47.

SULLA TEORIA DELLE CONICHE. [19]

Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, tomo V (1863), pp. 330-331.
Giornale di Matematiche, volume I (1863), pp. 225-226.

Scopo di quest'articolo è di indagare l'origine dell'apparente contraddizione che s'incontra nell'applicare la teoria generale delle curve piane alla ricerca delle coniche che soddisfano a cinque condizioni date (punti o tangenti) *).

1. Le coniche descritte per quattro punti $abcd$ formano un fascio, epperò una retta qualsivoglia L è da esse incontrata in coppie di punti, che sono in involuzione. In ciascuno de' due punti doppi dell'involuzione la retta L è toccata da una conica del fascio; in altre parole, le coniche passanti per tre punti dati abc e toccanti una data retta L formano una *serie d'indice* 2.

Le rette polari di un punto arbitrario o relative alle coniche della serie anzidetta inviluppano una conica (*Introd.* 84, b), ossia costituiscono una nuova serie d'indice 2. Le due serie, essendo projettive, generano colle scambievoli intersezioni degli elementi omologhi una curva del sesto ordine, luogo de' punti di contatto fra le rette tirate per o e le coniche della prima serie (*Introd.* 83, 85). Questa curva ha un punto doppio in o, a causa delle due coniche della serie che passano per questo punto; quindi una retta M condotta ad arbitrio per o tocca in altri quattro punti altrettante coniche della serie medesima.

2. Di qui si trae che le coniche descritte per due punti ab e toccanti due rette LM formano una serie d'indice 4. I punti ab e quelli ove la retta ab sega le LM determinano un'involuzione, i cui punti doppi siano ff'. In essi incrociansi, com'è noto, tutte le corde di contatto delle coniche della serie colle tangenti LM. Se la corda di contatto dee passare per f, e la conica per un terzo punto c, il problema ammette due

*) *Journal de Liouville,* avril 1861, p. 121 [20] — *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, p. 65 [n.i 83 e seg.i V. queste Opere, n. **29** (t. 1.o)]. — *Giornale di Matematiche di Napoli,* aprile 1863, p. 128. [21]

soluzioni, individuate dai punti doppi dell'altra involuzione che formano i punti ac con quelli comuni alla retta ac ed alle LM.

Dunque la suddetta serie di coniche d'indice 4 si compone di due distinte serie, ciascuna d'indice 2, corrispondenti ai due fasci di corde di contatto incrociate in f o in f' *).

Le rette polari di un punto arbitrario u relative alle coniche di una qualunque delle due serie or nominate formeranno una nuova serie d'indice 2. La serie di coniche e la serie di rette, essendo projettive, generano un luogo del sesto ordine, che però è composto di una curva del quarto e della retta ab presa due volte. Infatti, se m è un punto di ab, ciascuna delle *due* coniche della serie passanti per m riducesi al sistema di due rette coincidenti in ab, e come tale è incontrata dalla retta um in due punti sovrapposti in m; dunque m conta *due* volte come punto di contatto fra le rette uscenti da u e le coniche della serie (d'indice 2) che si considera.

La curva del quart'ordine passa due volte per u; epperò una retta N condotta ad arbitrio per u toccherà altrove due coniche di quella serie, e similmente toccherà due coniche dell'altra serie. Dunque vi sono quattro coniche tangenti a tre rette date LMN e passanti per due punti dati ab.

3. Ciò torna a dire che le coniche descritte per un punto dato a e toccate da tre rette LMN formano una serie d'indice 4. Le rette polari di un punto i costituiranno un'altra serie dello stesso indice; e le due serie, perchè projettive, genereranno un luogo del dodicesimo ordine; il quale però si decomporrà in una curva del sesto ordine e nelle tre rette a(MN), a(NL), a(LM), ciascuna contata due volte. Ed invero se m è un punto di una di queste rette, per es. di a(MN), per m passano due sole (vedi l'annotazione a piè di pagina) *effettive* coniche della serie; ciascuna delle altre due coincide colla retta a(MN), risguardata come un sistema di due rette sovrapposte.

La curva del sesto ordine passa quattro volte per i; dunque una retta H arbitrariamente condotta per questo punto toccherà altrove due sole coniche della serie. Ossia, per un punto dato passano due sole coniche che tocchino quattro rette date.

4. Donde si ricava che le coniche tangenti a quattro rette date LMNH formano una serie d'indice 2. Questa essendo projettiva all'altra, dello stesso indice, formata dalle rette polari di un punto e, le intersezioni degli elementi corrispondenti genereranno un luogo del sesto ordine: il quale è composto di una curva del terzo e delle

*) Se la retta ab passa pel punto LM, in questo coincide uno dei punti ff'; onde rimane soltanto la serie (d'indice 2) di coniche corrispondente all'altro punto, che con LM divide armonicamente il segmento ab. Cioè, se la retta ab passa pel punto LM, vi sono due sole coniche (effettive) passanti per i punti ab e toccanti le rette LM ed una terza retta N.

tre diagonali del quadrilatero completo LMNH. Infatti, se m è un punto di una diagonale, delle due coniche della serie passanti per m una sola è effettiva; l'altra riducesi alla diagonale medesima, considerata come un sistema di due rette coincidenti.

La curva del terz'ordine passa due volte per e; onde una retta arbitrariamente condotta per e toccherà (altrove) una sola conica della serie. Ossia, vi ha una sola conica tangente a cinque rette date.

Cornigliano (presso Genova), 4 agosto 1863.