40.

SULLE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE DELLE FIGURE PIANE. [12]

NOTA I.

Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie II, tomo II (1863), pp. 621-630.
Giornale di Matematiche, volume I (1863), pp. 305-311.

I signori MAGNUS e SCHIAPARELLI, l'uno nel tomo 8.° del giornale di CRELLE, l'altro in un recentissimo volume delle Memorie dell'Accademia scientifica di Torino, cercarono le formole analitiche per la trasformazione geometrica di una figura piana in un'altra pur piana, sotto la condizione che ad un punto qualunque dell'una corrisponda un sol punto nell'altra, e reciprocamente a ciascun punto di questa un punto unico di quella *(trasformazione di primo ordine)*. E dall'analisi de' citati autori sembrerebbe doversi concludere che, nella più generale ipotesi, alle rette di una figura corrispondono nell'altra coniche circoscritte ad un triangolo fisso (reale o no); ossia che la più generale trasformazione di primo ordine sia quella che lo SCHIAPARELLI appella *trasformazione conica.*

Ma egli è evidente che applicando ad una data figura più trasformazioni coniche successive, dalla composizione di queste nascerà una trasformazione che sarà ancora di primo ordine, benchè in essa alle rette della figura data corrisponderebbero nella trasformata, non già coniche, ma curve d'ordine più elevato.

In questo breve scritto mi propongo di mostrare direttamente la possibilità di trasformazioni geometriche di figure piane, nelle quali le rette abbiano per corrispondenti delle curve di un dato ordine qualsivoglia. Stabilisco dapprima due equazioni che devono aver luogo fra i numeri de' punti semplici e multipli comuni a tutte le curve che corrispondono a rette. Poi dimostro come, per mezzo di raggi appoggiati a due linee direttrici, si possano projettare i punti di un piano sopra un secondo piano, e così trasformare una figura data in quello, in un'altra figura situata in questo.

Sulle trasformazioni delle figure piane.

Considero due figure situate l'una in un piano P, l'altra in un piano P', e suppongo che la seconda sia stata dedotta dalla prima per mezzo di una qualunque legge di trasformazione: in modo però che *a ciascun punto della prima figura corrisponda un solo punto nella seconda, e reciprocamente ad ogni punto di questa un solo punto in quella.*

Le trasformazioni geometriche soggette alla condizione or ora enunciata sono le sole ch'io miri ad esaminare in questo scritto: e si chiameranno *trasformazioni di primo ordine* *), per distinguerle dalle altre determinate da condizioni diverse.

Supposto che la trasformazione per la quale le figure proposte sono dedotte l'una dall'altra sia, tra quelle di primo ordine, la più generale possibile, domando: quali linee di una figura corrispondono alle rette dell'altra?

Sia n l'ordine della linea che nel piano P' (o P) corrisponde ad una *qualsivoglia* retta del piano P (o P'). Siccome una retta del piano P è determinata da due punti a, b, così i due punti corrispondenti a', b' del piano P' basteranno a individuare la linea che corrisponde a quella retta. Dunque le linee di una figura corrispondenti alle rette dell'altra formano un tal sistema che per due punti dati ad arbitrio passa una sola di esse; cioè quelle linee formano una rete geometrica dell'ordine n **).

Una linea dell'ordine n è determinata da $\frac{n(n+3)}{2}$ condizioni; dunque le linee di una figura corrispondenti alle rette dell'altra sono soggette ad

$$\frac{n(n+3)}{2}-2=\frac{(n-1)(n+4)}{2}$$

condizioni comuni.

Due rette di una figura hanno un solo punto comune a, da esse determinato. Il punto a', corrispondente di a, apparterrà alle due linee di ordine n che a quelle due rette corrispondono. E siccome queste due linee devono individuare il punto a', così le loro rimanenti n^2-1 intersezioni dovranno essere comuni a tutte le linee della rete geometrica suaccennata.

Sia x_r il numero de' punti $(r)^{pli}$ (multipli secondo r) comuni a queste linee; siccome un punto $(r)^{plo}$ comune a due linee equivale ad r^2 intersezioni delle medesime,

*) SCHIAPARELLI. *Sulla trasformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla trasformazione iperbolica* (Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino, serie 2ª, tom. XXI, Torino 1862).

**) Vedi la mia *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane,* p. 71 [Queste Opere, t. 1°, p. 396].

così avremo evidentemente:

(1) $$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + \ldots + (n-1)^2 x_{n-1} = n^2 - 1.$$

Gli $x_1 + x_2 + x_3 \ldots + x_{n-1}$ punti comuni alle linee della rete costituiscono le $\frac{(n-1)(n+4)}{2}$ condizioni che la determinano. Se una linea deve passare r volte per un punto dato, ciò equivale ad $\frac{r(r+1)}{2}$ condizioni; dunque: *)

(2) $$x_1 + 3x_2 + 6x_3 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2} x_{n-1} = \frac{(n-1)(n+4)}{2}.$$

Le equazioni (1) e (2) sono evidentemente le sole condizioni alle quali debbano sodisfare i numeri interi e positivi $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}$ **).

Esempi. Per $n=2$, le equazioni (1) e (2) si riducono all'unica:

$$x_1 = 3,$$

cioè alle rette di una figura corrisponderanno nell'altra curve di second'ordine circoscritte ad un triangolo costante.

---

*) { Scrivendo che le curve d'ordine n, corrispondenti a rette, devono essere di genere zero, si ottiene un'equazione la quale coincide con quella che si avrebbe sottraendo la (2) dalla (1). Con ciò vien rimosso il dubbio se fra le condizioni determinanti la rete possano entrare altri elementi, oltre ai punti fissi comuni, nel qual caso la (2) avrebbe dovuto esser surrogata da una disuguaglianza. }

**) Non si ottengono nuove equazioni, quando si prendano a considerare le curve che nel piano P' corrispondono a linee di un dato ordine μ nel piano P.

Infatti egli è evidente che ad una linea d'ordine μ situata nel piano P corrisponderà nell'altro piano una curva dell'ordine μn passante μr volte per ciascuno degli x_r punti multipli comuni alle curve corrispondenti alle rette del piano P. Quindi per le intersezioni comuni a tutte le curve d'ordine μn, corrispondenti alle linee d'ordine μ nel piano P, avremo l'equazione:

$$\mu^2 x_1 + (2\mu)^2 x_2 + (3\mu)^2 x_3 + \ldots + \Big((n-1)\mu\Big)^2 x_{n-1} = \mu^2 n^2 - \mu^2,$$

la quale non è altro che la (1) multiplicata per μ^2.

Siccome poi gli $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}$ punti multipli comuni costituiscono le condizioni a cui sodisfanno in comune le dette curve d'ordine μn, e siccome il numero di queste condizioni comuni deve essere eguale al numero delle condizioni che determinano una curva dell'ordine μn, diminuito del numero delle condizioni che determinano la corrispondente curva d'ordine μ, così avremo:

$$\frac{\mu(\mu+1)}{2} x_1 + \frac{2\mu(2\mu+1)}{2} x_2 + \ldots + \frac{\mu(n-1)(\mu n - \mu + 1)}{2} x_{n-1} = \frac{\mu n(\mu n + 3) - \mu(\mu+3)}{2},$$

equazione che si può anche ottenere sommando la (1) moltiplicata per $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ colla (2) moltiplicata per μ.

È questa la così detta *trasformazione conica* considerata da STEINER *), da MAGNUS **) e da SCHIAPARELLI ***).

Per $n=3$, si ha dalle (1), (2):

$$x_1=4\,,\qquad x_2=1\,,$$

cioè alle rette di una figura corrisponderanno nell'altra curve di terz'ordine aventi tutte un punto doppio e quattro punti semplici comuni.

Per $n=4$, le (1), (2) divengono:

$$x_1+4x_2+9x_3=15\,,$$
$$x_1+3x_2+6x_3=12\,,$$

le quali ammettono le due soluzioni:

1.ª $\qquad x_1=3\,,\qquad x_2=3\,,\qquad x_3=0\,,$

2.ª $\qquad x_1=6\,,\qquad x_2=0\,,\qquad x_3=1\,.$

E così di seguito.

Eliminando x_1 dalle equazioni (1) e (2) si ottiene quest'altra:

$$x_2+3x_3+\ldots+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\,x_{n-1}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}\,, \tag{3}$$

dalla quale si scorge che x_{n-1} non può avere che uno di questi due valori:

$$x_{n-1}=1\,,\qquad x_{n-1}=0\,,$$

e che nel caso di $x_{n-1}=1$, si ha necessariamente:

$$x_2=0\,,\ x_3=0\,,\ldots\, x_{n-2}=0\,,$$

e in virtù della (1):

$$x_1=2\,(n-1)\,.$$

Io mi propongo di provare che la trasformazione corrispondente a questi valori di $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ è, per un dato valore qualsivoglia di n, geometricamente possibile.

Supposte situate le due figure in due piani distinti P, P', affinchè a ciascun punto del primo piano corrisponda un unico punto del secondo, e reciprocamente a ciascun punto di questo corrisponda un sol punto di quello, imagino due linee direttrici tali che per un punto arbitrario dello spazio possa condursi una sola retta ad incontrarle

*) *Systematische Entwickelung u. s. w.,* Berlin 1832, p. 251.

**) Giornale di CRELLE, t. 8, p. 51.

***) *Loco citato.*

entrambe; e considero come *corrispondenti* i punti ne' quali questa retta incontra i piani P e P'.

Siano p, q gli ordini delle due linee direttrici, ed r il numero dei punti ad esse comuni. Assunto un punto arbitrario o dello spazio come vertice di due coni, le direttrici dei quali siano le due linee anzidette, gli ordini di questi coni saranno p, q, epperò avranno pq generatrici comuni. Del numero di queste sono le rette che uniscono o cogli r punti comuni alle due linee direttrici; e le rimanenti $pq-r$ generatrici comuni ai due coni saranno per conseguenza le rette che da o si possono condurre ad incontrare sì l'una che l'altra linea direttrice. Ma le rette dotate di tale proprietà voglionsi ridotte ad una sola; dunque dev'essere:

$$pq-r=1\,. \tag{4}$$

D'altronde, ad una retta qualunque R situata in uno de' piani P, P', dee corrispondere nell'altro una curva d'ordine n; cioè una retta mobile che incontri costantemente la retta R e le due direttrici d'ordine p, q, deve generare una superficie gobba d'ordine n. Si cerchi adunque l'ordine della superficie generata da una retta che si muova appoggiandosi sopra tre direttrici date, la prima delle quali sia una retta R, e le altre due, d'ordine p, q, abbiano r punti comuni.

Il numero delle rette che incontrano tre rette date ed una linea d'ordine p è $2p$: tanti essendo i punti comuni alla linea d'ordine p ed all'iperboloide che ha per direttrici le tre rette date. Ciò torna a dire che $2p$ è l'ordine di una superficie gobba le direttrici della quale siano due rette ed una linea d'ordine p. Questa superficie è incontrata dalla linea d'ordine q in $2pq-r$ punti non situati sulla linea d'ordine p.

Dunque l'ordine della superficie gobba che ha per direttrici una retta e le linee d'ordine p, q, aventi r punti comuni, è $2pq-r$. Epperò dovremo avere:

$$2pq-r=n\,. \tag{5}$$

Dalle equazioni (4) e (5) si ricava intanto:

$$pq=n-1, \qquad r=n-2\,. \tag{6}$$

Supposta la retta R situata nel piano P, consideriamo la corrispondente curva d'ordine n posta nel piano P', cioè l'intersezione di questo piano colla superficie gobba d'ordine $2pq-r$ dianzi accennata. La curva, della quale si tratta, avrà:

p punti multipli secondo q: essi sono le intersezioni del piano P' colla linea direttrice d'ordine p (infatti da ogni punto di questa linea si ponno condurre q rette ad incontrare l'altra linea direttrice e la retta R, ossia la linea direttrice d'ordine p è multipla secondo q sulla superficie gobba);

q punti multipli secondo p, e sono le intersezioni del piano P' colla linea direttrice d'ordine q (perchè analogamente questa è multipla secondo p sulla superficie gobba);

pq punti semplici nelle intersezioni della retta comune ai piani P, P', colle rette che dai punti ove la direttrice d'ordine p sega il piano P, vanno ai punti ove l'altra direttrice sega lo stesso piano.

Questi $p+q+pq$ punti non variano, variando R, cioè sono comuni a tutte le curve d'ordine n, del piano P', corrispondenti alle rette del piano P. Dunque avremo:

$$x_1 = pq\,, \qquad x_p = q\,, \qquad x_q = p$$

e gli altri x saranno eguali a zero: così che le equazioni (1) e (2) daranno, avuto riguardo alla prima delle (6):

$$p+q=n\,.$$

E questa, combinata colla medesima prima delle (6), somministra:

$$p=n-1\,, \qquad q=1\,.$$

Ciò significa che delle due direttrici, l'una sarà una curva dell'ordine $n-1$ e l'altra una retta, le quali abbiano $n-2$ punti comuni. Questa condizione può essere verificata da una retta e da una curva piana d'ordine $n-1$ (non situate in uno stesso piano), purchè questa abbia un punto multiplo secondo il numero $n-2$, e la retta direttrice passi per questo punto multiplo.

Del resto, la direttrice dell'ordine $n-1$ può essere una curva gobba; perchè, a cagion d'esempio, sulla superficie di un iperboloide si può descrivere *) una curva gobba K dell'ordine $n-1$, la quale sia incontrata da ciascuna delle generatrici di uno stesso sistema in $n-2$ punti (e per conseguenza da ciascuna generatrice dell'altro sistema in un solo punto). Potremo dunque assumere tale curva gobba ed una generatrice D del primo sistema come direttrici della trasformazione.

In questa trasformazione, ad ogni punto a del piano P corrisponde un solo punto a' del piano P' e reciprocamente. Il qual punto a' si determina così. Il piano condotto pel punto a e per la retta D incontra la curva K in un solo punto, all'infuori della retta medesima D: questo punto congiunto con a somministra una retta che incontra il piano P' nel richiesto punto a'.

Se R è una retta qualunque nel piano P, la superficie gobba (d'ordine n) che ha per direttrici le linee K, D, R, sega il piano P' secondo la curva (d'ordine n) corrispondente ad R. Tutte le curve che analogamente corrispondono a rette hanno in co-

*) Comptes rendus de l'Acad. de France, 24 juin 1861. [Queste Opere, n. **30** (t. 1.°)].

mune un punto multiplo secondo $n-1$ e $2(n-1)$ punti semplici, cioè: 1.° il punto in cui D incontra il piano P'; 2.° gli $n-1$ punti in cui il piano P' è incontrato dalla direttrice K; 3.° gli $n-1$ punti in cui la retta comune intersezione dei piani P, P' è incontrata dalle rette che uniscono il punto comune alla retta D ed al piano P coi punti comuni alla curva K ed allo stesso piano P.

In altre parole: le superficie gobbe analoghe a quella le direttrici della quale sono K, D, R, hanno tutte in comune: 1.° la direttrice D (multipla secondo $n-1$, epperò equivalente ad $(n-1)^2$ rette comuni); 2.° la direttrice curvilinea (semplice) K; 3.° $n-1$ generatrici (semplici) situate nel piano P. Tutte queste linee, insieme prese, equivalgono ad una linea dell'ordine $(n-1)^2+2(n-1)$. Quindi due superficie gobbe (dell'ordine n) determinate da due rette R, S, nel piano P, avranno inoltre in comune una retta; la quale evidentemente unisce il punto a d'intersezione delle R, S col corrispondente punto a', comune alle due curve che nel piano P' corrispondono alle rette R, S.

Se la retta R passa pel punto d in cui D incontra il piano P, è evidente che la relativa superficie rigata si decompone nel cono che ha il vertice in d e per direttrice la curva K, e nel piano che contiene le rette D, R.

Se la retta R passa per uno de' punti k comuni al piano P ed alla curva K, la relativa superficie rigata si decompone nel piano che contiene il punto k e la retta D, e nella superficie gobba d'ordine $n-1$, avente per direttrici K, D, R.

Se la retta R passa per due dei punti k, la relativa superficie rigata si decomporrà in due piani ed in una superficie gobba d'ordine $n-2$.

Ed è anche facilissimo il vedere che una curva qualunque C, d'ordine μ, data nel piano P, dà luogo ad una superficie gobba d'ordine $n\mu$, per la quale D è multipla secondo $\mu(n-1)$ e K è multipla secondo μ. Quindi alla curva C corrisponderà nel piano P' una linea d'ordine $n\mu$, avente: 1.° un punto multiplo secondo $\mu(n-1)$, sopra D; 2.° $n-1$ punti multipli secondo μ, sopra K; 3.° $n-1$ punti multipli secondo μ, sulla retta comune intersezione dei piani P, P'.

Applicando alle cose dette precedentemente il principio di dualità, otterremo due figure: l'una composta di rette e di piani passanti per un punto o; l'altra di rette e piani passanti per un altro punto o'. E le due figure avranno fra loro tale relazione, che a ciascun piano dell'una corrisponderà un solo piano nell'altra e viceversa; ed alle rette di una qualunque delle due figure corrisponderanno nell'altra superficie coniche della classe n, aventi in comune $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ piani tangenti semplici e multipli. I numeri $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ saranno connessi fra loro dalle stesse equazioni (1) e (2).

In particolare poi, per dedurre una figura dall'altra, potremo assumere come direttrici una retta D ed una superficie sviluppabile K della classe $n-1$, la quale abbia $n-2$ piani tangenti passanti per D. Allora, dato un piano qualunque π per o, il quale seghi D in un punto a, per questo punto passa (oltre agli $n-2$ piani per D) un solo piano tangente che segherà π secondo una certa retta. Il piano π' determinato da essa e dal punto o' è il corrispondente di π.

Segando poi le due figure rispettivamente con due piani P e P', otterremo in questi due figure tali che a ciascuna retta dell'una corrisponderà una sola retta nell'altra e viceversa; mentre ad un punto dell'un de' due piani corrisponderà nell'altro una curva della classe n, avente un certo numero di tangenti semplici e multiple, fisse.