38.

NOTE SUR LES CUBIQUES GAUCHES.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 60 (1862), pp. 188-192.

Une cubique gauche est déterminée par six conditions. Je me propose, dans cette *Note*, de construire une cubique gauche, lorsque les conditions données consistent en des points par lesquels elle doit passer, ou en des droites qui doivent rencontrer deux fois la courbe.

A cause de la réciprocité de ces courbes, on pourra en déduire la construction de la cubique gauche, si l'on donne des plans osculateurs ou des droites intersections de deux plans osculateurs.

Problème 1er. *Construire la cubique gauche qui passe par six points donnés.*

Ce problème a été déjà résolu, de différentes manières, par MM. SEYDEWITZ*) et CHASLES**).

Problème 2d. *Construire la cubique gauche qui passe par cinq points donnés, et qui rencontre deux fois une droite donnée.*

La courbe, dont il s'agit, est l'intersection des deux cônes (de second degré) qui contiennent les points donnés et la droite donnée. Le problème de construire les sommets de ces cônes (ce qui suffit pour réduire la question actuelle à la précédente) a été résolu par M. HESSE***).

Problème 3o. *Construire la cubique gauche qui passe par quatre points donnés et qui rencontre deux fois deux droites données.*

Si par les points et par les droites donnés on peut faire passer un hyperboloïde, le problème est indéterminé; car il y a un nombre infini de cubiques gauches situées

*) *Archiv der Mathematik und Physik,* X. Theil, S. 208.

**) *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (Institut de France); 10 août 1857.

***) *Journal für die reine und ang. Mathematik,* XXVI Band, S. 147.

sur un hyperboloïde donné et passant par quatre points fixes de cette surface. Dans le cas contraire, il y a impossibilité.

Problème 4^e. *Construire la courbe gauche qui passe par trois points donnés a, b, c et qui coupe deux fois trois droites données* A, B, C.

Les droites A, B et les points a, b, c déterminent un hyperboloïde I; de même, les droites A, C avec les points a, b, c donnent un autre hyperboloïde J; et la courbe demandée est l'intersection de ces deux hyperboloïdes. On peut la construire *par points*, de la manière qui suit. Soient p', q', r' les points où B rencontre les plans $A(a, b, c)$; et soient p, q, r les points que les droites ap', bq', cr' marquent sur A. Les paires de points p, p'; q, q'; r, r' déterminent, sur A, B, deux divisions homographiques; et les droites qui en joignent les points correspondants sont des génératrices de l'hyperboloïde I. — De même, les points a, b, c donnent lieu à deux divisions homographiques sur A, C; et les droites qui en joignent les points homologues appartiennent à l'hyperboloïde J.

Menons par A un plan quelconque qui rencontre B en m' et C en n''. Soient: m le point de A qui correspond à m'; et n le point de A qui correspond à n''. Le point où se coupent les droites mm', nn'' appartient évidemment à la cubique gauche demandée.

Problème 5^e. *Construire la cubique gauche qui passe par deux points donnés o, o' et qui s'appuie deux fois sur quatre droites fixes* A, B, C, D.

Prenons les points o, o' comme centres de deux faisceaux homographiques [7], en menant quatre paires de plans homologues par les quatre droites données, respectivement. Tout plan passant par oo' contient deux rayons correspondants; le point de leur intersection est sur la courbe demandée.

Autrement. Soit I l'hyperboloïde qui passe par la cubique gauche et par les droites A, B; et soit J l'hyperboloïde contenant la cubique et les droites C, D. Les hyperboloïdes I, J auront nécessairement une génératrice commune, que nous allons déterminer. Les deux plans oA, oB s'entrecoupent suivant une droite génératrice de I; et l'intersection des plans oC, oD est une génératrice de J. Soit P le plan de ces deux génératrices. De même, on déduit un plan P', du point o'; et il est bien évident que la droite, qu'on cherche à déterminer, est l'intersection des plans P, P'. Ensuite, on construit la cubique gauche, *par points*, au moyen d'un plan mobile autour de PP'.

Problème 6^e. *Construire la cubique gauche qui passe par un point o et qui s'appuie* [11] *sur cinq droites données* A, B, C, D, E*).

Prenons un point o' sur E, et supposons qu'on cherche à construire la cubique gauche qui passe par o, o' et qui est coupée deux fois par les droites A, B, C, D. Dans ce but

*) J'ai donné autre part (tome LVIII de ce journal) [Queste Opere, n. 24 (t. 1.^{o})] la construction d'*une* des cubiques gauches (en nombre infini) qui s'appuient[11] sur cinq droites données.

(prob. 5^e, deuxième solution), je conçois les deux droites, dont l'une est l'intersection des plans oA, oB et l'autre est l'intersection des plans oC, oD ; ces deux droites déterminent un plan (fixe) P. De même, on obtient un plan (variable avec o') P' déterminé par deux droites, dont l'une est l'intersection des plans $o'A$, $o'B$, et l'autre est l'intersection des plans $o'C$ et $o'D$.

Le plan P' est tangent aux hyperboloïdes ABE et CDE, qui ont la droite commune E; donc, si o' parcourt E, le plan P' oscule une cubique gauche K, dont les plans osculateurs sont les plans tangens communs aux hyperboloïdes nommés.

La droite PP' avec A, B détermine un hyperboloïde contenant la cubique gauche qui doit passer par o, o' et s'appuyer deux fois sur A, B, C, D. Donc, si l'on veut obtenir la cubique gauche qui passe par o et s'appuie deux fois sur A, B, C, D, E, il faut chercher dans le plan P une droite L qui soit l'intersection de deux plans osculateurs de K; ces plans marqueront sur E deux points de la courbe demandée. Ainsi, notre problème dépend de cet autre, qui admet (comme on le sait bien) toujours une seule solution:

Trouver, dans le plan P, *la droite* L *qui est l'intersection de deux plans osculateurs de la cubique gauche* K, c'est-à-dire *l'intersection de deux plans tangens communs aux hyperboloïdes* ABE, CDE.

Commençons par construire un plan osculateur quelconque de K. Il suffit de mener par un point quelconque de E deux droites, dont l'une rencontre A, B et l'autre rencontre C, D. Le plan de ces deux droites est évidemment tangent aux deux hyperboloïdes, et, par conséquent, il est osculateur de la courbe K.

Je suppose qu'on ait construit, de cette manière, cinq plans osculateurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ de K. Cela posé, on doit chercher, dans le plan P, une droite L telle, que le système de points $L(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ soit homographique au système $E(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$. Concevons la conique qui est tangente aux quatre droites $P(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ et capable du rapport anharmonique $E(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$; et concevons l'autre conique qui est tangente aux droites $P(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ et capable du rapport anharmonique $E(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$. Ces coniques, inscrites au même triangle formé par les droites $P(\alpha, \beta, \gamma)$, auront une quatrième tangente commune, qu'on sait construire, par la seule règle, sans recourir au tracé actuel des coniques. Cette quatrième tangente commune est évidemment la droite L qu'on demandait.

Observons, enfin, que les points $A(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, $B(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ forment deux divisions homographiques; donc les plans menés par ces points et par la droite L forment, autour de celle-ci, deux faisceaux homographiques. Les plans doubles de ces faisceaux sont les plans osculateurs de K qui résolvent le problème 6^e.

Problème 7^e. *Construire la cubique gauche qui s'appuie deux fois sur six droites données* A, B, C, D, E, F.

Je suppose d'abord qu'on demande de construire la cubique gauche appuyée [11] sur les droites A, B, C, D, E et passant par un point quelconque o de F. Menons par o la droite qui s'appuie sur A, B, et la droite qui s'appuie sur C, D; ces deux droites déterminent un plan P. Ce plan P contient une droite qui est l'intersection de deux plans tangens communs aux hyperboloïdes ABE, CDE (prob. 6e); ces deux plans tangens marquent sur E deux points de la cubique qui doit couper deux fois les cinq droites A, ..., E et passer par o.

Si l'on fait varier o sur F, le plan P enveloppe la développable formée par les plans tangens communs aux hyperboloïdes ABF, CDF. Soit H la cubique gauche arête de rebroussement (courbe cuspidale) de cette développable; de même, soit K la cubique gauche osculée par les plans tangens communs aux hyperboloïdes ABE, CDE.

Cela posé, il faut trouver une droite L qui soit l'intersection de deux plans osculateurs de H et de deux plans osculateurs de K. Ces derniers plans rencontrent E en deux points; les plans osculateurs de H déterminent sur F deux autres points. Ces quatre points appartiennent à la cubique gauche demandée dans le problème 7e.

La question: *trouver une droite qui soit l'intersection de deux plans osculateurs de* H *et de deux plans osculateurs de* K admet, en général, *dix* solutions. Mais ici il faut en rejeter quatre, qui répondent aux droites A, B, C, D. En effet, soit o l'un des points où la cubique demandée coupe la droite F; si le plan osculateur mené du point o à la courbe H devait contenir, par exemple, la droite A, il faudrait que o appartînt à l'hyperboloïde ACD, et par conséquent il faudrait que cette surface passât par la cubique demandée. Ce qui est généralement impossible, car, si un hyperboloïde doit passer par une cubique gauche et par *deux* cordes de cette courbe, l'hyperboloïde est complètement déterminé: donc il ne contiendra pas une troisième corde donnée *à priori*. Et si les droites A, C, D appartenaient à un même hyperboloïde passant par la cubique gauche, celle-ci devrait contenir les six points où l'hyperboloïde est percé par les droites B, E, F; ce qui est encore impossible, car une cubique gauche située sur un hyperboloïde donné *à priori* est déterminée par cinq points de cette surface.

Concluons donc que notre problème admet au plus *six* solutions.

J'ai affirmé qu'il y a *dix* droites, dont chacune est l'intersection de deux plans osculateurs de H et de deux plans osculateurs de K. Je justifierai à présent cette assertion; ou plutôt, je démontrerai le théorème corrélatif:

Deux cubiques gauches H, K, *qui n'ont pas de points communs, admettent dix cordes communes.* (J'appelle *corde commune* toute droite qui coupe en deux points réels ou imaginaires chacune des deux cubiques.)

Supposons que la cubique gauche K soit le système d'une conique plane C et d'une droite R ayant un point commun avec C. Les cordes de la cubique gauche H qui rencontrent R forment une surface du quatrième ordre, pour laquelle R est une droite simple, et H est une courbe double (de striction). Cette surface est rencontrée par la conique C en sept points, en faisant abstraction du point où R s'appuie sur C. Donc il y a *sept* droites qui rencontrent deux fois H, une fois R et une fois C.

La cubique gauche H est coupée par le plan de C en trois points, qui joints deux à deux donnent trois cordes de H. Donc il y a *trois* droites qui rencontrent deux fois H et deux fois C.

Il y a donc *dix* droites qui rencontrent deux fois H et deux fois le système $C+R$. J'en conclus que le théorème est vrai aussi pour deux cubiques gauches, proprement dites, H, K.

Si les cubiques gauches H, K ont un point commun, il y a quatre cordes communes qui passent par ce point.

Si H, K ont deux points communs a, b, la droite ab est une corde commune; en outre, par chacun de ces points passent trois cordes communes.

Si H, K ont trois points communs a, b, c les droites bc, ca, ab sont des cordes communes; en outre, par chacun de ces points passent deux cordes communes.

Enfin, si H, K ont quatre points communs, les six droites qui les joignent deux à deux sont des cordes communes; de plus, par chacun de ces points passe une quatrième corde commune. Les cubiques n'ont pas, en général, d'autres cordes communes. Mais s'il y avait encore une autre corde commune, il y en aurait un nombre infini, car dans ce cas les deux courbes gauches seraient situées sur la surface d'un même hyperboloïde.

Concluons donc que, si deux cubiques gauches, non situées sur un même hyperboloïde, ont 1, 2, 3, 4 points communs, il y a 6, 3, 1, 0 cordes communes qui ne passent pas par ces points.

On démontre aisément aussi le théorème général:

Etant données deux courbes gauches des ordres m, m', avec a, a' points doubles apparens), respectivement, le nombre total des cordes communes à ces courbes est, en général,* $\frac{mm'(m-1)(m'-1)}{4}+aa'$. *Et si les courbes données ont r points communs, le nombre des cordes communes qui ne passent pas par ces points est*

$$\frac{(m-1)(m'-1)(mm'-4r)}{4}+aa'+\frac{r(r-1)}{2}.$$

*) Si par un point quelconque dans l'espace on peut mener a droites qui rencontrent deux fois une courbe gauche donnée, on dit, d'après MM. Cayley et Salmon, que cette courbe a un nombre a de points doubles *apparens*.

Bologne, le 24 juin 1861.