44.

AREA DI UN SEGMENTO DI SEZIONE CONICA.

Giornale di Matematiche, volume I (1863), pp. 360-364.

Problema. Trovare l'area compresa fra la conica:

(1) $$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

e la retta:

(2) $$\lambda x + \mu y + \nu z = 0.$$

Qui le x, y, z sono le distanze del punto variabile dai lati del triangolo di riferimento; onde chiamati α, β, γ i lati di questo e δ l'area, si avrà identicamente:

(3) $$\alpha x + \beta y + \gamma z = 2\delta.$$

Pongasi:

$$\Sigma = \begin{vmatrix} a & h & g & \lambda \\ h & b & f & \mu \\ g & f & c & \nu \\ \lambda & \mu & \nu & 0 \end{vmatrix}, \quad \Sigma' = \begin{vmatrix} a & h & g & \alpha \\ h & b & f & \beta \\ g & f & c & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix}, \quad \Sigma'_1 = \begin{vmatrix} a & h & g & \alpha \\ h & b & f & \beta \\ g & f & c & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}, \quad \Sigma'' = \begin{vmatrix} a & h & g & \lambda & \alpha \\ h & b & f & \mu & \beta \\ g & f & c & \nu & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

così che sarà:

(4) $$\Delta\Sigma'' = \Sigma\Sigma' - \Sigma'^2_1.$$

Il significato di questi determinanti è conosciuto. Secondo che Σ sia positivo, nullo o negativo *), la retta (2) sega, tocca o non incontra la conica (1). L'analogo significato ha Σ' rispetto alla retta:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \tag{5}$$

cioè, secondo che Σ' sia positivo, nullo o negativo, la conica (1) è un'iperbole, una parabola o un'ellisse.

Se si ha $\Sigma'_1 = 0$, le due rette (2), (5) sono coniugate rispetto alla conica data, cioè la retta (2) passa pel centro della conica medesima.

L'equazione $\Sigma'' = 0$ è il risultato della eliminazione di x, y, z fra le (1), (2), (5), ossia esprime la condizione che la retta (2) sia parallela ad un assintoto della conica (1).

Ritenuto che Σ sia positivo, cioè che la retta (2) seghi la conica (1) in due punti $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$ reali, sia

$$lx + my + nz = 0 \tag{6}$$

una retta condotta arbitrariamente per l'uno di essi.

Eliminando x, y, z fra le (1), (2), (6) si ha:

$$\begin{vmatrix} a & h & g & \lambda & l \\ h & b & f & \mu & m \\ g & f & c & \nu & n \\ \lambda & \mu & \nu & 0 & 0 \\ l & m & n & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathrm{A}l^2 + \mathrm{B}m^2 + \mathrm{C}n^2 + 2\mathrm{F}mn + 2\mathrm{G}nl + 2\mathrm{H}lm = 0,$$

risultato che dovrà coincidere con

$$(lx_1 + my_1 + nz_1)(lx_2 + my_2 + nz_2) = 0;$$

onde il confronto de' coefficienti di $l^2, m^2, \ldots$ somministrerà:

$$\frac{\mathrm{A}}{x_1 x_2} = \frac{\mathrm{B}}{y_1 y_2} = \frac{\mathrm{C}}{z_1 z_2} = \frac{2\mathrm{F}}{y_1 z_2 + y_2 z_1} = \frac{2\mathrm{G}}{z_1 x_2 + z_2 x_1} = \frac{2\mathrm{H}}{x_1 y_2 + x_2 y_1} = \theta. \tag{7}$$

Il rapporto θ si determina osservando che le coordinate $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$ devono soddisfare alla relazione (3); di modo che le equazioni

$$\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 = 2\delta, \qquad \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2 = 2\delta$$

*) Vedi la bella esposizione delle coordinate trilineari fatta dal prof. TRUDI (p. 151 di questo Giornale). [17]

moltiplicate fra loro, danno:

$$4\delta^2\theta = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2F\beta\gamma + 2G\gamma\alpha + 2H\alpha\beta,$$

ossia:

$$\theta = \frac{\Sigma''}{4\delta^2}.$$

Quindi dalle (7) si ricava:

$$(y_1z_2 - y_2z_1)^2 = \frac{4(F^2 - BC)}{\theta^2};$$

ma:

$$F^2 - BC = \lambda^2\Sigma,$$

dunque:

$$y_1z_2 - y_2z_1 = \frac{8\delta^2\Sigma^{\frac{1}{2}}}{\Sigma''}\lambda,$$

e analogamente:

$$z_1x_2 - z_2x_1 = \frac{8\delta^2\Sigma^{\frac{1}{2}}}{\Sigma''}\mu,$$

$$x_1y_2 - x_2y_1 = \frac{8\delta^2\Sigma^{\frac{1}{2}}}{\Sigma''}\nu.$$

D'altronde *) per la distanza ρ dei due punti $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$ si ha:

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{16\delta^4}\left\{\begin{array}{l} (y_1z_2 - y_2z_1)^2 \\ +(z_1x_2 - z_2x_1)^2 - 2 \\ +(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \end{array}\left|\begin{array}{l} (z_1x_2 - z_2x_1)(x_1y_2 - x_2y_1)\cos\beta\gamma \\ (x_1y_2 - x_2y_1)(y_1z_2 - y_2z_1)\cos\gamma\alpha \\ (y_1z_2 - y_2z_1)(z_1x_2 - z_2x_1)\cos\alpha\beta \end{array}\right|\right\};$$

epperò sostituendo i trovati valori de' binomî $y_1z_2 - y_2z_1, \ldots$ si avrà:

$$\rho^2 = 4\alpha^2\beta^2\gamma^2\frac{\Sigma}{\Sigma''^2}\Xi, \tag{8}$$

ove si è posto:

$$\Xi = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 2\mu\nu\cos\beta\gamma - 2\nu\lambda\cos\gamma\alpha - 2\lambda\mu\cos\alpha\beta.$$

Sia poi:

$$\lambda x + \mu y + \nu z - \omega(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0 \tag{9}$$

una retta condotta parallelamente alla (2) a segare la conica (1) in due punti; la di-

*) Vedi a pag. 25 di questo Giornale.

stanza r de' quali si desumerà dalla (8) mutando in Σ ed in Ξ le λ, μ, ν in $\lambda - \omega\alpha$, $\mu - \omega\beta$, $\nu - \omega\gamma$; Σ'' rimane inalterato. Si avrà così:

$$r^2 = \frac{4\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\Sigma''^2}(\Sigma - 2\omega\Sigma'_1 + \omega^2\Sigma')(\Xi - 2\omega\Xi'_1 + \omega^2\Xi'), \tag{10}$$

ove:

$$\Xi' = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos\beta\gamma - 2\gamma\alpha\cos\gamma\alpha - 2\alpha\beta\cos\alpha\beta,$$

$$\Xi'_1 = \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma - (\nu\beta + \mu\gamma)\cos\beta\gamma - (\lambda\gamma + \nu\alpha)\cos\gamma\alpha - (\mu\alpha + \lambda\beta)\cos\alpha\beta.$$

La distanza perpendicolare ε fra la retta (9) e la sua parallela infinitamente vicina

$$\lambda x + \mu y + \nu z - (\omega + d\omega)(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0 \tag{11}$$

è *) espressa da:

$$\varepsilon = \frac{2\delta \,.\, d\omega}{(\Xi - 2\omega\Xi'_1 + \omega^2\Xi')^{\frac{1}{2}}}; \tag{12}$$

quindi l'area elementare compresa fra le rette (9), (11) e la curva (1) sarà:

$$r\varepsilon = \frac{4\alpha\beta\gamma \,.\, \delta}{\Sigma''}(\Sigma - 2\omega\Sigma'_1 + \omega^2\Sigma')^{\frac{1}{2}}\, d\omega. \tag{13}$$

Se la conica data è un'ellisse ($\Sigma' < 0$), l'integrazione della precedente formula dà:

$$\text{Area indefinita} = \frac{2\alpha\beta\gamma \,.\, \delta}{\Sigma''(-\Sigma')^{\frac{3}{2}}}\left\{\begin{array}{l} -(\omega\Sigma' - \Sigma'_1)(-\Sigma')^{\frac{1}{2}}(\Sigma - 2\omega\Sigma'_1 + \omega^2\Sigma')^{\frac{1}{2}} \\ -(\Sigma'^2_1 - \Sigma\Sigma')\,\text{Ang.sen}\,\dfrac{\omega\Sigma' - \Sigma'_1}{(\Sigma'^2_1 - \Sigma\Sigma')^{\frac{1}{2}}} \end{array}\right\} + \text{Cost.}^e \tag{14}$$

Invece se la conica (1) è un'iperbole ($\Sigma' > 0$) integrando (13) si ha:

$$\text{Ar. indef.} = \frac{2\alpha\beta\gamma \,.\, \delta}{\Sigma''\Sigma'^{\frac{3}{2}}}\left\{\begin{array}{l} (\omega\Sigma' - \Sigma'_1)\Sigma'^{\frac{1}{2}}(\Sigma - 2\omega\Sigma'_1 + \omega^2\Sigma')^{\frac{1}{2}} \\ +(\Sigma\Sigma' - \Sigma'^2_1)\log\left((\omega\Sigma' - \Sigma'_1) + \Sigma'^{\frac{1}{2}}(\Sigma - 2\omega\Sigma'_1 + \omega^2\Sigma')^{\frac{1}{2}}\right) \end{array}\right\} + \text{Cost.}^e \tag{15}$$

E per la parabola ($\Sigma' = 0$) si ha:

$$\text{Area indefinita} = -\frac{4\alpha\beta\gamma \,.\, \delta}{3\Sigma'_1\Sigma''}(\Sigma - 2\omega\Sigma'_1)^{\frac{3}{2}} + \text{Cost.}^e \tag{16}$$

---

*) Vedi a pag. 24 di questo Giornale.

La condizione che la retta (9) tocchi la conica (1) è:

$$\Sigma-2\omega\Sigma'_1+\omega^2\Sigma'=0 \tag{17}$$

donde si hanno due valori di ω:

$$\omega_1=\frac{\Sigma'_1+(\Sigma'^2_1-\Sigma\Sigma')^{\frac{1}{2}}}{\Sigma'}, \qquad \omega_2=\frac{\Sigma'_1-(\Sigma'^2_1-\Sigma\Sigma')}{\Sigma'},$$

i quali nel caso dell'ellisse sono sempre reali; e nel caso dell'iperbole sono reali purchè $\Sigma'^2_1-\Sigma\Sigma'>0$, ossia purchè la retta (2) tagli in due punti un solo ramo della curva.

Estendendo l'integrazione (14) da $\omega=\omega_1$ ad $\omega=0$, per ottenere l'area del segmento ellittico compreso fra la curva (1) e la retta (2), si avrà:

$$\frac{2\alpha\beta\gamma\,.\,\delta}{\Sigma''(-\Sigma')^{\frac{3}{2}}}\left\{\Sigma'_1(-\Sigma\Sigma')^{\frac{1}{2}}-\Delta\Sigma''\,\text{Ang. sen}\left(\frac{\Sigma\Sigma'}{\Delta\Sigma''}\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \;*)$$

ove si è avuto riguardo all'identità (4). Estendendo poi la stessa integrazione da $\omega=\omega_1$ ad $\omega=\omega_2$ si otterrà l'area dell'ellisse:

$$\frac{2\pi\,.\,\alpha\beta\gamma\,.\,\delta\,.\,\Delta}{(-\Sigma')^{\frac{3}{2}}} \;**).$$

Per l'area del segmento iperbolico, estendendo l'integrazione (15) da $\omega=0$ ad $\omega=\omega_2$ si ha:

$$\frac{2\alpha\beta\gamma\,.\,\delta}{\Sigma''\Sigma'^{\frac{3}{2}}}\left\{\Sigma'_1(\Sigma\Sigma')^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}(\Sigma'^2_1-\Sigma\Sigma')\log\frac{\Sigma'_1+(\Sigma\Sigma')^{\frac{1}{2}}}{\Sigma'_1-(\Sigma\Sigma')^{\frac{1}{2}}}\right\}.$$

Per l'area del segmento parabolico, estendendo l'integrazione (16) da $\omega=\dfrac{\Sigma}{2\Sigma'_1}$ ad $\omega=0$ si ottiene:

$$\frac{4\alpha\beta\gamma\,.\,\delta\,\Sigma^{\frac{3}{2}}\Delta}{3\Sigma'^3_1}.$$

Quando la conica (1) è un paio di rette (reali) Σ e Σ' sono positivi, e siccome $\Delta=0$, così si ha $\Sigma'^2_1=\Sigma\Sigma'$; onde la (13) diviene:

$$r\varepsilon=\frac{4\alpha\beta\gamma\,.\,\delta}{\Sigma''}(\sqrt{\Sigma}-\omega\sqrt{\Sigma'})\,d\omega.$$

---

*) Questa formola è dovuta al sig. SYLVESTER. A me la comunicò (senza dimostrazione) il sig. SALMON con sua gentilissima lettera del 23 novembre p. p.

**) Vedi FERRERS. *Treatise on trilinear coordinates.* p. 92.

Integrando ed estendendo l'integrazione da $\omega = \sqrt{\frac{\Sigma}{\Sigma'}}$ ad $\omega = 0$, si ottiene l'area del triangolo formato dalle due rette (1) e dalle rette (2):

$$-\frac{2\alpha\beta\gamma \, . \, \delta}{\Sigma''} \cdot \frac{\Sigma}{\sqrt{\Sigma'}} \, .$$

Se le due rette formanti la conica sono date mediante le equazioni esplicite

$$\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 z = 0$$
$$\lambda_2 x + \mu_2 y + \nu_2 z = 0$$

si ha:

$$\Sigma = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \lambda & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu & \mu_1 & \mu_2 \\ \nu & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}^2 , \quad \Sigma' = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \alpha & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \beta & \mu_1 & \mu_2 \\ \gamma & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}^2 , \quad \Sigma'' = \begin{vmatrix} \alpha & \lambda & \lambda_1 \\ \beta & \mu & \mu_1 \\ \gamma & \nu & \nu_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \lambda & \lambda_2 \\ \beta & \mu & \mu_2 \\ \gamma & \nu & \nu_2 \end{vmatrix} ,$$

onde l'area del triangolo risulterà formata simmetricamente coi parametri delle tre rette:

$$\alpha\beta\gamma \, . \, \delta \frac{\begin{vmatrix} \lambda & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu & \mu_1 & \mu_2 \\ \nu & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} \alpha & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \beta & \mu_1 & \mu_2 \\ \gamma & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \lambda_2 & \lambda \\ \beta & \mu_2 & \mu \\ \gamma & \nu_2 & \nu \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \lambda & \lambda_1 \\ \beta & \mu & \mu_1 \\ \gamma & \nu & \nu_1 \end{vmatrix}}$$

formola nota.

Bologna, 4 dicembre 1863.