42.

QUESTIONI PROPOSTE NEL GIORNALE DI MATEMATICHE. [13]

Volume I (1863), p. 280.

16. Dati quattro punti in linea retta, *abco*, in generale la terna *abc* ammette due centri armonici di secondo grado rispetto al polo *o*. Condizione necessaria e sufficiente perchè i due centri coincidano è che il sistema *abco* sia equianarmonico. Viceversa, se un sistema di quattro punti (in linea retta) è equianarmonico, tre qualunque di essi hanno rispetto al restante due centri armonici di secondo grado coincidenti.

17. Se in una retta si hanno terne di punti in involuzione, vi sono in generale due terne, ciascuna delle quali associata con un dato punto della retta forma un sistema equianarmonico.

18. Se quattro punti dati in linea retta sono rappresentati dalla forma binaria biquadratica $U=0$, gli otto punti ciascuno de' quali unito a tre fra i dati formi un sistema equianarmonico sono rappresentati dall'equazione-covariante

$$I^2U^2 - 144\,JUC + 192\,IC^2 = 0,$$

ove C è il covariante biquadratico ed I, J gli invarianti quadratico e cubico della forma U.

Volume I (1863), pp. 318-319.

19. Date due coniche

$$U = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy = 0,$$
$$U' = a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2d'yz + 2e'zx + 2f'xy = 0,$$

l'equazione della conica inviluppata dal lato libero di un triangolo inscritto in U, due lati del quale tocchino U', è

$$(\Theta'^2 - 4\Theta\Delta')\,U + 4\Delta\Delta'U' = 0,$$

ove Δ, Δ' sono i discriminanti di U, U', cioè:

$$\Delta = ad^2 + be^2 + cf^2 - abc - 2def,$$
$$\Delta' = a'd'^2 + b'e'^2 + c'f'^2 - a'b'c' - 2d'e'f',$$

e Θ, Θ' sono i due invarianti misti di U, U', cioè:

$$\Theta = a'(d^2 - bc) + b'(e^2 - ca) + c'(f^2 - ab) + 2d'(ad - ef) + 2e'(be - fd) + 2f'(cf - de),$$
$$\Theta' = a(d'^2 - b'c') + b(e'^2 - c'a') + c(f'^2 - a'b') + 2d(a'd' - e'f') + 2e(b'e' - f'd') + 2f(c'f' - d'e').$$

20. Date, come dianzi, due coniche rappresentate da equazioni complete, trovare l'equazione della polare reciproca dell'una rispetto all'altra.

21. Date di nuovo le due coniche $U=0, U'=0$, e trovata l'equazione $P=0$ della conica polare reciproca di U rispetto ad U', dimostrare che l'equazione:

$$\Theta' U + P = 0$$

rappresenta la conica inviluppo di una retta che tagli U, U' in quattro punti armonici; e che l'equazione:

$$\Theta U' - P = 0$$

rappresenta la conica luogo di un punto dal quale si possono condurre due tangenti ad U e due tangenti ad U', coniugate armonicamente.

22. Date le due coniche U, U', come sopra, ed inoltre due rette

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 0, \quad \xi' x + \eta' y + \zeta' z = 0,$$

se ha luogo l'eguaglianza:

$$\begin{gathered} \xi\xi'(bc' + b'c - 2dd') + \eta\eta'(ca' + c'a - 2ee') + \\ + \zeta\zeta'(ab' + a'b - 2ff') + (\eta\zeta' + \eta'\zeta)(ef' + e'f - ad' - a'd) + \\ + (\zeta\xi' + \zeta'\xi)(fd' + f'd - be' - b'e) + (\xi\eta' + \xi'\eta)(de' + d'e - cf' - c'f) = 0, \end{gathered}$$

le due rette date formano sistema armonico con due altre rette ciascuna delle quali taglia le coniche U, U' in quattro punti armonici. L. ROMANCE. [14]

23. Data una conica circoscritta ad un triangolo *abc*, è noto che le rette, le quali insieme colle tangenti ai vertici dividono armonicamente gli angoli del triangolo, concorrono in uno stesso punto *o*. Dimostrare che ciascuna delle tangenti condotte per *o* alla conica forma un sistema equianarmonico con *oa*, *ob*, *oc*.

24. Due serie proiettive, l'una di semplici punti, l'altra di coppie di punti in involuzione, sono date su una medesima retta. Siano o', o'' i punti doppii della seconda serie; ed a, b, c i punti comuni alle due serie*). Se ciascuno dei due punti o', o'' forma insieme coi tre a, b, c un sistema equianarmonico, in tal caso ai punti o', o'' della seconda serie corrisponderanno nella prima i punti o'', o' rispettivamente.

25. Date le equazioni di due coniche, è nota l'equazione di condizione perchè vi sia un triangolo inscritto nell'una e coniugato all'altra. Dedurne direttamente le condizioni perchè un'equazione quadratica fra le coordinate rappresenti un'iperbole equilatera o una parabola.

Volume II (1864), p. 30.

28. Un quadrilatero completo abbia i vertici, a due a due opposti, aa', bb', cc', e le diagonali $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$. Ciascuno dei lati del quadrilatero $(abc, ab'c', bc'a', ca'b')$ contiene tre punti: siano $\omega\omega'$ i punti ognun dei quali forma con quei tre un sistema equianarmonico. Ciascuna diagonale $(aa'.\beta\gamma, bb'.\gamma\alpha, cc'.\alpha\beta)$ contiene 4 punti: siano ii' i punti doppii dell'involuzione da essi determinata. Gli otto punti analoghi ad $\omega\omega'$ ed i sei punti analoghi ad ii' sono situati in una sola e medesima conica.

Volume II (1864), p. 62.

30. Dati cinque piani qualsivogliano nello spazio, ciascuno dei quali sarà intersecato dagli altri quattro secondo quattro rette formanti un quadrilatero completo, le coniche de' 14 punti relative a questi cinque quadrilateri (analoghe alla conica di cui è parola nella questione 28, pag. 30 del Giornale) giacciono tutte in una stessa superficie di 2.° ordine.

Rappresentando i cinque piani colle equazioni

$$x=0\,,\quad y=0\,,\quad z=0\,,\quad w=0\,,\quad x+y+z+w=0\,,$$

l'equazione della superficie di 2.° ordine sarà:

$$x^2+y^2+z^2+w^2+yz+zx+xy+xw+yw+zw=0\,.$$

31. Date tre rette oa, ob, oc in un piano, siano ow, ow' quelle due rette ciascuna delle quali forma colle prime tre un sistema equianarmonico.

---

*) Cioè quei punti della prima serie, ciascun dei quali coincide con uno dei corrispondenti nella seconda (*Introd.* 24, *b*) [Queste Opere, t. 1.°, p. 339].

Allora le ow, ow' con due qualunque delle oa, ob, oc, formano un fascio di quattro rette il cui rapporto anarmonico è eguale ad una radice cubica imaginaria dell'*unità positiva.*

Se le ow, ow' sono i raggi doppi di un'involuzione nella quale due raggi coniugati comprendono costantemente un angolo retto, le oa, ob, oc comprenderanno fra loro angoli di 120°.

32. Dato un determinante gobbo R d'ordine n, i cui elementi principali siano tutti eguali a z, ed indicati con a_{rs} gli elementi del determinante reciproco, si ha

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_{ri}\, a_{si} = \mathrm{R} \, . \, w_{rs}, \quad \text{se } n \text{ è pari}$$

ovvero

$$= \frac{\mathrm{R}}{2} \, . \, w_{rs}, \quad \text{se } n \text{ è dispari.}$$

Evidentemente le quantità w_{rs} sono gli elementi di un determinante simmetrico, il cui valore è R^{n-2} per n pari, ovvero $z^n . \mathrm{R}^{n-2}$ per n dispari.

Volume II (1864), p. 91.

33. Siano $u\, u_1 u_2$ i vertici di un triangolo equilatero inscritto in un circolo C, che ha per centro o; ed ab due punti della circonferenza di questo circolo, tali che si abbia fra gli archi au, ub la relazione $au = \frac{1}{2} ub$, e per conseguenza anche $au_1 = \frac{1}{2} u_1 b$, $au_2 = \frac{1}{2} u_2 b$. L'inviluppo della corda ab è una curva ipocicloidale di 3.ª classe e 4.° ordine, tangente in $u\, u_1 u_2$ al circolo C, ed avente tre cuspidi nei punti in cui i prolungamenti delle rette $uo, u_1 o, u_2 o$ incontrano il circolo concentrico a C e di raggio triplo.

34. [15] Le tangenti nei vertici delle parabole inscritte in un triangolo inviluppano una medesima curva di 3.ª classe e 4.° ordine, che è l'ipocicloide della quistione precedente *).

Volume II (1864), p. 256.

41. Se dei $6n$ punti che sono i vertici e le intersezioni delle coppie de' lati corrispondenti di due poligoni, ciascuno di $2n$ lati, ve ne sono $6n - 1$ situati in una curva di terz'ordine, anche il punto rimanente apparterrà alla medesima curva.

*) STEINER ha già enunciato il teorema che gli assi di quelle parabole sono tangenti ad una analoga ipocicloide (Crelle, LV, pag. 371).

42. Il rapporto anarmonico di quattro curve del terz'ordine, una delle quali sia la Hessiana delle altre tre, è eguale al rapporto anarmonico delle quattro tangenti che si possono condurre alla prima curva da un suo punto qualunque.

Volume III (1865), p. 64.

44. [16] In una serie di superficie di 2.° ordine, detti μ, ν, ρ i numeri esprimenti quante superficie della serie passano per un punto, toccano un piano, toccano una retta, sarà

$$\rho = \frac{\mu + \nu}{2}.$$

Sia poi p il numero delle superficie della serie che si riducono a semplici coniche, cioè che hanno un piano tangente doppio, e sia q il numero delle superficie della serie che sono coni, cioè che hanno un punto doppio; si avrà

$$p = \frac{3\mu - \nu}{2}, \quad q = \frac{3\nu - \mu}{2}.$$