39.

SUR LES SURFACES GAUCHES DU TROISIÈME DEGRÉ.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 60 (1862), pp. 313-320.

I.

1. Une surface gauche du 3.^{e} degré contient toujours une droite double et, *en général,* une autre directrice rectiligne non double. C'est-à-dire, la surface, dont il s'agit, peut, en général, être considérée comme lieu d'une droite mobile qui s'appuie sur une conique plane et sur deux droites, dont l'une (la droite double) ait un point commun avec la conique.

Mais il y a une surface gauche particulière (du 3.^{e} degré), dans laquelle les deux directrices rectilignes coïncident. M. Cayley a eu la bonté de me communiquer la découverte de ce cas singulier. Dans sa lettre du 12 juin 1861 l'illustre géomètre donne, pour cette surface particulière, la construction géométrique qui suit:

" Prenons une courbe cubique plane avec un point double; menons par ce point " une droite quelconque et supposons que les plans A, B, C, ... menés par cette droite " correspondent anharmoniquement aux points $a, b, c, \ldots$ de la même droite { de ma- " nière qu'au point double de la cubique, considéré comme point de la droite, corre- " sponde le plan mené par l'une des tangentes au point double (Voir le mémoire de " M. Schläfli, à la fin, Phil. Trans., vol. 153, part. I, pag. 241) }; alors, si par un point m " quelconque de la droite on mène dans le plan correspondant M une droite qui ren- " contre la courbe cubique, le lieu de cette droite sera la surface gauche du 3.^{e} ordre... „

Dans ce petit travail, j'ai l'intention de déduire cette surface particulière de la théorie générale que j'ai exposée dans mon mémoire " *Sulle superficie gobbe del terz'ordine* „ *).

*) Atti del R. Instituto Lombardo, vol. II, 1861. [Queste Opere, n. **27** (t. 1.°)].

2. On doit à M. SALMON *) une proposition très-importante, qui est fondamentale dans la théorie des surfaces réglées. Cette proposition répond à la question: "Quel est l'ordre de la surface engendrée par une droite mobile qui s'appuie sur trois directrices données?" C'est-à-dire: en combien de points cette surface est-elle percée par une droite arbitraire R? Soit m, m', m'' les ordres des lignes directrices données. La question revient à chercher le nombre des points où la courbe (m) rencontre la surface gauche dont les directrices soient les courbes $(m'), (m'')$ et la droite R. Ce nombre sera le produit de m par l'ordre de cette dernière surface.

Pareillement, l'ordre de cette surface sera le produit de m' par l'ordre d'une surface gauche, dont les directrices soient (m''), R et une autre droite R'. Et de même l'ordre de cette nouvelle surface sera égal au produit de m'' par l'ordre d'une surface gauche qui ait pour directrices trois droites R, R', R''.

Donc, l'ordre de la surface dont les directrices sont les lignes $(m), (m'), (m'')$ est, *en général*, $2mm'm''$.

Je dis *en général*, car ce nombre s'abaisse, lorsque les directrices ont des points communs, deux à deux. Si, par exemple, les courbes $(m'), (m'')$ ont r points communs, la surface dont les directrices sont $(m''), \mathrm{R}, \mathrm{R}'$ est rencontrée par la courbe (m') en $2m'm''-r$ autres points, seulement; et par conséquent, l'ordre de la surface demandée sera $2mm'm''-rm$. Si, outre cela, la courbe (m) a r' points communs avec la courbe (m'') et r'' points communs avec (m'), l'ordre de la surface réglée, dont les directrices sont $(m), (m'), (m'')$, sera

$$2mm'm''-rm-r'm'-r''m''.$$

On peut regarder tout point p de la courbe (m) comme sommet d'un cône passant par la courbe (m') et d'un autre cône qui ait pour directrice la ligne (m''). Les $m'm''$ droites communes à ces cônes sont des génératrices de la surface dont il s'agit, et sont les seules qui passent par p. Donc, pour cette surface, les directrices $(m), (m'), (m'')$ sont des lignes multiples et leur multiplicité s'élève aux degrés $m'm'', m''m, mm'$ respectivement.

Lorsque les directrices ont, deux à deux, r, r', r'' points communs, ces degrés de multiplicité deviennent

$$m'm''-r, \quad m''m-r', \quad mm'-r''.$$

Mais, si l'on a $m''=1$, c'est-à-dire, que l'une des directrices est une droite R, et si l'on prend un point p de cette droite comme sommet de deux cônes passant par les courbes $(m), (m')$ respectivement, cette droite est une génératrice multiple, dont la multiplicité

*) Cambridge and Dublin Mathematical Journal, vol. VIII, 1853.

est du degré r' pour le premier cône et du degré r pour l'autre; donc la multiplicité de R pour la surface gauche est du degré $mm'-r''-rr'$.

3. En vertu de ces principes généraux, si les directrices sont deux coniques C, C' et une droite D, ayant, deux à deux, un point commun, la surface gauche est du 3.^{e} degré; D est la droite double; C, C' sont des lignes simples. Toute surface gauche cubique admet cette génération, savoir:

Une surface gauche quelconque du 3.^{e} degré peut être engendrée par une droite mobile qui s'appuie sur trois directrices, une droite et deux coniques, qui aient, deux à deux, un point commun.

En général, en chaque point p de la droite double D se croisent deux génératrices, dont le plan tourne autour d'une droite fixe E, qui est la deuxième directrice rectiligne (non double). Ces deux génératrices, avec la droite double, déterminent deux plans qui sont tangents à la surface en p. Mais il y a, sur la droite D, deux points (réels ou imaginaires) qu'on peut nommer *cuspidaux:* en chacun de ces points il y a un seul plan tangent et une seule génératrice; et le long de ces deux génératrices particulières, la surface est touchée par deux plans qui passent par la deuxième directrice E.

On a donc quatre plans tangents, essentiellement distincts de tous les autres, savoir, les deux plans tangents aux points cuspidaux, et les plans tangents le long des génératrices correspondantes aux points cuspidaux. Ces plans sont tous réels ou tous imaginaires ensemble; et si l'on rapporte la surface au tétraèdre formé par eux, on a l'équation très-simple:

$$x^2 z - w^2 y = 0.$$

4. Dans le cas singulier, signalé par M. Cayley, les droites D, E coïncident en une seule, D, et les quatre plans dont il a été question ci-dessus se réduisent à un plan unique. Pour obtenir cette surface particulière, il suffit de supposer que les coniques C, C' soient touchées par un même plan π, passant par D. Dans ce cas, les deux cônes ayant pour bases les courbes C, C' et pour sommet commun un point quelconque p de D, se touchent entr'eux le long de la droite D; donc, l'une des deux génératrices de la surface gauche, qui, dans le cas général, se croisent en p, se confond actuellement avec D; l'autre seule est différente de D. De même, l'un des deux plans qui, en général, sont tangents à la surface en p coïncide dans ce cas avec π, quelque soit p. Et il y a un seul point (cuspidal) de D, où les génératrices coïncident toutes deux avec D, et les deux plans tangents coïncident avec π.

On obtient aussi d'une autre manière ce cas singulier. Dans mon mémoire “*Sur quelques propriétés des courbes gauches de troisième ordre et classe*” (tom. 58 de ce Journal)

[Queste Opere, n. **24** (t. 1.°)] j'ai démontré que, si l'on donne deux séries projectives de point ssur une droite E et sur une conique C, non situées dans un même plan, les droites qui joignent les couples de points homologues forment une surface cubique, dont la droite double est une droite D appuyée en un point sur la conique C, et la deuxième directrice rectiligne est E. Mais si la droite donnée E est elle-même appuyée en un point sur la conique C, on a précisément la surface de M. CAYLEY. C'est-à-dire, que l'on peut considérer cette surface comme lieu des droites qui joignent les points correspondants de deux séries projectives données, l'une sur une droite D, l'autre sur une conique C appuyée en un point a sur la droite D.

Si l'on considère ce point a comme appartenant à D et que l'on désigne par a' son homologue en C, la droite aa' est une génératrice de la surface. Et si l'on désigne par o' ce même point a considéré comme appartenant à C, son homologue o sur D sera le point cuspidal, savoir le point où la génératrice coïncide avec D.

5. Au moyen du principe de dualité, on conclut de ce qui précède, d'autres moyens d'engendrer la surface dont nous nous occupons.

Concevons deux cônes de 2^d degré touchés par un même plan donné et par une même droite donnée E. Qu'une droite mobile rencontre toujours cette droite E et se maintienne tangente aux deux cônes, elle engendrera une surface gauche cubique, dont E est, en général, la directrice non double; c'est-à-dire que tout plan mené par E coupe la surface suivant deux génératrices qui se croisent sur une droite fixe D (la droite double). — Si la droite donnée touche dans un même point les deux cônes, les droites D, E coïncident, et on a la surface particulière de M. CAYLEY.

Concevons en second lieu une droite D et un cône de 2^d degré; les plans menés par D correspondent anharmoniquement aux plans tangents du cône. Les droites, suivant lesquelles s'entrecoupent les plans homologues forment una surface gauche cubique, qui a pour droite double la droite donnée, mais qui, en général, admet une autre directrice rectiligne. Cette surface se réduit à celle de M. CAYLEY, lorsque la droite D est tangente au cône donné.

II.

6. Je saisis cette occasion pour énoncer quelques propriétés de la surface gauche générale du 3.^{e} degré: propriétés qui ne me semblent pas dépourvues d'intérêt.

Soit m un point quelconque de la surface gauche cubique Σ, et m' le pôle de la génératrice passant par m, relatif à la conique, suivant laquelle la surface est coupée par le plan tangent en m. J'ai démontré dans mon mémoire déjà cité*) que, si m

*) Atti del R. Instituto Lombardo, vol. II.

parcourt la surface Σ, le pôle correspondant m' décrit une autre surface gauche cubique Σ', et les deux surfaces Σ, Σ' ont cette propriété que le tétraèdre fondamental dont il a été question à la fin du n.° 3 leur est commun.

(Dans la surface gauche cubique particulière qui a une seule directrice rectiligne, si m parcourt une génératrice, le pôle m' décrit une droite qui passe toujours par le point cuspidal et est située dans le plan tangent à la surface le long de la droite double. Donc, dans ce cas, ce plan considéré comme l'assemblage de droites, en nombre infini, menées par le point cuspidal, est le lieu complet des pôles m').

On peut aussi obtenir la surface Σ' de cette autre manière. Soit M un plan tangent quelconque de la surface donnée Σ, et M' le plan polaire de la génératrice contenue en M, relatif au cône du 2$^{\text{d}}$ degré circonscrit à Σ et ayant pour sommet le point de contact du plan M. Si ce plan glisse sur la surface Σ, l'enveloppe du plan M' est la surface Σ'.

Un plan arbitraire P coupe la surface Σ suivant une courbe du 3.$^{\text{e}}$ ordre et de la 4.$^{\text{e}}$ classe. Les pôles correspondants aux points de cette courbe se trouvent dans une autre courbe plane de même ordre et classe, qui est l'intersection de la surface Σ' avec un certain plan P'. En variant simultanément, les plans P, P' engendrent deux figures homographiques, dans lesquelles la surface Σ' correspond à la surface Σ, et le tétraèdre fondamental (n.° 3) correspond à soi-même. Voici la relation entre deux points homologues p, p' de ces figures: les plans tangents à Σ menés par p forment un cône de 4.$^{\text{e}}$ ordre et 3.$^{\text{e}}$ classe, et les plans polaires correspondants forment un autre cône de même ordre et classe, circonscrit à Σ' et ayant son sommet en p.

Si le pôle m' s'éloigne à l'infini, la conique située dans le plan tangent en m a son centre sur la génératrice qui passe par ce point; donc, par toute génératrice de la surface gauche cubique on peut mener un plan coupant la surface suivant une conique, dont le centre soit sur la génératrice. Les plans des coniques analogues forment une développable de 4.$^{\text{e}}$ classe et 6.$^{\text{e}}$ ordre, circonscrite à la surface gauche donnée suivant une courbe plane. Le plan de cette courbe de contact est ce que devient P, lorsque P' s'éloigne à l'infini, dans les deux figures homographiques mentionnées ci-dessus.

7. Proposons nous cette question: parmi les coniques, en nombre doublement infini, suivant lesquelles la surface gauche cubique est coupée par ses plans tangents, y a-t-il des cercles?

Toutes les sphères sont coupées par le plan à l'infini suivant un même cercle (imaginaire) constant; je le désignerai par C_i. Réciproquement, toute surface de 2$^{\text{d}}$ ordre passant par le cercle C_i est une sphère. Par conséquent, toute conique plane ayant deux points à l'infini sur C_i est une circonférence de cercle.

Le plan à l'infini coupe notre surface cubique gauche suivant une courbe L_i de

3.^{e} ordre et 4.^{e} classe, ayant un point double à l'intersection de la droite double. La courbe L_i rencontre le cercle imaginaire C_i en six points imaginaires situés, deux à deux, sur trois droites réelles. Soit R une de ces droites; soient ω, ω' les points (imaginaires) où elle rencontre simultanément C_i et L_i; r le troisième point (réel) où R coupe la cubique L_i. La génératrice de la surface Σ qui aboutit en r détermine, avec R, un plan tangent à la surface; ce plan coupe évidemment Σ suivant une conique dont les points a l'infini sont ω, ω', c'est-à-dire, suivant un cercle. De même pour les deux autres droites analogues à R, donc:

Parmi les coniques planes inscrites dans une surface gauche du 3.^{e} degré il y a trois cercles.

Ces cercles se réduisent à *deux* seulement, lorsque le plan à l'infini est lui-même tangent à la surface, c'est-à-dire, lorsque la surface a une génératrice à l'infini.

8. Autre question: par une génératrice donnée de la surface cubique gauche peut-on mener un plan qui coupe la surface suivant une hyperbole équilatère?

L'hyperbole équilatère est une conique dont les points à l'infini sont conjugués harmoniques par rapport au cercle imaginaire C_i.

Soit a le point où la génératrice donnée rencontre le plan à l'infini. La question revient donc à la suivante: Par un point donné a d'une cubique L_i mener une droite qui rencontre L_i et une conique donnée C_i en quatre points harmoniques. Ce problème admet, comme on sait, trois solutions; donc:

Par toute génératrice d'une surface gauche cubique on peut mener trois plans qui coupent la surface suivant des hyperboles équilatères.

9. Considérons maintenant les plans qui coupent la surface Σ suivant des paraboles.

Toute droite ab, à l'infini, qui soit tangente à la cubique L_i en un point a, rencontre cette courbe en un autre point b. La génératrice de Σ, aboutissant à b, détermine, avec la droite ab, un plan qui coupe la surface suivant une conique tangente en a à la droite ab, c'est-à-dire, suivant une parabole; car une parabole n'est autre chose qu'une conique ayant une tangente à l'infini.

Par chaque point d'une courbe plane de 3.^{e} ordre et 4.^{e} classe, telle que L_i, on peut mener deux droites qui touchent la courbe en d'autres points. Ainsi *par toute génératrice de la surface gauche cubique on peut, en général, mener deux plans qui coupent la surface suivant des paraboles;* je les nommerai *plans paraboliques.*

Tous les plans paraboliques enveloppent une développable de 4.^{e} classe et 6.^{e} ordre, circonscrite à la surface donnée suivant une courbe gauche de 6.^{e} ordre.

10. Toutes les coniques inscrites dans la surface Σ et situées dans des plans menés par une même génératrice ont un point commun: c'est le point où la génératrice s'appuie sur la droite double. Par tout autre point de la génératrice passe une seule conique inscrite, dont le plan touche la surface en ce point.

Les deux plans paraboliques (et par conséquent leurs points de contact) passant par une même génératrice donnée peuvent être réels, imaginaires ou coïncidents.

Dans le premier cas, les points de contact des deux plans paraboliques déterminent un segment fini sur la génératrice donnée; tous les points de ce segment sont les points de contact pour des plans tangents qui coupent la surface suivant des ellipses *(plans elliptiques)*; tandis que tous les autres points de la génératrice sont les points de contact pour des plans qui coupent la surface suivant des hyperboles *(plans hyperboliques)*.

Dans le deuxième cas, tous les plans menés par la génératrice donnée coupent la surface suivant des hyperboles.

Dans le dernier cas, à l'exception d'un seul plan parabolique, tous les plans menés par la génératrice donnent des hyperboles.

Il est superflu d'observer qu'ici on ne considère pas les deux plans tangents qu'on peut faire passer par la génératrice donnée et par l'une ou l'autre directrice rectiligne de la surface.

11. Le point double d'une cubique plane de la 4.^{e} classe peut être ou un *point isolé (conjugué)*, ou un *node*. Dans le premier cas, tout point de la courbe est l'intersection de deux droites réelles et distinctes qui touchent la courbe en d'autres points. Dans le deuxième cas, le point nodal divise la courbe en deux parties; l'une de ces parties contient le point (réel) d'inflexion. Par chaque point de cette partie (et par aucun des points de l'autre) on peut mener deux droites réelles qui touchent la courbe ailleurs.

La cubique L_i a un node ou un point isolé suivant que le point à l'infini de la droite double est l'intersection de deux génératrices réelles ou imaginaires. En appliquant ces considérations aux divers cas offerts par les surfaces gauches du 3.^{e} degré, on obtient les résultats qui suivent.

1.^{o} *Surface gauche du 3.^{e} degré avec deux points cuspidaux réels.* Ici il faut distinguer deux cas possibles. Nommons a, b les points cuspidaux.

a) Dans chaque point du segment fini ab (et dans aucun autre point de la droite double) se croisent deux génératrices réelles. Dans ce cas, par chaque génératrice de la surface passent deux plans paraboliques réels.

b) Les génératrices réelles se croisent, deux à deux, *exclusivement* sur les deux segments infinis de la droite double, dont l'un commence en a, et l'autre en b. Dans ce cas, par toute génératrice appuyée sur l'un des segments infinis, passent deux plans paraboliques réels; tandis que tous les plans menés par les génératrices appuyées sur l'autre segment infini sont hyperboliques. Dans ce même cas, il y a deux génératrices (réelles) parallèles à la droite double; par chacune de ces deux génératrices passe un seul plan parabolique.

2.° *Surface gauche du 3.^{e} degré sans points cuspidaux réels.* Tout point de la droite double est l'intersection de deux génératrices réelles: deux plans paraboliques réels passent par l'une d'elles, aucun par l'autre. Il y a, aussi dans ce cas, deux génératrices (réelles) parallèles à la droite double; par chacune de ces génératrices passe un seul plan parabolique.

Voilà les seuls cas possibles de la surface gauche cubique *générale,* c. a. d. de celle qui a deux directrices rectilignes distinctes. Venons maintenant au cas particulier de M. Cayley.

3.° *Surface gauche du 3.^{e} degré avec un seul point cuspidal.* La droite double, dans chacun de ses points, est rencontrée par une génératrice (réelle). Le point cuspidal divise la droite double en deux segments infinis. Deux plans paraboliques réels passent par toute génératrice appuyée sur l'un de ces segments; aucun par les génératrices appuyées sur l'autre segment. Il y a une génératrice parallèle à la droite double: par cette génératrice passe un seul plan parabolique.

Il serait maintenant bien facile d'établir les modifications que ces résultats subissent dans les cas où le plan à l'infini aurait une position particulière par rapport à la surface; j'en laisse le soin au lecteur.

Bologne, 1.^{er} septembre 1861.