41.

UN TEOREMA SULLE CUBICHE GOBBE.

Giornale di Matematiche, volume I (1863), pp. 278-279.

Siano date una cubica gobba ed una retta R, non aventi punti comuni. Un piano P condotto ad arbitrio per R incontra la cubica in tre punti abc; cioè R è incontrata da tre corde della cubica situate nel piano P. Siano α, β, γ i punti in cui le tre corde bc, ca, ab incontrano R. Uno qualunque dei punti $\alpha\beta\gamma$ determina gli altri due: perchè da ogni punto di R parte una sola corda della cubica, la quale insieme con R individua il corrispondente piano P. Dunque, se il piano P gira intorno ad R, la terna $\alpha\beta\gamma$ genera un' involuzione di terzo grado (*Introd.* 21). Tale involuzione ha quattro punti doppi; vale a dire, per la retta R passano quattro piani tangenti della cubica: teorema conosciuto.

Considerando il piano P in una sua posizione qualunque, sia m il polo ed M la conica polare di R rispetto al triangolo abc risguardato come un inviluppo di terza classe (*Introd.* 82). In altre parole: se da un punto qualunque i di R si tira la retta ia che seghi bc in a', e se y è il centro armonico di primo grado del sistema $a'bc$ rispetto ad α, il quale punto y si determina mediante l'equazione:

$$(1) \qquad \frac{ya'}{\alpha a'} + \frac{yb}{\alpha b} + \frac{yc}{\alpha c} = 0, \qquad (\textit{Introd.}\ 11, 19)$$

la retta iy passerà per un punto fisso m. E se si cercano i due centri armonici x di secondo grado (dello stesso sistema rispetto al medesimo punto α), mediante l'equazione:

$$(2) \qquad \frac{\alpha a'}{xa'} + \frac{\alpha b}{xb} + \frac{\alpha c}{xc} = 0,$$

l'inviluppo delle due rette ix sarà una conica M *).

*) Mediante le equazioni (1), (2) si mostra facilissimamente che, se a_0, b_0, c_0 sono rispettivamente i coniugati armonici di α, β, γ rispetto alle coppie bc, ca, ab, le rette aa_0, bb_0, cc_0 concorrono in m, e la conica M tocca in a_0, b_0, c_0 i lati del triangolo abc.

Qualunque sia il piano P, il punto m non può mai cadere in R; e siccome ogni piano condotto per R contiene un solo punto m, così *il luogo di m sarà una retta* S. Se i punti ab coincidono, cioè se il piano P sega la cubica in c e la tocca in b, è evidente che il punto m cadrà nella retta bc e sarà determinato dall'equazione

$$\frac{3}{\alpha m}=\frac{2}{\alpha b}+\frac{1}{\alpha c},$$

che si ricava dalla (1) pel caso attuale. Dunque *la retta* S *incontra le quattro corde della cubica gobba situate ne' piani tangenti che passano per* R.

Se i punti abc coincidono, m coincide con essi; cioè, se R giace in un piano osculatore della cubica, S passa pel punto di contatto. Ne segue che, se R è l'intersezione di due piani osculatori, S sarà la corda di contatto.

Ripreso il piano P qualsivoglia, cerchiamo i punti in cui la conica M sega la retta R. L'equazione (2) somministra le due tangenti che si possono condurre ad M da un punto arbitrario i di R: se i due punti x coincidono insieme, i sarà un punto di M. Ora si dimostra facilmente che i due centri armonici di secondo grado di un sistema di tre punti $a'bc$ rispetto ad un punto α coincidono insieme quando i quattro punti $\alpha a'bc$ formino un sistema *equianarmonico* *). Questo sistema si proietta in $\alpha i\gamma\beta$; dunque i punti i', i'' comuni ad R e ad M saranno quelli che rendono rispettivamente equianarmonici i sistemi $\alpha\beta\gamma i'$, $\alpha\beta\gamma i''$, ovvero (*Introd.* 26) i punti doppii dell'involuzione $(\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma')$, ove α', β', γ' sono i coniugati armonici di α, β, γ rispetto alle coppie $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$.

Si dimostra facilmente che in una involuzione di terzo grado, quale è quella formata dalle terne di punti $\alpha\beta\gamma$ in R, vi sono due terne, ciascuna delle quali associata ad un *dato* punto i di R fornisce un sistema equianarmonico. Dunque per ogni punto i della retta R passano due coniche M.

Ciò premesso, domandiamo quale sia il luogo della conica M. Ogni piano P, condotto per R, sega il luogo secondo una conica M e la retta R. Questa poi è *doppia* nel luogo medesimo, giacchè in ogni suo punto i vi saranno due piani tangenti determinati dalle tangenti in i alle due coniche M passanti pel punto medesimo. Dunque *il luogo di* M *è una superficie del quart'ordine.*

Quando il piano P sega la cubica in c e la tocca in b, la conica M, considerata come polare di R, si riduce al sistema di due punti, l'uno dei quali è c; l'altro x giace in bc ed è determinato dalla equazione:

$$\frac{3}{\alpha x}=\frac{1}{\alpha b}+\frac{2}{\alpha c}$$

*) Cioè un sistema avente i tre rapporti anarmonici fondamentali eguali tra loro (*Introduzione* 26, 27).

che si deduce dalla (2). Ma considerata come parte dell'intersezione della superficie di quart'ordine col piano P, la conica M si riduce alla retta *bc* presa due volte: cioè il piano P tocca la superficie lungo tutta la retta *bc*.

Se R giace in un piano osculatore, è facile vedere che esso fa parte della superficie di quart'ordine: perchè ogni retta condotta nel piano pel punto di contatto e contata due volte tien luogo di una conica M. Dunque, se R è l'intersezione di due piani osculatori, il luogo delle coniche M situate negli altri piani passanti per R sarà una superficie di second'ordine.

Cornigliano (presso Genova), 19 settembre 1863.