti distinta dai punti principali; da questo fatto, io dico, si raccoglie evidentemente che le curve principali del piano P sono il luogo dei punti doppi delle curve della rete in questo piano, ossia ne costituiscono la *Jacobiana*. Ciò combina anche colla equazione

(7) $$\Sigma r y_r=3(n-1)$$

che è una conseguenza delle (3), (4) e che esprime essere la somma degli ordini delle

*) Annali di Matematica, tom. VI, p. 156. [Queste Opere, n. **53**].

curve principali eguale all'ordine della Jacobiana della rete. Analogamente la Jacobiana della rete nel piano P' è costituita dalle curve principali di questo piano: alla quale proprietà corrisponde l'equazione

(8) $$\Sigma r x_r = 3(n-1)$$

che si deduce dalle (1), (2).

7. Sia x il numero delle volte che la curva principale C_r (nel piano P) corrispondente al punto principale o'_r (nel piano P') passa pel punto principale o_s (nel piano P) al quale corrisponda (in P') la curva principale C'_s. Si conduca per o_s una retta arbitraria T che seghi C_r in altri $r-x$ punti. Alla retta T corrisponda una curva d'ordine n composta di C'_s e di un'altra curva K'_{n-s}. La C'_s corrisponde al solo punto o_s, mentre K'_{n-s} corrisponde agli altri punti di T. Ma i punti di C_r corrispondono al punto o'_r; dunque K'_{n-s} passa $r-x$ volte per o'_r, e conseguentemente C'_s passerà $r-(r-x)$ volte per lo stesso punto o'_r. Ossia la curva C_r passa tante volte per o_s quante C'_s per o'_r.

8. È noto che, se un punto è multiplo secondo s per tutte le curve di una rete, esso sarà multiplo secondo $3s-1$ per la Jacobiana. Dunque il numero totale dei rami delle curve principali (in P) che passano per un punto principale di grado s è $3s-1$. Ne segue, in virtù del teorema (7), che una curva principale d'ordine s passa con $3s-1$ rami pei punti principali del suo piano *).

9. Una curva qualunque C'_n della rete nel piano P' ha r rami incrociati nel punto principale o'_r, i quali hanno le rispettive tangenti tutte distinte, se nel piano P la retta R che corrisponde a C'_n incontra in r punti distinti la curva principale C_r corrispondente ad o'_r. Ora siccome C_r ha un numero di punti multipli equivalente ad $\frac{(r-1)(r-2)}{2}$ punti doppi, la classe di questa curva **) sarà $2(r-1)$; dunque in un

*) | Indicando con $x_s^{(r)}$ la molteplicità di un punto principale d'ordine s del piano P per una curva principale d'ordine r dello stesso piano, siccome questa curva è di genere zero, si ha

$$\sum_{s=1}^{s=r-1} \frac{1}{2} x_s^{(r)} (x_s^{(r)} - 1) = \frac{1}{2}(r-1)(r-2).$$

Inoltre si è dimostrato che

$$\sum_{s=1}^{s=r-1} x_s^{(r)} = 3r-1.$$

Di qui

$$\sum_{s=1}^{s=r-1} \frac{1}{2} x_s^{(r)} (x_s^{(r)} + 1) = \frac{1}{2} r(r+3),$$

ossia ogni curva principale è pienamente determinata dai punti principali. |

) Vedi anche *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane,* 104 f. (Memorie dell'Accademia di Bologna, serie 1.ª tomo 12.º, 1862). [Queste Opere, n. **29 (t. 1.º)].

fascio di curve della rete (in uno de' piani dati) vi sono $2(r-1)$ curve ciascuna delle quali ha, in un dato punto principale di grado r, due rami toccati da una stessa retta.

La curva principale C_r ha poi $3(r-2)$ flessi e $2(r-2)(r-3)$ tangenti doppie; dunque la rete (di uno qualunque de' piani dati) conta $3(r-2)$ curve ciascuna delle quali ha tre rami toccati da una stessa tangente in un dato punto principale di grado r; e la rete medesima conta $2(r-2)(r-3)$ curve che in questo punto hanno due rami toccati da una retta e due altri rami toccati da una seconda retta.

10. Essendo $2(r-1)$ la classe di una curva principale d'ordine r, la classe della Jacobiana (in una qualunque delle due reti) sarà $2\Sigma(r-1)y_r$ ossia $6(n-1)-2\Sigma x_r$ in virtù delle (7), (6).

La classe della Jacobiana si trova anche dietro la conoscenza del suo ordine che è $3(n-1)$, e de' suoi punti multipli che equivalgono a $\Sigma\frac{(3r-1)(3r-2)}{2}x_r$ punti doppi. Si ha così

$$3(n-1)(3n-4)-\Sigma(3r-1)(3r-2)x_r=6(n-1)-\Sigma x_r,$$

equazione identica in virtù delle (2), (8).

11. Siccome quei punti di una curva principale del piano P, che non sono punti principali di questo piano, corrispondono tutti ad un solo punto principale dell'altro piano, così tutte le intersezioni di due curve principali sono necessariamante punti principali. Ne segue che se due date curve principali d'ordini r, s passano l'una ρ volte, l'altra σ volte per uno stesso punto principale, la somma dei prodotti analoghi a $\rho\sigma$ e relativi a tutt'i punti principali del piano sarà eguale ad rs.

Analogamente una curva principale ed una curva d'ordine n della rete (nello stesso piano) non si segano altrove che ne' punti principali: infatti, se una curva della rete passa per un punto di una curva principale che non sia un punto principale, essa si decompone in due curve, una delle quali è la curva principale medesima. Dunque, se una data curva principale d'ordine r passa ρ volte per un punto principale di grado s, la somma dei prodotti analoghi a ρs e relativi ai punti principali del piano è eguale ad rn.

Donde si conclude, in virtù di una proprietà già notata (7):

Se una curva principale passa rispettivamente ρ, σ volte per due dati punti principali i cui gradi siano r, s, la somma dei prodotti analoghi a $\rho\sigma$ e relativi a tutte le curve principali del piano è eguale ad rs.

Se una curva principale d'ordine s passa ρ volte per un dato punto principale di grado r, la somma dei prodotti analoghi a ρs e relativi a tutte le curve principali del piano è eguale ad rn.

12. Le equazioni (1), (2), (3), (4) manifestano che le proprietà dei due piani P, P'

sono perfettamente reciproche: ossia che le soluzioni delle equazioni (1), (2) sono coniugate a due a due nel modo seguente:

Se le curve d'ordine n di una rete hanno in comune x_1 punti semplici, x_2 punti doppi, ... x_r punti $(r)^{pli}$, ... x_{n-1} punti $(n-1)^{pli}$, ove $(x_1, x_2, \dots x_r, \dots x_{n-1})$ è una soluzione delle equazioni (1), (2), *allora la Jacobiana della rete è composta di y_1 rette, y_2 coniche, ... y_r curve d'ordine r, ... ed y_{n-1} curve d'ordine $n-1$, ove $(y_1, y_2, \dots y_r, \dots y_{n-1})$ è un'altra soluzione delle medesime equazioni* (1), (2). *Inoltre questa seconda soluzione è tale che, se si considera una rete di curve d'ordine n aventi in comune y_1 punti semplici, y_2 punti doppi, ... y_r punti $(r)^{pli}$, ... ed y_{n-1} punti $(n-1)^{pli}$, la Jacobiana di questa seconda rete sarà composta di x_1 rette, x_2 coniche, ... x_r curve d'ordine r, ... ed x_{n-1} curve d'ordine $n-1$* *).

Le due soluzioni $(x_1, x_2, \dots x_r, \dots x_{n-1})$, $(y_1, y_2, \dots y_r, \dots y_{n-1})$ definite nel precedente enunciato si chiameranno *soluzioni coniugate.* Esse sodisfanno alle relazioni seguenti

$$\begin{aligned} \Sigma r x_r &= \Sigma r y_r = 3(n-1), \\ \Sigma r^2 x_r &= \Sigma r^2 y_r = n^2 - 1 \\ \Sigma x_r &= \Sigma y_r, \end{aligned}$$

ma sono poi meglio caratterizzate da un'altra proprietà che sarà dimostrata in seguito.

13. Esaminiamo ora alcuni casi particolari. Sia $n=2$, cioè la rete sia formata da coniche passanti per tre punti $o_1 o_2 o_3$. La Jacobiana è costituita dalle tre rette $o_2 o_3$, $o_3 o_1$, $o_1 o_2$; infatti un punto qualunque m della retta $o_2 o_3$ è doppio per una conica della rete, composta delle due rette $o_2 o_3$, $o_1 m$; ecc.

Ad $x_1=3$ corrisponde adunque $y_1=3$, ossia le equazioni (1), (2) ammettono in questo caso una (sola) coppia di soluzioni coniugate che coincidono in una soluzione unica.

$n=2$
$x_1=3$

14. Sia $n=3$; le (1), (2) danno $x_1=4$, $x_2=1$, cioè la rete sia formata da cubiche aventi in comune un punto doppio d e quattro punti ordinari $o_1 o_2 o_3 o_4$. La Jacobiana si compone della conica $d o_1 o_2 o_3 o_4$ e delle quattro rette $d(o_1, o_2, o_3, o_4)$. Infatti, un punto

*) Questo teorema è stato comunicato dal ch. sig. Hirst, a mio nome, all'*Associazione Britannica pel progresso delle scienze* (in Bath, 19 settembre 1864). Vedi *the Reader,* 1 october 1864, p. 418. [Queste Opere, n. **60**].

qualunque m della conica anzidetta è doppio per una cubica della rete che sia composta della conica medesima e della retta md; ed un punto qualunque m della retta do_1 è doppio per la cubica della rete composta della stessa retta do_1 e della conica $dmo_2o_3o_4$.

Ad $x_1=4, x_2=1$ corrisponde così $y_1=4$, $y_2=1$, cioè le due soluzioni coniugate coincidono.

$n=3$
—
$x_1=4$
$x_2=1$

15. Sia $n=4$; le (1), (2) ammettono le due soluzioni (non coniugate):

$$x_1=3, \quad x_2=3, \quad x_3=0,$$
$$x_1=6, \quad x_2=0, \quad x_3=1.$$

Nel primo caso la rete è formata da curve del quart'ordine aventi in comune tre punti doppi $d_1d_2d_3$ e tre punti semplici $o_1o_2o_3$; e la Jacobiana è composta delle tre coniche $d_1d_2d_3(o_2o_3, o_3o_1, o_1o_2)$ e delle tre rette d_2d_3, d_3d_1, d_1d_2. Infatti un punto qualunque m della conica $d_1d_2d_3o_2o_3$ è doppio per una curva della rete composta di questa conica e dell'altra conica $d_1d_2d_3o_1m$; ed un punto qualunque m della retta d_2d_3 è doppio per una curva della rete composta della retta medesima e della cubica $d_1^2d_2d_3o_1o_2o_3m$ *).

Analogamente, nel secondo caso, cioè quando le curve della rete abbiano in comune un punto triplo t e sei punti semplici $o_1o_2 \dots o_6$, si dimostra che la Jacobiana è costituita dalla cubica $t^2o_1o_2 \dots o_6$ e dalle sei rette $t(o_1, o_2, \dots o_6)$.

Per tal modo ad

$$x_1=3, \quad x_2=3, \quad x_3=0$$

corrisponde

$$y_1=3, \quad y_2=3, \quad y_3=0,$$

e ad

$$x_1=6, \quad x_2=0, \quad x_3=1$$

corrisponde

$$y_1=6, \quad y_2=0, \quad y_3=1;$$

*) Con questo simbolo si vuol indicare la cubica che ha un punto doppio in d_1 e passa inoltre pei punti $d_2d_3o_1o_2o_3m$.

cioè le equazioni (1), (2) ammettono due soluzioni distinte, ciascuna delle quali coincide colla propria coniugata.

$n=4$
$x_1=6\,,\ 3$
$x_2=0\,,\ 3$
$x_3=1\,,\ 0$

16. Sia $n=5$; le (1), (2) ammettono le tre seguenti soluzioni:

$$x_1=8\,,\quad x_2=0\,,\quad x_3=0\,,\quad x_4=1\,;$$
$$x_1=3\,,\quad x_2=3\,,\quad x_3=1\,,\quad x_4=0\,;$$
$$x_1=0\,,\quad x_2=6\,,\quad x_3=0\,,\quad x_4=0\,;$$

ciascuna delle quali coincide colla propria coniugata.

Nel primo caso le curve (del quint'ordine) della rete hanno in comune un punto quadruplo q ed otto punti semplici $o_1 o_2 \ldots o_8$; e la Jacobiana è costituita dalla curva di quart'ordine $q^3 o_1 o_2 \ldots o_8$ *) e dalle otto rette $q(o_1, o_2, \ldots o_8)$.

Nel secondo caso le curve della rete hanno in comune un punto triplo t, tre punti doppi $d_1 d_2 d_3$ e tre punti semplici $o_1 o_2 o_3$. La Jacobiana si compone della cubica $t^2 d_1 d_2 d_3 o_1 o_2 o_3$, delle tre coniche $t d_1 d_2 d_3 (o_1, o_2, o_3)$ e delle tre rette $t(d_1, d_2, d_3)$.

Nel terzo caso le curve della rete hanno in comune sei punti doppi $d_1 d_2 \ldots d_6$, e la Jacobiana è il sistema delle sei coniche che si possono descrivere per quei punti presi a cinque a cinque.

$n=5$
$x_1=8\,,3\,,0$
$x_2=0\,,3\,,6$
$x_3=0\,,1\,,0$
$x_4=1\,,0\,,0$

17. Per $n=6$ si hanno le seguenti quattro soluzioni:

$$x_1=10\,,\quad x_2=0\,,\quad x_3=0\,,\quad x_4=0\,,\quad x_5=1\,;$$
$$x_1=1\,,\quad x_2=4\,,\quad x_3=2\,,\quad x_4=0\,,\quad x_5=0\,;$$
$$x_1=3\,,\quad x_2=4\,,\quad x_3=0\,,\quad x_4=1\,,\quad x_5=0\,;$$
$$x_1=4\,,\quad x_2=1\,,\quad x_3=3\,,\quad x_4=0\,,\quad x_5=0\,;$$

*) Che ha un punto triplo in q e passa inoltre per $o_1 o_2 \ldots o_8$.

delle quali le prime due coincidono colle rispettive coniugate, mentre le ultime due sono coniugate fra loro.

Omettendo di considerare i primi due casi, limitiamoci ad osservare che nel terzo la rete è formata da curve del sest'ordine aventi in comune un punto quadruplo q, quattro punti doppi $d_1d_2d_3d_4$ e tre punti semplici $o_1o_2o_3$ *), e la Jacobiana risulta dalle tre cubiche $q^2d_1d_2d_3d_4\,(o_2o_3,\, o_3o_1,\, o_1o_2)$, dalla conica $qd_1d_2d_3d_4$ e dalle quattro rette $q\,(d_1,\, d_2,\, d_3,\, d_4)$; cioè ad

$$x_1=3,\quad x_2=4,\quad x_3=0,\quad x_4=1,\quad x_5=0,$$

corrisponde

$$y_1=4,\quad y_2=1,\quad y_3=3,\quad y_4=0,\quad y_5=0.$$

Invece ad

$$x_1=4,\quad x_2=1,\quad x_3=3,\quad x_4=0,\quad x_5=0$$

corrisponde

$$y_1=3,\quad y_2=4,\quad y_3=0,\quad y_4=1,\quad y_5=0;$$

infatti nel quarto caso le curve della rete hanno in comune tre punti tripli $t_1t_2t_3$, un punto doppio d, e quattro punti semplici $o_1o_2o_3o_4$; e la Jacobiana è composta della curva di quart'ordine $t_1^2t_2^2t_3^2do_1o_2o_3o_4$, delle quattro coniche $t_1t_2t_3d(o_1,\, o_2,\, o_3,\, o_4)$, e delle tre rette $t_2t_3,\, t_3t_1,\, t_1t_2$.

$n=6$

$x_1=$	10,	1,	4,	3
$x_2=$	0,	4,	1,	4
$x_3=$	0,	2,	3,	0
$x_4=$	0,	0,	0,	1
$x_5=$	1,	0,	0,	0

18. Analogamente, per $n=7$ si hanno cinque soluzioni, due delle quali sono coniugate fra loro. Per $n=8$ si hanno due coppie di soluzioni coniugate, e quattro altre soluzioni rispettivamente coniugate a sè stesse. Ecc. [74]

*) Vedi Magnus, *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie,* Bd. 1, p. VII, Berlin 1833.

$n = 7$

$x_1 =$	12,	2,	0,	5,	3
$x_2 =$	0,	3,	3,	0,	5
$x_3 =$	0,	2,	4,	3,	0
$x_4 =$	0,	1,	0,	1,	0
$x_5 =$	0,	0,	0,	0,	1
$x_6 =$	1,	0,	0,	0,	0

$n = 8$

$x_1 =$	14,	3,	1,	0,	3,	6	0,	2
$x_2 =$	0,	2,	3,	0,	6,	0	5,	0
$x_3 =$	0,	3,	2,	7,	0,	1	2,	5
$x =$	0,	0,	2,	0,	0,	3	0,	1
$x_5 =$	0,	1,	0,	0,	0,	0	1,	0
$x_6 =$	0,	0,	0,	0,	1,	0	0,	0
$x_7 =$	1,	0,	0,	0,	0,	0	0,	0

$n = 9$

$x_1 =$	16,	4,	2,	0,	3,	7	1,	3	0,	1
$x_2 =$	0,	1,	3,	4,	7,	0	4,	0	3,	1
$x_3 =$	0,	4,	1,	0,	0,	0	3,	4	3,	3
$x_4 =$	0,	0,	2,	4,	0,	3	0,	1	1,	3
$x_5 =$	0,	0,	1,	0,	0,	1	0,	1	1,	0
$x_6 =$	0,	1,	0,	0,	0,	0	1,	0	0,	0
$x_7 =$	0,	0,	0,	0,	1,	0	0,	0	0,	0
$x_8 =$	1,	0,	0,	0,	0,	0	0,	0	0,	0

$n = 10$

$x_1 =$	18,	5,	1,	0,	0	3, 8	2, 4	1, 2	3, 3	3, 0	0, 1
$x_2 =$	0,	0,	4,	2,	0	8, 0	3, 0	3, 1	3, 3	0, 6	1, 0
$x_3 =$	0,	5,	0,	2,	7	0, 0	4, 3	2, 3	0, 1	0, 0	5, 2
$x_4 =$	0,	0,	2,	3,	0	0, 1	0, 2	2, 1	3, 0	6, 0	0, 5
$x_5 =$	0,	0,	2,	1,	0	0, 3	0, 0	0, 2	0, 3	0, 3	2, 0
$x_6 =$	0,	0,	0,	0,	1	0, 0	0, 1	1, 0	1, 0	0, 0	0, 0
$x_7 =$	0,	1,	0,	0,	0	0, 0	1, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0
$x_8 =$	0,	0,	0,	0,	0	1, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0
$x_9 =$	1,	0,	0,	0,	0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0

Ecc. ecc.

19. Ben inteso, si sono tralasciati quei sistemi di valori delle $x_1, x_2, \ldots$ che, pur risolvendo aritmeticamente le equazioni (1), (2), non sodisfanno al problema geometrico: infatti questo esige che una curva d'ordine n possa avere x_2 punti doppi, x_3 punti tripli,... senza decomporsi in curve d'ordine minore. Per es., siccome una curva del quint'ordine non può avere due punti tripli, così per $n=5$ deve escludersi la soluzione

$$x_1=6\,, \quad x_2=0\,, \quad x_3=2\,, \quad x_4=0\,.$$

Una curva del settimo ordine non può avere cinque punti tripli, perchè la conica descritta per essi intersecherebbe quella curva in quindici punti, mentre due curve (effettive, non composte) non possono avere in comune un numero di punti maggiore del prodotto de' loro ordini; dunque, nel caso $n=7$, si deve escludere la soluzione

$$x_1=3\,, \quad x_2=0\,, \quad x_3=5\,, \quad x_4=0\,, \quad x_5=0\,, \quad x_6=0\,.$$

Per la stessa ragione, una curva del decimo ordine non può avere simultaneamente un punto quintuplo e quattro punti quadrupli, nè due punti quintupli, due punti quadrupli ed uno triplo; e nemmeno tre punti quintupli con due tripli. Perciò, nel caso di $n=10$, devono essere escluse le soluzioni [[75]]:

$$x_1=2\,, \quad x_2=2\,, \quad x_3=0\,, \quad x_4=4\,, \quad x_5=1\,, \quad x_6=0\,, \quad x_7=0\,, \quad x_8=0\,,$$
$$x_1=4\,, \quad x_2=1\,, \quad x_3=1\,, \quad x_4=2\,, \quad x_5=2\,, \quad x_6=0\,, \quad x_7=0\,, \quad x_8=0\,,$$
$$x_1=6\,, \quad x_2=0\,, \quad x_3=2\,, \quad x_4=0\,, \quad x_5=3\,, \quad x_6=0\,, \quad x_7=0\,, \quad x_8=0\,.$$

Ecc. ecc.

20. Passiamo ora a determinare alcune soluzioni delle equazioni (1), (2) per n qualunque. E avanti tutto, osserviamo che, siccome una retta non può incontrare una curva d'ordine n in più di n punti, così, supposto $2r>n$, il numero x_r non può avere che uno di questi due valori: lo *zero* o l'*unità*; e supposto $r+s>n$, se $x_r=1$, sarà $x_s=0$.

21. Per $n>2$, il massimo valore di x_{n-1} è adunque l'*unità*, e supposto $x_{n-1}=1$, tutte le altre x saranno eguali a *zero* ad eccezione di x_1. In questa ipotesi, una qualunque delle equazioni (1), (2) dà

$$x_1=2\,(n-1)\,.$$

Questo è anche il massimo valore che in qualunque caso possa avere x_1, come si fa manifesto dall'equazione

$$\Sigma r(n-r-1)\,(x_r+x_{n-r-1})=2\,(n-1)\,(n-2),$$

che si ottiene eliminando x_{n-1} dalle (1), (2).

La rete (nel piano P) è adunque composta di curve d'ordine n aventi in comune un punto $(n-1)^{plo}\, p$ e $2(n-1)$ punti semplici $o_1 o_2 \dots o_{2(n-1)}$ *). La Jacobiana è costituita dalle $2(n-1)$ rette $p(o_1, o_2, \dots o_{2(n-1)})$ e dalla curva d'ordine $n-1$ che ha in p un punto $(n-2)^{plo}$ e passa per tutti gli altri punti dati. Infatti, se m è un punto della retta po_1 e si combina questa colla curva $p^{n-2} m o_2 o_3 \dots o_{2(n-1)}$ d'ordine $n-1$; ovvero se m è un punto della curva $p^{n-2} o_1 o_2 o_3 \dots o_{2(n-1)}$ d'ordine $n-1$ e si combina questa colla retta pm; in entrambi questi casi si ottiene una curva (composta) della rete.

Abbiamo dunque

$$y_1 = 2(n-1)\,, \quad y_2 = 0\,, \quad y_3 = 0\,, \dots y_{n-2} = 0\,, \quad y_{n-1} = 1\,;$$

ossia, la soluzione di cui ora si tratta è coniugata a sè stessa **).

n qualunque
—
$x_1 = 2(n-1)$
$x_{n-1} = 1$

22. Suppongasi ora $x_{n-1} = 0$; e ritenuto $n > 4$, diasi ad x_{n-2} il massimo valore

$$x_{n-2} = 1\,.$$

Le altre x saranno nulle, ad eccezione di x_1, x_2, per le quali le (1), (2) danno

$$x_1 = 3\,, \qquad x_2 = n-2\,.$$

Le curve della rete hanno in comune tre punti [semplici] $o_1 o_2 o_3$, $n-2$ punti doppi $d_1 d_2 \dots d^{n-2}$ ed un punto $(n-2)^{plo}\, p$. La Jacobiana avrà quindi tre punti doppi in $o_1 o_2 o_3$, $n-2$ punti quintupli in $d_1 d_2 \dots d_{n-2}$ ed un punto $(3n-7)^{plo}$ in p. Di essa fanno parte, per n pari, le linee seguenti:

1.° le $n-2$ rette $p(d_1, d_2, \dots d_{n-2})$; infatti un punto qualunque m della retta pd^1 è doppio per la curva della rete composta della retta medesima e della curva $p^{n-3} d_2^2 d_3^2 \dots d_{n-2}^2 d_1 m o_1 o_2 o_3$ d'ordine $n-1$;

2.° la curva $p^{\frac{n}{2}-2} d_1 d_2 \dots d_{n-2}$ d'ordine $\frac{n}{2}-1$; infatti un suo punto qualunque m è doppio per una curva della rete composta dell'anzidetta curva d'ordine $\frac{n}{2}-1$ e della curva $p^{\frac{n}{2}} d_1 d_2 \dots d_{n-2} o_1 o_2 o_3 m$ d'ordine $\frac{n}{2}+1$;

*) È questo il caso considerato dal sig. De Jonquières.

**) D'ora innanzi ci limiteremo a scrivere i valori di quelle x che non sono nulle.

3.° le tre curve $p^{\frac{n}{2}-1} d_1 d_2 \dots d_{n-2}(o_2 o_3, o_3 o_1, o_1 o_2)$ d'ordine $\frac{n}{2}$; infatti, se m è un punto qualunque della curva $p^{\frac{n}{2}-1} d_1 d_2 \dots d_{n-2} o_2 o_3$, questa insieme coll'altra $p^{\frac{n}{2}-1} d_1 d_2 \dots d_{n-2} m o_1$ dello stesso ordine $\frac{n}{2}$, forma una curva della rete avente un punto doppio in m.

Ad

$$x_1 = 3, \quad x_2 = n-2, \quad x_{n-2} = 1$$

corrisponde adunque, per n pari,

$$y_1 = n-2, \quad y_{\frac{n}{2}-1} = 1, \quad y_{\frac{n}{2}} = 3.$$

n pari

x_1	$= 3,$	$n-2$
x_2	$= n-2,$	0
$x_{\frac{n}{2}-1}$	$= 0,$	1
$x_{\frac{n}{2}}$	$= 0,$	3
x_{n-2}	$= 1,$	0

Invece, per n dispari, si dimostra analogamente che la Jacobiana della rete (in P) è composta

1.° delle $n-2$ rette $p(d_1, d_2, \dots d_{n-2})$;

2.° delle tre curve $p^{\frac{n-3}{2}} d_1 d_2 \dots d_{n-2}(o_1, o_2, o_3)$ d'ordine $\frac{n-1}{2}$; e

3.° della curva $p^{\frac{n-1}{2}} d_1 d_2 \dots d_{n-2} o_1 o_2 o_3$ d'ordine $\frac{n+1}{2}$; cioè ad

$$x_1 = 3, \quad x_2 = n-2, \quad x_{n-2} = 1$$

corrisponde, per n dispari,

$$y_1 = n-2, \quad y_{\frac{n-1}{2}} = 3, \quad y_{\frac{n+1}{2}} = 1.$$

n dispari

x_1	$= 3,$	$n-2$
x_2	$= n-2,$	0
$x_{\frac{n-1}{2}}$	$= 0,$	3
$x_{\frac{n+1}{2}}$	$= 0,$	1
x_{n-2}	$= 1,$	0

È facile persuadersi che nel caso di

$$x_1 = n-2, \quad x_{\frac{n}{2}-1} = 1, \quad x_{\frac{n}{2}} = 3,$$

cioè quando le curve della rete (d'ordine n pari) abbiano in comune $n-2$ punti semplici $o_1 o_2 \ldots o_{n-2}$, un punto $\left(\frac{n}{2}-1\right)^{plo}$ a e tre punti $\left(\frac{n}{2}\right)^{pli}$ $b_1 b_2 b_3$, la Jacobiana è composta

1.° delle tre rette $b_2 b_3$, $b_3 b_1$, $b_1 b_2$;

2.° delle $n-2$ coniche $b_1 b_2 b_3 a (o_1, o_2, \ldots o_{n-2})$; e

3.° della curva $b_1^{\frac{n}{2}-1} b_2^{\frac{n}{2}-1} b_3^{\frac{n}{2}-1} a^{\frac{n}{2}-2} o_1 o_2 \ldots o_{n-2}$ di ordine $n-2$.

E nel caso di

$$x_1 = n-2, \quad x_{\frac{n-1}{2}} = 3, \quad x_{\frac{n+1}{2}} = 1,$$

cioè quando la rete sia formata da curve (d'ordine n dispari) aventi in comune $n-2$ punti semplici $o_1 o_2 \ldots o_{n-2}$, tre punti $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{pli}$ $a_1 a_2 a_3$ ed un punto $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{plo}$ b, fanno parte della Jacobiana le linee seguenti:

1.° le tre rette $b(a_1, a_2, a_3)$;

2.° le $n-2$ coniche $b a_1 a_2 a_3 (o_1, o_2, \ldots o_{n-2})$;

3.° la curva $b^{\frac{n-1}{2}} a_1^{\frac{n-3}{2}} a_2^{\frac{n-3}{2}} a_3^{\frac{n-3}{2}} o_1 o_2 \ldots o_{n-2}$ d'ordine $n-2$.

23. Suppongasi ora $x_{n-1} = 0$, $x_{n-2} = 0$; se $n > 6$, il massimo valore di x_{n-3} è l'*unità*. Ritenuto $x_{n-3} = 1$, le altre x saranno nulle ad eccezione di x_1, x_2, x_3, per le quali le (1), (2) danno

$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 4n - 5,$$

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 6n - 10,$$

ossia

$$x_1 + x_2 = 5\,, \qquad x_2 + 3x_3 = 2n - 5\,;$$

onde si hanno i sei seguenti sistemi:

$$x_1 = 1\,, \quad x_2 = 4\,, \quad x_3 = \frac{2n-9}{3}\,, \quad x_{n-3} = 1\,,$$

$$x_1 = 4\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = \frac{2n-6}{3}\,, \quad x_{n-3} = 1\,;$$

$$x_1 = 2\,, \quad x_2 = 3\,, \quad x_3 = \frac{2n-8}{3}\,, \quad x_{n-3} = 1\,,$$

$$x_1 = 5\,, \quad x_2 = 0\,, \quad x_3 = \frac{2n-5}{3}\,, \quad x_{n-3} = 1\,;$$

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 = 5\,, \quad x_3 = \frac{2n-10}{3}\,, \quad x_{n-3} = 1\,,$$

$$x \ = 3\,, \quad x_2 = 2\,, \quad x_3 = \frac{2n-7}{3}\,, \quad x_{n-3} = 1\,;$$

de' quali i primi due risolvono le equazioni (1), (2) nel caso che n sia divisibile per 3; il terzo ed il quarto quando n sia della forma $3\mu + 1$, e gli ultimi due nel caso che n sia della forma $3\mu + 2$.

Nel primo sistema, le curve della rete hanno in comune un punto semplice o, quattro punti doppi $d_1 d_2 d_3 d_4$, $\frac{2n}{3} - 3$ punti tripli $t_1 t_2 \ldots t_{\frac{2n}{3}-3}$ ed un punto $(n-3)^{plo}$ a; e la Jacobiana è composta

1.° delle $\frac{2n}{3} - 3$ rette $a(t_1, \ldots t_{\frac{2n}{3}-3})$;

2.° delle quattro curve $a^{\frac{n}{3}-1} t_1 t_2 \ldots t_{\frac{2n}{3}-3} (d_2 d_3 d_4,\ d_1 d_3 d_4,\ d_1 d_2 d_4,\ d_1 d_2 d_3)$ d'ordine $\frac{n}{3}$;

3.° della curva $a^{\frac{n}{3}} t_1 t_2 \ldots t_{\frac{2n}{3}-3} d_1 d_2 d_3 d_4 o$ d'ordine $\frac{n}{3} + 1$; e

4.° della curva $a^{\frac{2n}{3}-3} t_1^2 t_2^2 \ldots t_{\frac{2n}{3}-3}^2 d_1 d_2 d_3 d_4 o$ d'ordine $\frac{2n}{3} - 1$.

Nel secondo sistema, le curve della rete hanno in comune quattro punti semplici $o_1 o_2 o_3 o_4$, un punto doppio d, $\frac{2n}{3} - 2$ punti tripli $t_1 t_2 \ldots t_{\frac{2n}{3}-2}$ ed un punto $(n-3)^{plo}$ a. Della Jacobiana fanno parte le linee seguenti:

1.° le $\frac{2n}{3} - 2$ rette $a\left(t_1, t_2, \ldots t_{\frac{2n}{3}-2}\right)$;

2.° la curva $a^{\frac{n}{3}-2} t_1 t_2 \ldots t_{\frac{2n}{3}-2}$ d'ordine $\frac{n}{3} - 1$;

3.° le quattro curve $a^{\frac{n}{3}-1} t_1 t_2 \ldots t_{\frac{2n}{3}-2} d(o_1, o_2, o_3, o_4)$ d'ordine $\frac{n}{3}$; e

4.° la curva $a^{\frac{2n}{3}-2} t_1^2 t_2^2 \ldots t^2_{\frac{2n}{3}-2} d o_1 o_2 o_3 o_4$ d'ordine $\frac{2n}{3}$.

Per tal modo, nel caso che n sia un multiplo di 3, otteniamo le due coppie seguenti di soluzioni coniugate delle equazioni (1), (2):

n multiplo di 3

$x_1 = 1$,	$\frac{2n}{3} - 3$	$x_1 = 4$,	$\frac{2n}{3} - 2$
$x_2 = 4$,	0	$x_2 = 1$,	0
$x_3 = \frac{2n}{3} - 3$,	0	$x_3 = \frac{2n}{3} - 2$,	0
$x_{\frac{n}{3}} = 0$,	4	$x_{\frac{n}{3}-1} = 0$,	1
$x_{\frac{n}{3}+1} = 0$,	1	$x_{\frac{n}{3}} = 0$,	4
$x_{\frac{2n}{3}-1} = 0$,	1	$x_{\frac{2n}{3}} = 0$,	1
$x_{n-3} = 1$,	0	$x_{n-3} = 1$,	0

Analogamente, considerando i casi che il numero n sia della forma $3\mu + 1$ o della forma $3\mu + 2$, si hanno le coppie di soluzioni coniugate che seguono:

$n \equiv 1$ (mod. 3)

$x_1 = 2$,	$\frac{2n-8}{3}$	$x_1 = 5$,	$\frac{2n-5}{3}$
$x_2 = 3$,	0		
$x_3 = \frac{2n-8}{3}$,	0	$x_3 = \frac{2n-5}{3}$,	0
$x_{\frac{n-1}{3}} = 0$,	3	$x_{\frac{n-1}{3}} = 0$,	5
$x_{\frac{n+2}{3}} = 0$,	2		
$x_{\frac{2(n-1)}{3}} = 0$,	1	$x_{\frac{2n+1}{3}} = 0$,	1
$x_{n-3} = 1$,	0	$x_{n-3} = 1$,	0

$n \equiv 2 \pmod{3}$

$x_1 = 3$,	$\frac{2n-7}{3}$	$x_1 = 0$,	$\frac{2n-10}{3}$
$x_2 = 2$,	0	$x_2 = 5$,	0
$x_3 = \frac{2n-7}{3}$,	0	$x_3 = \frac{2n-10}{3}$,	0
$x_{\frac{n-2}{3}} = 0$,	2	$x_{\frac{n+1}{3}} = 0$,	5
$x_{\frac{n+1}{3}} = 0$,	3	$x_{\frac{2(n-2)}{3}} = 0$,	1
$x_{\frac{2n-1}{3}} = 0$,	1		
$x_{n-3} = 1$,	0	$x_{n-3} = 1$,	0

24. Facciasi $x_{n-1} = 0$, $x_{n-2} = 0$, $x_{n-3} = 0$; ed inoltre $x_{n-4} = 1$, che è il massimo valore di x_{n-4} per $n > 8$. Le altre x saranno nulle ad eccezione di x_1, x_2, x_3, x_4; ond'è che dalle (1), (2) si ricava

$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 5n - 8 ,$$

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 8n - 17 ,$$

ossia

$$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 21 ,$$

$$2x_4 = x_1 + x_2 + n - 10 .$$

Cercando di sodisfare a queste equazioni in tutt'i modi possibili, e quindi determinando per ciascun caso la Jacobiana della rete, si ottengono le seguenti coppie di soluzioni coniugate delle (1), (2) le quali differiscono secondo i casi offerti dal numero n rispetto alla divisibilità per 4.

$n \equiv 0 \pmod{4}$

$x_1 = 1$,	$\frac{n}{2} - 3$	$x_1 = 2$,	$\frac{n}{2} - 4$	$x_1 = 3$,	$\frac{n}{2} - 2$	$x_1 = 6$,	$\frac{n}{2} - 2$
$x_2 = 3$,	0			$x_2 = 3$,	0		
$x_3 = 2$,	0	$x_3 = 5$,	0			$x_3 = 1$,	0
$x_4 = \frac{n}{2} - 3$,	0	$x_4 = \frac{n}{2} - 4$,	0	$x_4 = \frac{n}{2} - 2$,	0	$x_4 = \frac{n}{2} - 2$,	0
$x_{\frac{n}{4}} = 0$,	3	$x_{\frac{n}{4}} = 0$,	5	$x_{\frac{n}{4}-1} = 0$,	1	$x_{\frac{n}{4}-1} = 0$,	1
$x_{\frac{n}{4}+1} = 0$,	1	$x_{\frac{n}{4}+1} = 0$,	2	$x_{\frac{n}{4}} = 0$,	3	$x_{\frac{n}{4}} = 0$,	6
$x_{\frac{n}{2}-1} = 0$,	1	$x_{\frac{3n}{4}-1} = 0$,	1	$x_{\frac{n}{2}} = 0$,	3	$x_{\frac{3n}{4}} = 0$,	1
$x_{\frac{n}{2}} = 0$,	2	$x_{n-4} = 1$,	0	$x_{n-4} = 1$,	0	$x_{n-4} = 1$,	0
$x_{n-4} = 1$,	0						

$n \equiv 1 \pmod{4}$

$x_1 = 0$,	$\frac{n-7}{2}$	$x_1 = 2$,	$\frac{n-5}{2}$	$x_1 = 3$,	$\frac{n-7}{2}$	$x_1 = 7$,	$\frac{n-3}{2}$
$x_2 = 3$,	0	$x_2 = 3$,	0				
$x_3 = 3$,	0	$x_3 = 1$,	0	$x_3 = 4$,	0		
$x_4 = \frac{n-7}{2}$,	0	$x_4 = \frac{n-5}{2}$,	0	$x_4 = \frac{n-7}{2}$,	0	$x_4 = \frac{n-3}{2}$,	0
$x_{\frac{n-1}{4}} = 0$,	1	$x_{\frac{n-1}{4}} = 0$,	3	$x_{\frac{n-1}{4}} = 0$,	4	$x_{\frac{n-1}{4}} = 0$,	7
$x_{\frac{n+3}{4}} = 0$,	3	$x_{\frac{n+3}{4}} = 0$,	1	$x_{\frac{n+3}{4}} = 0$,	3	$x_{\frac{3n+1}{4}} = 0$,	1
$x_{\frac{n-1}{2}} = 0$,	3	$x_{\frac{n-1}{2}} = 0$,	2	$x_{\frac{3(n-1)}{4}} = 0$,	1	$x_{n-4} = 1$,	0
$x_{n-4} = 1$,	0	$x_{\frac{n+1}{2}} = 0$,	1	$x_{n-4} = 1$,	0		
		$x_{n-4} = 1$,	0				

$n \equiv 2 \pmod{4}$

$x_1 = 0,\quad \frac{n}{2} - 5$	$x_1 = 1,\quad \frac{n}{2} - 3$	$x_1 = 3,\quad \frac{n}{2} - 2$	$x_1 = 4,\quad \frac{n}{2} - 3$
	$x_2 = 3,\quad 0$	$x_2 = 3,\quad 0$	
$x_3 = 7,\quad 0$	$x_3 = 2,\quad 0$		$x_3 = 3,\quad 0$
$x_4 = \frac{n}{2} - 5,\quad 0$	$x_4 = \frac{n}{2} - 3,\quad 0$	$x_4 = \frac{n}{2} - 2,\quad 0$	$x_4 = \frac{n}{2} - 3,\quad 0$
$x_{\frac{n+2}{4}} = 0,\quad 7$	$x_{\frac{n-2}{4}} = 0,\quad 1$	$x_{\frac{n-2}{4}} = 0,\quad 3$	$x_{\frac{n-2}{4}} = 0,\quad 3$
$x_{\frac{3(n-2)}{4}} = 0,\quad 1$	$x_{\frac{n+2}{4}} = 0,\quad 3$	$x_{\frac{n+2}{4}} = 0,\quad 1$	$x_{\frac{n+2}{4}} = 0,\quad 4$
$x_{n-4} = 1,\quad 0$	$x_{\frac{n-2}{2}} = 0,\quad 1$	$x_{\frac{n}{2}} = 0,\quad 3$	$x_{\frac{3n-2}{4}} = 0,\quad 1$
	$x_{\frac{n}{2}} = 0,\quad 2$	$x_{n-4} = 1,\quad 0$	$x_{n-4} = 1,\quad 0$
	$x_{n-4} = 1,\quad 0$		

$n \equiv 3 \pmod{4}$

$x_1 = 0,\quad \frac{n-7}{2}$	$x_1 = 1,\quad \frac{n-9}{2}$	$x_1 = 2,\quad \frac{n-5}{2}$	$x_1 = 5,\quad \frac{n-5}{2}$
$x_2 = 3,\quad 0$		$x_2 = 3,\quad 0$	
$x_3 = 3,\quad 0$	$x_3 = 6,\quad 0$	$x_3 = 1,\quad 0$	$x_3 = 2,\quad 0$
$x_4 = \frac{n-7}{2},\quad 0$	$x_4 = \frac{n-9}{2},\quad 0$	$x_4 = \frac{n-5}{2},\quad 0$	$x_4 = \frac{n-5}{2},\quad 0$
$x_{\frac{n+1}{4}} = 0,\quad 3$	$x_{\frac{n+1}{4}} = 0,\quad 6$	$x_{\frac{n-3}{4}} = 0,\quad 1$	$x_{\frac{n-3}{4}} = 0,\quad 2$
$x_{\frac{n+5}{4}} = 0,\quad 1$	$x_{\frac{n+5}{4}} = 0,\quad 1$	$x_{\frac{n+1}{4}} = 0,\quad 3$	$x_{\frac{n+1}{4}} = 0,\quad 5$
$x_{\frac{n-1}{2}} = 0,\quad 3$	$x_{\frac{3n-5}{4}} = 0,\quad 1$	$x_{\frac{n-1}{2}} = 0,\quad 2$	$x_{\frac{3n-1}{4}} = 0,\quad 1$
$x_{n-4} = 1,\quad 0$	$x_{n-4} = 1,\quad 0$	$x_{\frac{n+1}{2}} = 0,\quad 1$	$x_{n-4} = 1,\quad 0$
		$x_{n-4} = 1,\quad 0$	

Noi non protrarremo più oltre, per ora, la ricerca delle soluzioni delle equazioni (1), (2), e passeremo invece alla dimostrazione di altre proprietà generali delle reti che sodisfanno a quelle equazioni medesime.

25. Se si getta uno sguardo sulle coppie di soluzioni coniugate ottenute sin qui, si scorgerà che le x di una soluzione qualunque sono eguali alle x della soluzione coniugata, prese in ordine differente. Vediamo se questa proprietà debba verificarsi necessariamente in ogni caso.

Consideriamo la rete nel piano P e le y_1 rette che fanno parte della Jacobiana. Siccome queste rette si segano fra loro esclusivamente ne' punti principali (11), i quali a due a due devono appartenere alle rette medesime, così non può aver luogo che uno de' seguenti due casi:

1.° $y_1 = 3$; le tre rette principali sono i lati di un triangolo i cui vertici sono punti principali, d'egual grado di moltiplicità e soli in quel grado (per legge di simmetria). Dunque uno de' numeri x sarà $= 3$, cioè $= y_1$.

2.° y_1 qualunque > 1, compreso 3. Le y_1 rette passano tutte per uno stesso punto principale a (unico nel suo grado di moltiplicità) ed inoltre rispettivamente per altri punti principali $b_1, b_2, \ldots$, egualmente multipli e soli nel loro grado. Il numero x di questi punti $b_1, b_2, \ldots$ sarà dunque $= y_1$ *).

Le y_2 coniche che fanno parte della Jacobiana possono dar luogo ai casi seguenti:

1.° y_2 qualunque > 1; le y_2 coniche hanno quattro punti comuni ed inoltre passano rispettivamente per uno de' punti principali $b_1, b_2, \ldots$, egualmente molteplici, il numero x de' quali sarà $= y_2$.

2.° $y_2 = \nu + 1$ ove ν ha uno de' valori seguenti: 2, 3, 4, 5. Le $\nu + 1$ coniche hanno $5 - \nu$ punti comuni e passano inoltre rispettivamente per ν de' $\nu + 1$ punti principali $b_1, b_2, \ldots b_{\nu+1}$ egualmente molteplici e soli nel loro grado: onde il numero x de' medesimi è eguale ad y_2.

Le y_3 curve principali del terz'ordine offrono i seguenti casi possibili:

1.° y_3 qualunque > 1; le y_3 cubiche hanno in comune il punto doppio e cinque altri punti, e passano poi rispettivamente per uno de' punti principali $b_1, b_2, \ldots$ egualmente molteplici, il numero x de' quali sarà eguale ad y_3.

2.° y_3 qualunque > 1; le cubiche hanno sei punti comuni, ed il punto doppio in uno de' punti principali $b_1, b_2, \ldots$ egualmente molteplici, il numero x de' quali sarà eguale ad y_3.

---

*) Pei due punti principali situati in una retta principale devono evidentemente passare tutte le curve principali. Dunque, se $y_1 > 2r$, non vi può essere una curva principale d'ordine r, cioè $y_r = 0$.

3.° $y_3 = \nu + 1$, ove ν è uno de' numeri 2, 3, 4, 5, 6. Le $\nu + 1$ cubiche hanno in comune il punto doppio e $6 - \nu$ punti ordinari, e passano rispettivamente per ν de' $\nu + 1$ punti principali $b_1, b_2, \ldots b_{\nu+1}$ egualmente molteplici e soli nel loro grado.

4.° $y_3 = \nu$, ove ν è uno de' numeri 2, 3, 4, 5, 6, 7. Le ν cubiche hanno in comune $7 - \nu$ punti, e fra ν punti principali egualmente molteplici e soli nel loro grado hanno il punto doppio nell'uno di essi e passano pei rimanenti.

È evidente che analoghe considerazioni si possono istituire per le curve principali d'ordine superiore, onde si concluderà che se la Jacobiana contiene $y_r (y_r > 1)$ curve d'ordine r, uno de' numeri x sarà eguale ad y_r.

Rimarrebbe a considerare il caso di $y_r = 1$, e quello di $y_r = 0$. Se non che, essendo la somma di tutte le x eguale alla somma di tutte le y; ed anche la somma di tutte le x maggiori dell'unità eguale alla somma di tutte le y maggiori dell'unità, è evidente che il numero delle x eguali a zero o all'unità sarà eguale al numero delle y eguali del pari a zero od all'unità.

Concludiamo adunque che le *y sono eguali alle x prese generalmente in ordine diverso.* [76]

26. Supponiamo ora che i due piani P, P' coincidano, ossia consideriamo due figure in uno stesso piano, le quali si corrispondano punto per punto, in modo che alle rette di una figura corrispondano nell'altra curve d'ordine n di una rete (soggetta alle condizioni (1), (2)).

Le rette di un fascio in una figura e le corrispondenti curve nella seconda figura costituiscono due fasci projettivi, epperò il luogo delle intersezioni delle linee corrispondenti sarà una curva d'ordine $n+1$ passante r volte per ogni punto principale di grado r della seconda figura.

27. Quale è l'inviluppo delle rette che uniscono i punti di una retta R nella prima figura ai punti omologhi nella seconda? La retta R è una tangente $(n)^{pla}$ per l'inviluppo di cui si tratta, a cagione degli n punti di R omologhi di quelli ove R sega la sua corrispondente curva d'ordine n. Ogni altro punto di R unito al suo omologo dà una tangente dell'inviluppo; dunque la classe di questo è $n+1$.

28. Quale è il luogo dei punti nella prima figura che uniti ai loro corrispondenti nella seconda danno rette passanti per un punto fisso p? Il luogo passa per p, perchè la retta che unisce p al punto corrispondente p' passa per p. Se poi si tira per p una retta arbitraria, questa sega la curva che le corrisponde (nella seconda figura) in n punti, risguardati i quali come appartenenti alla seconda figura, i punti omologhi della prima appartengono al luogo: e questo è per conseguenza una curva **P** dell'ordine $n+1$.

Se o_r è un punto principale di grado r della prima figura, la retta po_r contiene r punti della seconda figura corrispondenti ad o_r: onde il luogo **P** passerà r volte per o_r.

Se o'_r è un punto principale della seconda figura, la retta po'_r contiene r punti della prima corrispondenti ad o'_r; la curva **P** passerà per questi r punti, cioè per le intersezioni di po'_r colla curva principale che corrisponde ad o'_r.

I punti ove una retta R, considerata nella prima figura, taglia la corrispondente curva d'ordine n sono nella seconda figura gli omologhi di quelli (della prima) ove R, considerata nella seconda, incontra la curva che le corrisponde nella prima. Dunque la curva **P** anzidetta è anche il luogo delle intersezioni delle rette passanti per p, considerate nella seconda figura, colle corrispondenti curve della prima figura (26).

I punti omologhi a quelli della curva **P**, considerata nella prima figura, sono in un'altra curva **P'**, luogo dei punti della seconda figura che uniti ai corrispondenti della prima danno delle rette passanti per p, ossia luogo delle intersezioni delle rette passanti per p, considerate nella prima figura, colle corrispondenti curve della seconda.

Ogni retta passante per p taglia le due curve **P**, **P'** in due sistemi di n punti corrispondenti.

29. Sia q un altro punto qualunque del piano, e **Q** la curva che dipende da q come **P** da p. Gli n punti ove la retta pq, considerata nella seconda figura, incontra la corrispondente curva della prima appartengono evidentemente ad entrambe le curve **P**, **Q**, come anche alle curve analoghe relative agli altri punti della retta pq. Le due curve **P**, **Q** si segano inoltre nei punti principali della prima figura, ciò che costituisce $\Sigma r^2 x_r = n^2 - 1$ intersezioni; esse avranno dunque altri $(n+1)^2 - n - (n^2 - 1) = n+2$ punti comuni, ciascun de' quali unito al punto omologo della seconda figura dovrebbe dare una retta passante sì per p che per q. Questi $n+2$ punti coincidono necessariamente coi propri corrispondenti, cioè *il sistema delle due figure ammette* $n+2$ *punti doppi.*

Tutte le curve analoghe a **P**, **Q** e relative ai punti del piano formano una rete, *)

*) { Il dott. GUCCIA mi fa giustamente osservare che questa dimostrazione non è rigorosa perchè gli $n+2$ punti uniti delle due figure non sono indipendenti dai punti principali. Per dimostrare che quelle curve formano una rete basta osservare che per due punti a, b passa una sola curva: infatti se a', b' sono i punti della 2.ª figura corrispondenti ad a, b, la curva che deve passare per a, b, deve corrispondere ad un punto allineato con aa' e con bb' ossia all'(unico) punto d'intersezione di aa' con bb'. Soltanto se aa', bb' coincidono in una sola retta, si hanno infinite curve corrispondenti ai punti di questa retta, le quali formano un fascio, avendo in comune n punti di questa retta.

La rete non è omaloide; infatti le curve non sono razionali il loro genere essendo

$$\frac{1}{2}\left((n+1)^2 - 3(n+1) + 2\right) - \sum \frac{1}{2} i(i-1)\,\alpha_i = \frac{1}{2} n\,(n-1) - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = n-1.$$

Si ha così un'involuzione di grado n, ogni gruppo della quale è formato da n punti in linea perchè hanno in comune i punti principali della prima figura ed i punti doppi del sistema, ciò che equivale a

$$\sum \frac{r(r+1)}{2} x_r + n + 2 = \frac{(n+1)(n+4)}{2} - 2$$

condizioni comuni.

30. I due piani P, P′ ora non coincidano; e fissati nello spazio due punti π, π', si unisca π ad un punto qualunque a del piano P, e π' al corrispondente punto a' del piano P′. Se il punto a varia in tutt'i modi possibili nel piano P, le rette $\pi a, \pi' a$ generano due fasci conici *) aventi tra loro questa relazione che ad una retta qualunque nell'uno corrisponde una retta determinata (in generale unica) nell'altro e ad un piano nell'un fascio corrisponde nell'altro un cono d'ordine n: e tutt'i coni analoghi di un fascio che corrispondono ai piani dell'altro hanno in comune un certo numero $x_r (r=1, 2, \ldots n-1)$ di generatrici $(r)^{plo}$, ove i numeri x_r sodisfanno alle equazioni (1), (2).

Se i due fasci conici $(\pi), (\pi')$ si segano con un piano trasversale qualunque, otterremo in questo due figure che si corrisponderanno punto per punto, in modo che alle rette dell'una corrisponderanno nell'altra curve d'ordine n; e siccome il sistema di queste due figure ammette $n+2$ punti doppi, così ne segue che il luogo dei punti ove si segano raggi omologhi de' due fasci conici $(\pi), (\pi')$ è una curva gobba d'ordine $n+2$. È evidente poi che questa curva passa pei punti π, π' ed è ivi toccata dalle rette che corrispondono alla $\pi\pi'$, considerata come appartenente, prima al fascio (π'), indi al fascio (π).

Se o_r è un punto principale di grado r della prima figura (in P), al raggio πo_r corrisponderà il cono avente il vertice in π' e per base la curva principale d'ordine r che (in P′) corrisponde ad o_r; le r intersezioni di questo cono colla retta πo_r saranno punti della curva gobba. Ond'è che questa ha $r+1$ punti sul raggio πo_r; ed altrettanti sul raggio $\pi' o'_r$, se o'_r è un punto principale di grado r della seconda figura.

31. Arriviamo ai medesimi risultati se poniamo la quistione in questi altri termini: quale è il luogo di un punto a nel piano P, se il raggio πa incontra il raggio omologo $\pi' a'$? Se a'' è l'intersezione del piano P colla retta $\pi' a'$, i punti a'' costituiranno una terza figura avente colla prima (costituita dai punti a) la stessa corrispondenza che

---

retta. Assunto un punto a, e riguardato come appartenente alla 1.ª figura, sia a' il corrispondente nella 2.ª; allora le intersezioni di aa', riguardata come retta della 2.ª figura, colla curva corrispondente d'ordine n nella 1.ª figura, tra le quali intersezioni è a, sono gli n punti di un gruppo dell'involuzione. (Novembre 1884) }

*) *Strahlenbündel* dei tedeschi (STAUDT, *Geometrie der Lage,* p. 4, Nürnberg 1847).

intercede fra la prima e la seconda (costituita dai punti a'). D'altronde, se i raggi πa, $\pi' a'$ s'incontrano, i punti a, a' dovranno essere in linea retta col punto p ove la retta $\pi\pi'$ incontra il piano P; dunque il luogo del punto a, ossia la prospettiva della curva gobba sul piano P, l'occhio essendo in π, è la curva **P** relativa al punto p (28), luogo delle intersezioni delle rette passanti per p, considerate come appartenenti alla terza figura, colle corrispondenti curve d'ordine n della prima.

Da ultimo, se si applicano alla curva gobba le note formole di CAYLEY *), si trova:

1.° che essa ha 16 $(n-1)$ punti di flesso (punti ove il piano osculatore è stazionario);

2.° che le sue tangenti formano una sviluppabile dell'ordine $4n$, della classe $3(3n-2)$, dotata di una curva nodale dell'ordine $8n(n-1)$;

3.° che i suoi piani bitangenti inviluppano una sviluppabile della classe $8(n-1)^2$;

4.° che per un punto arbitrario dello spazio passano $\frac{1}{2}(n^2-n+2)$ corde della curva;

5.° che un piano qualunque contiene $\frac{1}{2}(81n^2-169n+90)$ tangenti doppie della sviluppabile osculatrice; ecc.

E se si adotta la divisione delle curve geometriche, piane o gobbe, in *generi*, proposta recentissimamente dal sig. CLEBSCH **), in relazione alla classe delle funzioni abeliane da cui le curve stesse dipendono, si trova ***) che la nostra curva gobba è del genere $n-1$.

*) Giornale di LIOUVILLE, t. X, p. 245 (Paris 1845).

**) Giornale di CRELLE-BORCHARDT, t. 64, p. 43 (Berlin 1864).

***) Ibid. p. 99.