37.

MÉMOIRE DE GÉOMÉTRIE PURE SUR LES CUBIQUES GAUCHES.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 2.e série, tome I (1862), pp. 287-304, 366-378, 436-446.

Parmi les courbes géométriques à double courbure, la plus simple est la courbe du troisième ordre ou *cubique gauche,* qui est l'intersection de deux hyperboloïdes à une nappe ayant une génératrice droite commune. C'est, je crois, M. Möbius qui s'occupa le premier de cette courbe. Dans son ouvrage classique, *Der barycentrische Calcul* (Leipzig, 1827), il donna une représentation analytique, très-simple et très-heureuse, de la cubique gauche, et démontra le théorème fondamental: "Une tangente mobile de cette courbe décrit, sur un plan osculateur fixe, une conique. „.

En 1837, M. Chasles, dans la note XXXIII de son admirable *Aperçu historique,* énonça plusieurs propriétés de la cubique gauche; les plus essentielles sont:

" 1.° Le lieu géométrique des sommets des cônes du second degré, qui passent tous par six points donnés dans l'espace, renferme la cubique gauche déterminée par ces six points.

" 2.° Les tangentes aux différents points d'une cubique gauche forment une surface développable du quatrième ordre.

" 3.° Une propriété de sept points d'une cubique gauche „. [6]

Le tome X du *Journal de M.* Liouville (1845) contient un Mémoire de M. Cayley, qui est d'une extrême importance; il y donne les relations qui ont lieu entre l'ordre d'une courbe gauche, la classe et l'ordre de sa développable osculatrice, le nombre des points et des plans osculateurs stationnaires, le nombre des droites qui passent par un point donné et s'appuient deux fois sur la courbe, etc. Ensuite, l'illustre auteur fait l'application de ses formules à la courbe gauche du troisième ordre, et trouve que:

" 1.° La développable osculatrice d'une telle courbe est du quatrième ordre et de la troisième classe.

" 2.° Par un point quelconque de l'espace on peut mener *une* droite qui s'appuie deux fois sur la courbe, et un plan quelconque contient *une* droite qui est l'intersection de deux plans osculateurs ".

M. Seydewitz, dans un Mémoire très-intéressant qui fait partie de l'*Archiv der Mathematik und Physik* *), a trouvé et démontré, par la pure géométrie, que la cubique gauche est le lieu du point de rencontre de deux droites homologues dans deux faisceaux homographiques de rayons dans l'espace [7]. Il en a déduit la construction de la courbe par points, des tangentes et des plans osculateurs, et cette autre propriété, déjà donnée par M. Chasles, que chaque point de la cubique gauche est le sommet d'un cône du second degré passant par la courbe.

L'auteur appelle la courbe gauche du troisième ordre, *conique gauche (räumlicher Kegelschnitt)*; et, en classant ces courbes selon leurs asymptotes, il propose les noms, que j'ai adoptés, d'*hyperbole gauche* pour la cubique qui a trois asymptotes réelles et distinctes; d'*ellipse gauche* pour la cubique qui a une seule asymptote réelle, les deux autres étant imaginaires; d'*hyperbole parabolique gauche* pour la cubique qui a une asymptote réelle, et les deux autres coïncidentes à l'infini; enfin, de *parabole gauche* pour la cubique qui a un plan osculateur à l'infini.

Dans un beau Mémoire de M. Salmon, *On the classification of curves of double curvature* **), que je connais seulement depuis peu, on lit que: " Une cubique gauche tracée sur une surface (réglée) du second ordre rencontre en deux points toutes les génératrices d'un même système de génération, et en un seul point toutes les génératrices du deuxième système.

Mais il était réservé à l'illustre auteur de la *Géométrie supérieure* de donner la plus puissante impulsion à la doctrine de ces courbes. Dans une communication à l'Académie des Sciences ***), M. Chasles, avec cette merveilleuse fécondité qui lui est propre, énonça (sans démonstration) un grand nombre de propositions, qui constituent une vraie théorie des cubiques gauches. On y trouve notamment:

1.° La génération de la courbe au moyen de deux faisceaux homographiques de rayons dans l'espace [7], déjà donnée par M. Seydewitz.

2.° La génération de la courbe par trois faisceaux homographiques de plans. Ce théorème est d'une extrême importance; on peut en déduire tous les autres, et il forme la base la plus naturelle d'une théorie géométrique des cubiques gauches.

3.° Le théorème: " Par un point donné on ne peut mener que trois plans oscu-

*) X^er^ *Theil*, 2^es^ *Heft; Greifswald*, 1847.

**) *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, vol. V. Cambridge, 1850.

***) *Compte rendu* du 10 août 1857; voir aussi le *Journal de M.* Liouville, novembre 1857.

lateurs à la cubique gauche; les points de contact de ces trois plans avec la courbe sont dans un plan passant par le point donné „. Ce théorème établit la parfaite réciprocité polaire entre la cubique gauche et sa développable osculatrice; ainsi, ces courbes sont destinées à jouer, dans l'espace, le même rôle que les lignes du second ordre dans le plan.

4.° Le théorème de M. Möbius, et un théorème plus général sur la nature d'une section plane quelconque de la développable osculatrice de la cubique gauche.

5.° Les belles propriétés des hyperboloïdes passant par la courbe, etc.

Dans un Mémoire inséré au tome 1er des *Annali di Matematica pura ed applicata* (Roma, 1858) [Queste Opere, n. **9** (t. 1.°)] j'ai démontré, par l'analyse *), les théorèmes les plus importants du travail cité de M. Chasles, et outre cela j'ai donné quelques propositions nouvelles, notamment celle qui constitue la base de la théorie des *plans conjoints* que j'ai développée peu après **).

Alors parut, dans le *Journal mathématique de Berlin*, un Mémoire de M. Schröter. L'auteur y démontre, par la géométrie pure et avec beaucoup d'habileté, les théorèmes fondamentaux de MM. Möbius, Seydewitz et Chasles; surtout il met en évidence l'identité des courbes gauches du troisième ordre et de la troisième classe. M. Schröter fait observer que quatre points de la cubique gauche et les quatre plans osculateurs correspondants forment deux tétraèdres, dont chacun est, en même temps, inscrit et circonscrit à l'autre; ce qui se rattache à une question ancienne posée par M. Möbius ***).

Quiconque veut aborder l'étude *géométrique* des cubiques gauches doit lire l'important travail de M. Schröter †).

Ensuite, dans une courte Note, insérée au tome II des *Annali di Matematica* (luglio-agosto 1859) [Queste Opere, n. **12** (t. 1.°)], et dans un Mémoire qui fait partie du tome LVIII du *Journal mathématique de Berlin* (publié par M. Borchardt, en continuation du *Journal de* Crelle) [Queste Opere, n. **24** (t. 1.°)], j'ai donné d'autres théorèmes sur les mêmes courbes, et particulièrement j'ai étudié la distribution des coniques inscrites dans une surface développable de la troisième classe.

Le Mémoire actuel contient aussi quelques propositions nouvelles; cependant mon

---

*) Je me suis servi d'une représentation analytique de la courbe qui revient au fond à celle de M. Möbius. Mais je ne connassais pas alors l'ouvrage capital (si peu connu en Italie) de l'éminent géomètre allemand, ni le Mémoire de M. Seydewitz non plus. Ce sont les citations de M. Schröter qui me firent chercher le *Barycentrische Calcul* et l'*Archiv* de M. Grunert. A présent je restitue *unicuique suum*.

) *Annali di Matematica*, t. II, Roma, gennaio-febbraio 1859, § 11 [Queste Opere, n. **10 (t. 1.°)].

***) *Journal für die reine und ang. Mathematik,* 3r Band, pag. 273.

†) *Journal für die reine und ang. Mathematik,* 56r Band, pag. 27.

but essentiel est de démontrer *géométriquement* les propriétés que j'ai déjà énoncées, avec des démonstrations analytiques ou sans démonstrations, dans mes écrits précédents, et qui se rapportent à la théorie des *plans conjoints* et des *coniques inscrites* dans la développable osculatrice de la cubique gauche.

Je supposerai que le lecteur connaisse les Mémoires, cités ci-dessus, de MM. Chasles et Schröter.

Points conjoints, plans conjoints et droites associées.

1. Si l'on coupe une cubique gauche par un plan arbitraire P, les trois points d'intersection a, b, c forment un triangle inscrit à toutes les coniques, suivant lesquelles le plan P coupe les cônes du second degré qui passent par *(perspectifs à)* la cubique. Deux quelconques de ces cônes ont une génératrice commune qui perce le plan donné en un point d, de manière que les coniques bases des deux cônes sur P sont circonscrites au tétragone $abcd$. On voit sans peine que la conique base d'un troisième cône quelconque, perspectif à la courbe gauche, ne passe pas par d, mais par a, b, c seulement.

2. Je conçois maintenant un point o dans l'espace, et la droite qui passe par o et s'appuie en deux points (réels ou imaginaires) a et b sur la cubique gauche. Menons par cette droite un plan quelconque P; ce plan rencontrera la cubique en un troisième point c, et un cône quelconque S perspectif à la cubique suivant une conique K circonscrite au triangle abc. La trace sur P du plan polaire de o par rapport au cône S est la droite polaire de o par rapport à K; donc cette trace passe par o', pourvu que o, o' soient conjugués harmoniquement avec a, b. Le point o' est indépendant du cône S; donc les plans polaires de o, par rapport aux cônes perspectifs à la cubique, passent tous par o' [8]. Cherchons à connaître la *classe* de la surface conique enveloppée par ces plans.

Soit d la deuxième intersection de la conique K par la droite oc; le tétragone $abcd$ est évidemment inscrit aussi à la conique K', base du cône S' (du second ordre, perspectif à la cubique), dont le sommet est sur la droite qui joint d au sommet de S. Donc le point o a la même polaire $o'ef$ par rapport aux coniques K, K'. Cette droite ne peut pas être la polaire de o par rapport à la conique base d'un troisième cône, car il n'y a pas d'autre conique (perspective à la cubique gauche) passant par a, b, c, d. Par conséquent, $o'ef$, c'est-à-dire une droite quelconque menée par o', est l'intersection des plans polaires de o par rapport à *deux* cônes seulement; nous avons ainsi le théorème :

Les plans polaires d'un point donné o, par rapport à tous les cônes de second degré *perspectifs à une cubique gauche, enveloppent un autre cône du second degré, dont le sommet o' est situé sur la droite qui passe par o et s'appuie sur la cubique en deux points (réels ou imaginaires) a et b. Les points o, o' sont conjugués harmoniquement avec les points a, b.*

Il suit de la dernière partie du théorème, que:

Les plans polaires du point o', par rapport aux mêmes cônes perspectifs à la cubique, enveloppent un autre cône du second degré, dont le sommet est le point o *).

J'ai nommé *points conjoints* deux points tels que o, o', et *cônes conjoints* les cônes dont o, o' sont les sommets. Donc:

La droite qui joint deux points conjoints o, o' est toujours une corde (réelle ou idéale) de la cubique gauche. Et le segment oo' est divisé harmoniquement par la courbe.

Chaque point de la droite oo' aura son conjoint sur cette même droite; donc:

Toute corde de la cubique gauche est l'axe d'une involution de points (conjoints par couples), dont les points doubles sont sur la cubique **). [9]

3. On sait, d'après M. CHASLES ***), que la cubique gauche donne lieu à un genre intéressant de dualité. Tout point o, donné dans l'espace, est l'intersection de trois plans osculateurs de la courbe; et les trois points de contact sont dans un plan O passant par le point donné.

Réciproquement, tout plan O rencontre la cubique gauche en trois points; et les plans osculateurs en ces points passent par un point o du plan donné.

Ainsi, à chaque point o correspond un plan O, et *viceversa*. J'ai nommé le point o *foyer* de son plan focal O. Un plan passe toujours par son foyer.

Si le foyer parcourt une droite, le plan focale tourne autour d'une autre droite, et si le foyer parcourt la deuxième droite, le plan passe toujours par la première. On nomme ces droites *réciproques*.

De plus, j'appelle *focale* d'un point o la corde de la cubique gauche qui passe par o; et *directrice* d'un plan O la droite qui existe dans ce plan et qui est l'intersection de deux plans osculateurs, réels ou imaginaires. La directrice d'un plan et la focale du foyer de ce plan sont deux droites réciproques †).

En conséquence de cette dualité, les théorèmes démontrés ci-dessus donnent les suivants:

Les pôles d'un plan donné O, par rapport à toutes les coniques inscrites dans la développable (de la troisième classe et du quatrième ordre) osculatrice d'une cubique gauche,

*) *Annali di Matematica*, t. II, § 11. Roma, gennaio-febbraio 1859.

**) *Annali, etc.... ut supra*, § 5, 6, 7.

***) *Compte rendu* du 10 août 1857, § 40, 41 et 48.

†) *Annali, etc.... ut supra*, § 2, 3, 7, 8.

sont sur une autre conique. Le plan O' *de cette conique rencontre le plan* O *suivant une droite, qui est l'intersection de deux plans osculateurs (réels ou non) de la cubique.*

Ces deux plans osculateurs divisent harmoniquement l'angle des plans O, O'.

Et les pôles du plan O', *par rapport aux mêmes coniques inscrites, sont sur une autre conique située dans le plan* O *).

J'ai nommé ces plans *conjoints,* et je dis *conjointes* aussi le coniques locales situées dans ces plans.

Deux plans conjoints s'entrecoupent toujours suivant une droite qui est l'intersection de deux plans osculateurs (réels ou non) de la cubique gauche. Les plans conjoints et les plans osculateurs forment un faisceau harmonique.

Toute droite qui est l'intersection de deux plans osculateurs de la cubique gauche est l'axe d'une infinité de couples de plans conjoints en involution. Les plans doubles de cette involution sont les deux plans osculateurs **).

On peut démontrer directement ces théorèmes avec la même facilité que les propriétés relatives aux points conjoints (2).

Si une droite s'appuie sur la cubique gauche en deux points, sa réciproque est l'intersection des plans osculateurs en ces points; donc:

Deux points conjoints sont les foyers de deux plans conjoints, et, réciproquement, deux plans conjoints sont les plans focaux de deux points conjoints.

Toute droite qui s'appuie sur la cubique gauche en deux points contient les foyers d'une infinité de couples de plans conjoints, qui passent tous par une même droite. Cette droite est l'intersection des plans osculateurs aux points où la courbe est rencontrée par la droite donnée.

Par une droite qui est l'intersection de deux plans osculateurs de la cubique gauche, passent les plans focaux d'une infinité de couples de points conjoints, situés sur la droite qui joint les points de contact des deux plans osculateurs ***).

Si, au lieu de l'intersection de deux plans osculateurs distincts, on prend une tangente de la cubique gauche, tout plan (tangent) mené par cette droite a pour conjoint le plan osculateur qui passe par la même tangente. Et le lieu des pôles du plan tangent, par rapport aux coniques inscrites dans la développable osculatrice, est une conique qui a un double contact avec la conique *inscrite* située dans le plan osculateur (conjoint au plan tangent).

De même, tout point donné sur une tangente de la cubique gauche a pour conjoint le point de contact, et l'enveloppe des plans polaires du point donné, par rapport aux

*) *Annali di Matematica,* t. I, § 7, settembre-ottobre 1858; t. II, § 5, 7, gennaio-febbraio 1859.

**) *Annali di Matematica,* t. II, § 7, gennaio-febbraio 1859.

***) *Annali di Matematica,* t. II, § 11, 6, gennaio-febbraio 1859.

cônes du second degré perspectifs à la cubique, est un autre cône du second degré, qui est doublement tangent au cône perspectif dont le sommet est le point de contact de la droite tangente avec la courbe gauche.

4. Un point quelconque o, donné dans l'espace, est le sommet d'un cône du troisième ordre et de la quatrième classe, qui passe par la cubique gauche. La droite focale de o est la génératrice double du cône; les plans osculateurs menés par o sont ses plans stationnaires. Les génératrices de contact de ces plans, c'est-à-dire les génératrices d'inflexion, sont dans un même plan, qui est le plan *focal* de o *).

Or, par un théorème connu sur les courbes planes **), ce plan focal est le plan polaire de la génératrice double, par rapport au trièdre formé par les plans stationnaires; donc:

La focale d'un point donné, par rapport à une cubique gauche, est la polaire du plan focal de ce point, par rapport au trièdre formé par les plans osculateurs de la cubique menés du point donné.

D'où, par le principe de dualité, on conclut que:

La directrice d'un plan donné, par rapport à une cubique gauche, est la polaire du foyer de ce plan, par rapport au triangle formé par les points où la cubique est rencontrée par le plan donné ***).

Soit O un plan donné; o son foyer; a, b, c, les points d'intersection de la cubique par ce plan. Les droites ao, bo, co seront les traces, sur O, des plans osculateurs aux points a, b, c. Soient λ, μ, ν, les points où ao, bo, co rencontrent bc, ca, ab respectivement; α, β, γ les points d'intersection de bc et $\mu\nu$, de ca et $\nu\lambda$, de ab et $\lambda\mu$. Les points α, β, γ seront sur une ligne droite, qui est la polaire harmonique de o par rapport au triangle abc, c'est-à-dire qu'elle est la *directrice* du plan O.

5. Une droite, telle que ao, qui passe par un point de la cubique gauche, et qui est située dans le plan osculateur correspondant, a des propriétés remarquables. Avant tout, elle est réciproque d'elle-même; d'où il suit que tout plan mené par une telle droite a son foyer sur la même droite.

Soit A la droite tangente à la cubique en a. La droite ao rencontrera A et une autre tangente A' de la cubique; soit a' le point de contact. Si l'on veut trouver A', a', il suffit de concevoir l'hyperboloïde passant par la cubique gauche et par ao. Il est évident que cet hyperboloïde contient A; donc il contiendra une autre tangente †);

*) *Compte rendu* du 10 août 1857, § 17, 18. — *Annali di Matematica*, t. I, § 6, maggio-giugno 1858.

**) Salmon, *Higher plane curves*, pag. 171. Dublin, 1852.

***) *Annali di Matematica*, t. II, § 3, gennaio-febbraio 1859.

†) *Compte rendu, etc.*, u. s., § 23.

c'est A'. Les génératrices de cette surface, dans le système auquel appartient A, s'appuient sur la cubique gauche, chacune en deux points; ces couples de points forment une involution, dont a, a' sont les points doubles *).

Si u, v, w sont trois points donnés de la cubique gauche, l'hyperboloïde, dont il s'agit, est engendré par les faisceaux homographiques $A(u, v, w, ...)$, $A'(u, v, w .....)$. Dans ces faisceaux, au plan Aa' (tangent à la cubique en a et sécant en a') correspond le plan $A'a'$ (osculateur en a'); et au plan $A'a$ (tangent en a' et sécant en a) correspond le plan Aa (osculateur en a). Donc, l'hyperboloïde est touché, en a et a', par les plans osculateurs à la cubique; de plus, les génératrices, dans l'autre système, passant par a et a' sont la droite intersection des plans Aa, $A'a$ (c'est-à-dire ao), et la droite intersection des plans $A'a'$, Aa' (que nous désignerons par $a'o'$).

Donc, la droite ao détermine cette autre droite $a'o'$ qui, comme la première, passe par un point a' de la cubique et est située dans le plan osculateur correspondant. La première droite est l'intersection du plan osculateur en a par le plan sécant en a et tangent en a'; la deuxième droite est l'intersection du plan osculateur en a' par le plan sécant en a' et tangent en a. Ces deux droites et les droites tangentes en a, a' à la cubique forment un quadrilatère gauche (dont ao, $a'o'$ sont deux côtés opposés) qui est tout entier sur la surface d'un hyperboloïde passant par la cubique gauche, et qui appartient aussi (par le principe de dualité) à un autre hyperboloïde, inscrit dans la développable osculatrice de la cubique.

Nous pouvons donner à ces droites ao, $a'o'$, dont chacune détermine complètement l'autre, le nom de *droites associées.*

6. Chaque génératrice M de l'hyperboloïde passant par la courbe gauche, dans le système (A, A'), rencontre celle-ci en deux points i, j et les droites ao, $a'o'$ en deux autres points ω, ω'. Or, j'observe que les points de la cubique a, a'; i, j sont conjugués harmoniques, parce que a, a' sont les éléments doubles d'une involution, dont i, j sont deux éléments conjugués. Donc, si nous concevons une autre génératrice N du même hyperboloïde, dans le système (A, A', M), les plans $N(a, a', i, j)$ formeront un faisceaux harmonique. Mais ces plans sont percés par la droite M en ω, ω', i, j; donc la corde ij est divisée harmoniquement par ao, $a'o'$ en ω, ω'. Ainsi nous avons démontré ce théorème:

Si l'on se donne deux droites associées par rapport à la cubique gauche, chaque point de l'une a son conjoint sur l'autre; c'est-a-dire, toute corde de la cubique gauche qui rencontre l'une des deux droites associées rencontre aussi l'autre, et est divisée harmoniquement par les mêmes droites **).

*) *Compte rendu, etc.*, u. s., § 22. — *Annali di Matematica,* t. I, § 3, 18, maggio-giugno 1858.

**) *Journal für die reine und ang. Mathematik.* Band 58, § 14. Berlin, 1860.

On en conclut le théorème corrélatif:

Deux droites associées étant données, chaque plan passant par l'une a son conjoint qui passe par l'autre; c'est-à-dire, toute droite qui est l'intersection de deux plans osculateurs de la cubique gauche et qui rencontre l'une des deux droites associées, rencontre aussi l'autre, et détermine avec ces droites deux plans qui divisent harmoniquement l'angle des plans osculateurs.

7. Reprenons la construction du n. 4. La droite bc est une corde de la cubique gauche; elle est dans un même plan avec ao, donc elle rencontrera aussi $a'o'$ (associée à ao). Mais $a'o'$ doit être dans le plan O' conjoint au plan donné O; de plus, l'intersection des plans O, O' est la droite $\alpha\beta\gamma$; donc $a'o'$ passe par α. Soient a', b', c' les points où la cubique gauche est rencontrée par le plan O'; o' le foyer de O': $a'o', b'o', c'o'$ seront les droites associées à ao, bo, co respectivement, c'est-à-dire les traces, sur O', des plans osculateurs en a', b', c'. Il suit de ce qui précède, que les droites $a'o', b'o', c'o'$ rencontrent la *directrice* commune des plans O, O' en α, β, γ; d'où, par analogie, on conclut que ao, bo, co coupent cette même directrice aux points α', β', γ', où elle est rencontrée par $b'c', c'a', a'b'$. Les points $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ sont en involution, car ces points sont les intersections d'une même transversale par les six côtés du tétragone complet $abco$; donc:

Les six plans osculateurs, qu'on peut mener à la cubique gauche par deux points conjoints, rencontrent toute droite, qui est l'intersection de deux plans osculateurs, en six points en involution.

Et, par conséquent:

Les six points où la cubique gauche est rencontrée par deux plans conjoints sont en involution, c'est-à-dire que *les six plans menés par ces points et par une même corde de la cubique forment un faisceaux en involution* *).

Dans l'involution $\alpha, \alpha', \ldots, \gamma'$, les trois points α, β, γ sont suffisants pour déterminer α', β', γ'. En effet, par les propriétés connues du tétragone complet, α' est conjugué harmonique de α, par rapport à β, γ; β' est conjugué harmonique de β, par rapport à γ, α; et γ' est conjugué harmonique de γ, par rapport à α, β. De même, on peut dire que, sur la cubique gauche, a', b', c' sont conjugués harmoniques de a, b, c, par rapport à b, c; c, a; a, b, respectivement. Ainsi, il y a une parfaite correspondance entre le points a et a', b et b', c et c'.

Nous avons vu que $a'o'$ est l'intersection du plan osculateur en a' par le plan tangent en a et sécant en a'. Donc ce dernier plan passe par α, et sa trace sur le plan O est $a\alpha$. De même, $b\beta$ est la trace du plan tangent en b et sécant en b', et $c\gamma$ est la trace

*) *Annali di Matematica*, t. I, § 27, settembre-ottobre 1858.

du plan tangent en c et sécant en c'. Ces trois traces forment un triangle lmn homologique au triangle abc; le foyer o est le centre d'homologie, et la directrice $\alpha\beta\gamma$ est l'axe d'homologie.

8. La droite oo' est la focale de o et o', donc elle est une corde de la cubique gauche; soient i, j les points où oo' rencontre cette courbe; on a démontré que oo' est divisée harmoniquement par i, j (2). En conséquence, les quatre plans $bc(o, o', i, j)$ forment un faisceaux harmonique. Le premier de ces plans passe par a (c'est le plan O); le second passe par a', car bc et $a'o'$ sont dans un même plan (7); donc les points a, a', i, j forment, sur la cubique gauche, un système harmonique. Il en sera de même des points b, b', i, j, et des points c, c', i, j; donc i, j sont les points doubles de l'involution formée sur la cubique par les points a, a', b, b', c, c'.

Or, ces six points résultent des deux plans conjoints O, O'; donc si, par la même directrice $\alpha\beta\gamma$, on mène deux autres plans conjoints, nous aurons une autre involution de six points, qui aura les mêmes points doubles, car i, j dépendent de la droite $\alpha\beta\gamma$ seulement. Donc:

Une droite, intersection de deux plans osculateurs de la cubique gauche, est l'axe d'un faisceau de plans conjoints, deux à deux. Chaque couple de plans conjoints rencontre la cubique en six points en involution, et les involutions correspondantes à tous ces couples constituent une involution unique, car elles ont toutes les mêmes points doubles.

Une corde de la cubique gauche contient une infinité de points conjoints, deux à deux. Chaque couple de points conjoints donne six plans osculateurs en involution; les involutions correspondantes à tous ces couples constituent une involution unique, car elles ont toutes les mêmes plans doubles.

On sait d'ailleurs que, si on a sur la cubique gauche des couples de points en involution, la droite qui joint deux points conjugués engendre un hyperboloïde *); donc:

Dans un faisceau de plans conjoints menés par une même directrice, les droites qui joignent les points où chacun de ces plans rencontre la cubique gauche aux points correspondants dans le plan conjoint, forment un hyperboloïde passant par la courbe.

Dans un système de points conjoints situés sur une même corde de la cubique gauche, les droites intersections des plans osculateurs menés par chacun de ces points avec les plans osculateurs correspondants menés par le point conjoint, forment un hyperboloïde inscrit dans la développable osculatrice de la courbe gauche **).

9. Soient d, e, f, les points où ao, bo, co rencontrent les droites tangentes à la cubique gauche en a', b', c' respectivement. De même, soient d', e', f' les points où les

*) *Compte rendu, etc.*, u. s., § 21.

**) *Annali di Matematica,* t. II, § 10, 11, gennaio-febbraio 1859.

tangentes à la cubique en a, b, c percent le plan O'. Cherchons à determiner la conique qui existe dans le plan O, et qui est le lieu des pôles du plan O' par rapport aux coniques inscrites dans la développable osculatrice de la cubique (3). La conique inscrite, qui est dans le plan osculateur en a', passe évidemment par a' et d'; le point de concours des tangentes en ces points sera le pôle de O' par rapport à cette conique. Mais ce pôle doit être dans le plan O; outre cela, la tangente en a' à la conique inscrite est la tangente à la cubique en ce même point; donc le pôle qu'on cherche est d. Par conséquent, la conique *locale des pôles* passe par d, e, f.

Je vais construire le point d. Observons que le cône du second degré, perspectif à la cubique gauche et ayant son sommet en a', contient les génératrices $a'(a, b, c, a', b', c')$; $a'a'$ exprime la tangente à la cubique en a'. Donc la conique, intersection de ce cône par le plan O, passe par a, b, c, β', γ' et par le point inconnu d (trace de $a'a'$ sur O). Ainsi il suffit d'appliquer le théorème de Pascal *(hexagramma mysticum)* à l'hexagone inscrit $adb\beta'c\gamma'$; qu'on joigne l'intersection de $b\beta'$ et $a\gamma'$ à l'intersection de ao et $c\beta'$; la droite ainsi obtenue rencontre $c\gamma'$ en un point qui, joint à b, donnera une droite passant par d; d'ailleurs ce point appartient à ao; donc, etc.

Ainsi on peut construire les points d, e, f qui sont les traces sur O des droites tangentes à la cubique gauche en a', b', c': mais les plans osculateurs en ces points passent par les tangentes dont il s'agit; donc $a'o', b'o', c'o'$ étant les traces de ces plans sur O', leurs traces sur O seront $\alpha d, \beta e, \gamma f$.

Le point de concours des plans osculateurs en a, b', c' appartient au plan $ab'c'$; mais ce plan passe par ao, donc (5) son foyer est sur cette droite. Cela revient à dire que $\beta e, \gamma f$ coupent ao en un même point g. Par conséquent, les droites $\alpha d, \beta e, \gamma f$ forment un triangle ghk homologique au triangle abc; o est le centre et $\alpha\beta\gamma$ l'axe d'homologie.

10. Reprenons la conique suivant laquelle le plan O coupe le cône du second degré perspectif à la cubique gauche et ayant son sommet en a'. Les plans $a'hk$ et $a'mn$ sont tangents à ce cône; donc la conique susdite est touchée en a par mn et en d par hk. Ces droites tangentes s'entrecoupent en α sur la directrice du plan O; donc le pôle de cette directrice, par rapport à la conique, est sur ao; par conséquent, ce pôle est le point p conjugué harmonique de α' par rapport à a, d. On trouvera ainsi des points analogues q, r sur bo, co.

On voit aisément que α' est conjugué harmonique de g par rapport à a, p; de p par rapport à g, o; de o par rapport à d, p; de même pour β' et γ'. Le point o est le pôle harmonique de la droite $\alpha\beta\gamma$, par rapport à tous les triangles lmn, abc, ghk, pqr, def homologiques entre eux.

11. Continuons à déterminer la conique *locale des pôles*. Les plans osculateurs à la cubique gauche en i, j (8) passent par $\alpha\beta\gamma$; les coniques inscrites (dans la dévelop-

pable osculatrice) qui sont dans ces plans touchent $\alpha\beta\gamma$ en deux points x, y, et jx, iy sont tangentes à la cubique en j, i respectivement. Il s'ensuit que x, y sont les points doubles de l'involution $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$. Il est évident aussi que x, y sont les pôles des plans O, O', par rapport aux coniques inscrites mentionnées precedemment; donc les coniques locales des pôles des plans O, O' passent par x, y.

Or, l'hyperboloïde, lieu des droites intersections des plans osculateurs en a, a', b, b', c, c'..... (8, dernier théorème), contient évidemment les tangentes à la cubique gauche en i, j, c'est-à-dire qu'il passe par x, y. Il passe aussi par d, e, f, car d est un point de l'intersection des plans osculateurs en a, a', etc. Donc la conique locale des pôles du plan O', à laquelle appartiennent les points d, e, f, x, y, est toute entière sur l'hyperboloïde dont nous parlons.

Toutes les coniques (locales des pôles) conjointes, situées dans un faisceau de plans conjoints, sont sur un même hyperboloïde inscrit dans la développable osculatrice de la cubique gauche et passant par les tangentes de cette courbe situées dans les plans osculateurs qui appartiennent au faisceau *).

Tous les cônes (enveloppes de plans polaires) conjoints, dont les sommets sont situés sur une corde de la cubique gauche, sont circonscrits à un même hyperboloïde passant par la courbe gauche et par les tangentes de celle-ci rencontrées par la corde donnée.

Ce sont le mêmes hyperboloïdes trouvés au n. 8.

D'après le premier de ces théorèmes, toutes ces coniques inscrites dans un hyperboloïde et situées dans des plans passant par une même droite (directrice) sont les lignes de contact d'autant de cônes du second degré circonscrits à la surface, et dont les sommets sont situés sur une même droite (la focale oo'). Ainsi, par exemple, o' est le pôle du plan O par rapport à l'hyperboloïde, et *viceversa* o est le pôle du plan O'. Donc l'hyperboloïde est touché, suivant la conique (locale des pôles de O') conjointe située en O, par des plans passant par o'; parmi ces plans, il y a les trois plans osculateurs de la cubique gauche en a', b', c'; donc cette conique locale est tangente en d, e, f aux droites hk, kg, gh, respectivement.

De ce qui précède on conclut encore que o est le pôle de la directrice xy par rapport à la conique locale, et par conséquent cette courbe passe par les points p, q, r.

On peut donc énoncer ces théorèmes:

Tout hyperboloïde inscrit dans la développable osculatrice de la cubique gauche contient deux tangentes de celle-ci. La droite (focale) qui joint les deux points de contact et la droite (directrice) intersection des deux plans osculateurs en ces points sont polaires

*) *Annali de Matematica*, t. I, § 28, settembre-ottobre 1858. — *Journal für die reine und ang. Mathematik*, Band 58, § 16. Berlin, 1860.

réciproques par rapport à l'hyperboloïde, car chaque point de la focale est le pôle du plan focal du point conjoint au premier point. Chaque couple de plans conjoints menés par la directrice rencontre la cubique en six points qui se correspondent deux à deux; les droites intersections des plans osculateurs aux points correspondants sont génératrices de l'hyperboloïde. Chaque plan mené par la directrice coupe l'hyperboloïde suivant une conique qui est le lieu des pôles du plan conjoint, par rapport aux coniques inscrites dans la développable osculatrice.

Tout hyperboloïde passant par la cubique gauche contient deux tangentes de celle-ci. La droite (focale) qui joint les deux points de contact et la droite (directrice) intersection des deux plans osculateurs en ces points, sont polaires réciproques par rapport à l'hyperboloïde, car chaque plan mené par la directrice est le plan polaire du foyer du plan conjoint au premier plan. Chaque couple de points conjoints pris sur la focale donne six plans osculateurs, dont les points de contact avec la cubique se correspondent deux à deux; les droites qui joignent les points correspondants sont génératrices de l'hyperboloïde. Chaque point de la focale est le sommet d'un cône du second degré circonscrit à cette surface; ce cône est l'enveloppe des plans polaires du point conjoint au sommet, par rapport aux cônes du second degré passant par la courbe gauche.

Ainsi, par deux droites tangentes à la cubique gauche on peut mener deux hyperboloïdes, l'un passant par la cubique, l'autre inscrit dans la développable osculatrice. Ces hyperboloïdes sont réciproques entre eux par rapport à la courbe gauche, c'est-à-dire que les points de chacun d'eux sont les foyers des plans tangents à l'autre. Ces mêmes surfaces ont en commun deux droites associées (5) *passant par les points de contact des tangentes données avec la cubique.*

12. La développable osculatrice de la cubique gauche a pour trace, sur un plan quelconque, une courbe du quatrième ordre (et de la troisième classe) ayant trois points de rebroussement, lesquels sont les points d'intersection de la courbe gauche par le plan *). La *directrice* du plan donné est la tangente double de cette courbe plane **); et les deux points de contact sur cette tangente sont les traces des droites tangentes à la cubique gauche et situées dans les plans osculateurs qui passent par la directrice. On sait d'ailleurs que, si une courbe plane de la troisième classe et du quatrième ordre a un seul point *réel* de rebroussement, la tangente double a ses deux contacts *réels*, et que, si la courbe a trois rebroussements *réels*, la tangente double est une droite *isolée* ***). Donc:

---

*) *Compte rendu, u. s.*, § 44.

**) SCHRÖTER. *Journal für die reine und ang. Mathematik,* Band 56, p. 33.

***) PLÜCKER. *Theorie der algebraischen Curven,* p. 196. Bonn, 1839.

Tout plan mené par une droite qui est l'intersection de deux plans osculateurs réels de la cubique gauche rencontre cette courbe en un seul point réel. Tout plan mené par une droite intersection (idéale) de deux plans osculateurs imaginaires de la cubique gauche rencontre cette courbe en trois points réels.

Par un point donné sur une corde réelle de la cubique gauche on peut mener à celle-ci un plan osculateur réel. Par un point donné sur une corde idéale de la cubique gauche on peut mener à celle-ci trois plans osculateurs réels.

C'est-à-dire que:

Si une involution de plans conjoints a les plans doubles réels (imaginaires), chaque plan du faisceau coupe la cubique gauche en un seul point réel (en trois points réels).

*Si une involution de points conjoints a les points doubles réels (imaginaires), par chaque point de la droite lieu de l'involution passe un seul plan osculateur réel (passent trois plans osculateurs réels) de la cubique gauche**).

13. A present, appliquons ces propriétés au cas très-important où le plan O' conjoint au plan O est à distance infinie. Alors les pôles du plan O' par rapport aux coniques inscrites dans la développable osculatrice deviendront les centres de ces coniques; donc (n. 3):

Les centres des coniques inscrites dans la développable osculatrice de la cubique gauche sont sur une conique dont le plan a son conjoint à l'infini **).

J'appelle *conique centrale* cette courbe, lieu des centres des coniques inscrites; *plan central* le plan de la conique centrale, c'est-à-dire le plan qui a son conjoint à l'infini: *focale centrale* la droite focale du point *o* foyer du plan central O; *faisceau central* le système des plans, conjoints deux à deux, parallèles au plan central. Le foyer du plan central est le centre de la conique centrale (n. 11).

La droite (à l'infini), intersection du plan central par son conjoint, est leur directrice commune: ainsi cette droite sera l'intersection de deux plans osculateurs réels ou imaginaires, selon que le plan à l'infini rencontre la cubique gauche en un seul point réel ou en trois points réels (n. 12). Donc:

Si la cubique gauche a trois asymptotes réelles, il n'y a pas de plans osculateurs parallèles réels.

Si la cubique gauche a une seule asymptote réelle, il y a deux plans osculateurs réels parallèles et équidistants du plan central ***).

Je dis *équidistants*, car ces plans osculateurs sont conjugués harmoniques par rapport au plan central et au plan conjoint, qui est à l'infini (n. 3).

---

*) *Annali di Matematica,* t. II, § 8, gennaio-febbraio 1859.

**) *Annali di Matematica,* t. I, § 27, settembre-ottobre 1858.

***) *Annali di Matematica,* t. II, luglio-agosto 1859.

J'ai déjà adopté, dans mon Mémoire sur quelques propriétés des lignes gauches de troisième ordre et classe (inséré au *Journal mathématique de Berlin,* tom. LVIII), les dénominations d'*hyperbole gauche, ellipse gauche, hyperbole parabolique gauche* et *parabole gauche,* proposées par M. SEYDEWITZ *(voir* l'Introduction de ce Mémoire). Je continuerai à m'en servir.

14. Chaque conique inscrite dans la développable osculatrice est l'enveloppe des droites intersections d'un même plan osculateur par tous les autres. Donc, pour l'ellipse gauche, la conique inscrite située dans chacun des deux plans osculateurs parallèles a une droite tangente à l'infini. Donc:

Les plans osculateurs parallèles de l'ellipse gauche coupent la développable osculatrice suivant deux paraboles *).

On a vu que la conique *locale des pôles,* dans le plan O, rencontre la directrice en deux points x, y, qui sont les traces des droites tangentes à la cubique contenues dans les plans osculateurs passant par la directrice, c'est-à-dire en deux points x, y, qui sont les contacts de la directrice avec les coniques inscrites situées dans ces mêmes plans osculateurs (n. 11). Donc:

Le lieu des centres des coniques inscrites dans la développable osculatrice de l'hyperbole gauche est une ellipse dont le plan (le plan central) *rencontre la courbe gauche en trois points réels.*

Le lieu des centres des coniques inscrites dans la développable osculatrice de l'ellipse gauche est une hyperbole dont le plan (le plan central) *rencontre la courbe gauche en un seul point réel. Les asymptotes de l'hyperbole centrale sont parallèles aux diamètres des paraboles inscrites qui sont situées dans les plans osculateurs parallèles* **).

On conclut des théorèmes démontrés ci-dessus que, si la cubique gauche a trois asymptotes réelles, le plan central contient la figure ci-après décrite: a, b, c sont les trois points de la cubique gauche; d, e, f les pieds des asymptotes; hk, kg, gh, les traces des plans osculateurs passant par les asymptotes; mn, nl, lm les traces des plans tangents à la cubique en a, b, c et parallèles aux asymptotes, respectivement; ao, bo, co les traces des plans osculateurs en a, b, c; p, q, r les centres des hyperboles, suivant lesquelles la courbe gauche est projetée par les trois cylindres passant par elle (cônes perspectifs dont les sommets sont à l'infini). Ces hyperboles passent toutes par a, b, c; de plus, la première passe par d, la seconde par e, la troisième par f. Les asymptotes de la première hyperbole (n. 9) sont parallèles à ob, oc, celles de la seconde à oc, oa; et celles de la troisième à oa, ob. L'ellipse centrale est inscrite

*) *Annali di Matematica,* t. II, luglio-agosto 1859.

**) *Annali di Matematica,* t. II, luglio-agosto 1859.

dans le triangle ghk et passe par les points d, e, f, p, q, r; son centre est o, foyer du plan central. Ce même point o est le centre de gravité de tous les triangles def, pqr, ghk, abc, lmn qui sont homothétiques entre eux. De plus, on a: $ag = gp = po = od$...

Coniques inscrites dans la développable osculatrice.

15. Je me propose maintenant de déterminer l'espèce des coniques inscrites dans la développable osculatrice de la cubique gauche, c'est-à-dire l'espèce des coniques suivant lesquelles cette surface développable est coupée par les plans osculateurs de la cubique.

Commençons par l'hyperbole gauche, qui a trois points réels distincts i, i', i'' à l'infini. Le plan osculateur en i contient une conique inscrite qui passe par i et y est touchée par l'asymptote correspondante de la courbe gauche. Donc, cette conique inscrite est une hyperbole qui a l'asymptote correspondante au point i en commun avec la courbe gauche. De même pour les coniques inscrites dans les plans osculateurs en i' et i''.

Considérons les hyperboles inscrites A, B, situées dans les plans a, b osculateurs à la cubique en i, i' (points à l'infini); elles suffisent pour déterminer complètement la développable osculatrice. La droite intersection des plans a, b est une tangente commune aux deux coniques A, B; soient α, β les points de contact; alors βi et $\alpha i'$ sont les asymptotes de la courbe gauche, lesquelles appartiennent aussi, séparément, aux coniques A et B. Par un point quelconque o de $\alpha\beta$ menons $o\mu$ tangente à la conique A et $o\nu$ tangente à la conique B (μ, ν points de contact); $\mu o\nu$ est un plan osculateur et $\mu\nu$ est une tangente de la cubique gauche. Pour connaître l'espèce de la conique inscrite, située dans ce plan $\mu o\nu$, il faut évidemment demander combien de tangentes réelles de la cubique gauche sont parallèles au plan $\mu o\nu$, c'est-à-dire combien de fois la développable osculatrice est rencontrée *réellement* par la droite intersection du plan $\mu o\nu$ et du plan à l'infini.

Pour répondre à cette question, je trace, dans le plan a, une droite quelconque parallèle à $o\mu$; soient m, m' les points où cette parallèle rencontre A; les tangentes à cette conique en m, m' couperont $\alpha\beta$ en deux points l, l'. Si mm' se meut parallèlement à $o\mu$, les points l, l' engendrent une involution.

Par l, l' menons les tangentes à l'hyperbole B; la droite qui joint les points de contact n, n' passera toujours par un point fixe x (à cause de l'involution ll') *). Cherchons x.

Si mm' se confond avec $o\mu$, nn' coincide avec $o\nu$; donc x est sur $o\nu$. Ensuite supposons que mm' devienne tangente à la conique A, sans coïncider avec $o\mu$; soit q le

*) SCHRÖTER, *ut supra*, p. 32.

point où $\alpha\beta$ est rencontrée par cette tangente de A, parallèle à $o\mu$; menons par q la tangente à B; cette droite passera par x. Donc le point x est l'intersection de $o\nu$ par la tangente à B menée du point q.

On peut déterminer q indépendamment de A. En effet, on sait que les couples de tangentes parallèles d'une conique marquent sur une tangente fixe une involution de points, dont le point central est le contact de la tangente fixe et les points doubles sont les intersections de celle-ci par les asymptotes. Donc les points o, q sont conjugués dans une involution qui a le point central α et le point double β; ainsi on aura:

$$\alpha o \cdot \alpha q = \overline{\alpha\beta}^2$$

ce qui donne q.

Or, les droites analogues à mm' sont les traces, sur le plan a, d'autant de plans parallèles au plan $\mu o\nu$; donc ces plans couperont le plan b suivant des droites parallèles à $o\nu$, dont chacune correspond à une droite (nn') issue de x. Aiusi nous aurons dans le plan b deux faisceaux homographiques: l'un de droites parallèles à $o\nu$, l'autre de droites passant par x. Les deux faisceaux sont perspectifs, car $o\nu$ est un rayon commun, correspondant à lui-même; donc les intersections des autres rayons homologues formeront une droite rs qui coupera évidemment la conique B aux points où aboutissent les tangentes de la cubique gauche parallèles au plan $\mu o\nu$. Ainsi ces (deux) tangentes sont réelles ou imaginaires, selon que rs rencontre B en deux points réels ou imaginaires. Cherchons rs.

Concevons que mm' (et par conséquent aussi la droite parallèle à $o\nu$) tombe à l'infini; alors l, l' deviennent les intersections de $\alpha\beta$ par les asymptotes de A, on bien les points β, β'. Si par β' on mène la tangente à B, et qu'on joigne le point de contact à β, on aura une droite passant par x, laquelle correspondra à nn' infiniment éloignée. Cela revient à dire que rs est parallèle à $x\beta$.

Ensuite, je fais coïncider nn' avec xq; il est évident que, dans ce cas, la parallèle à $o\nu$ vient à passer par q; donc q est un point de rs. Concluons que la droite cherchée passe par q et est parallèle à $x\beta$.

Nous avons vu que α est le point central et β un point double d'une involution sur $\alpha\beta$, où o et q sont deux points conjugués. Si par chaque couple de points conjugués on mène les tangentes à la conique B, le point de leur concours engendre la droite $x\beta$. Soit c le centre de l'hyperbole B; et cherchons le point γ où $x\beta$ rencontre l'asymptote $c\alpha$. Dans l'involution mentionnée, le point conjugué à α est à l'infini, c'est-à-dire qu'il est déterminé par la droite tangente à B et parallèle à $\alpha\beta$. Donc γ sera l'intersection de cette tangente par l'asymptote $c\alpha$. Il s'ensuit que γ est sur le prolongement de αc et que $\gamma c = c\alpha$.

Soient δ et α' les points où l'autre asymptote de B est coupé par $\beta\gamma$ et $\alpha\beta$, respectivement. Le triangle $\alpha c\alpha'$ et la transversale $\beta\delta\gamma$ donnent (théorème de MÉNÉLAUS)

$$\gamma c \,.\, \beta\alpha \,.\, \delta\alpha' = \gamma\alpha \,.\, \alpha'\beta \,.\, c\delta$$

mais on a

$$\gamma\alpha = 2\gamma c\,, \quad \alpha'\beta = \beta\alpha\,, \quad \text{donc} \quad \delta\alpha' = 2c\delta\,.$$

Il s'ensuit que la droite $\beta\gamma$ a un segment *fini* compris dans l'intérieur d'un des angles asymptotiques qui ne contiennent pas l'hyperbole B. Il en sera de même de rs, qui est parallèle à $\beta\gamma$. Or, toute droite qui a cette position, rencontre l'hyperbole *en deux points réels;* donc, pour chaque plan osculateur de l'hyperbole gauche il y a deux tangentes réelles de cette courbe, qui sont parallèles au plan. Ainsi:

Tout plan osculateur de l'hyperbole gauche coupe la surface développable osculatrice suivant une hyperbole *).

16. Si deux des trois points à l'infini coïncident en un seul, la cubique gauche a une seule asymptote à distance finie; les deux autres coïncident à l'infini. La courbe a reçu, dans ce cas, le nom d'*hyperbole parabolique gauche.*

Designons par i le point où la courbe est touchée par le plan à l'infini; par i' le point où ce plan est simplement sécant. La tangente en i est tout entière à l'infini; donc la conique inscrite, située dans le plan a osculateur en i, est une parabole A. Ce même plan contient la conique centrale, car il est conjoint au plan à l'infini (n. 3).

Le plan b osculateur en i' contient une hyperbole inscrite B, car la tangente (asymptote) en i' est à distance finie. Soit α le point où la parabole A est tangente à la droite intersection des plans a, b; il est évident que cette droite est une asymptote de B, c'est-à-dire que α est le centre de cette hyperbole.

Prenons arbitrairement le point o sur la droite nommée, et menons $o\mu$ tangente à la parabole A, $o\nu$ tangente à l'hyperbole B. Combien de tangentes de la cubique gauche sont parallèles an plan osculateur $\mu o\nu$?

Soient m, m' deux points de A tels que mm' soit parallèle à $o\mu$; les tangentes en m, m' à la conique A rencontrent αo en l, l'. Menons par ces points les tangentes $ln, l'n'$ à B; la corde de contact nn' passera par un point fixe de $o\nu$. Pour trouver ce point, j'observe que si mm' tombe à l'infini, elle devient une tangente de A; par conséquent, la position correspondante de nn' est αo. Donc le point fixe autour duquel tourne nn' est o.

En poursuivant les raisonnements dont on a fait usage dans le numéro précédent, nous aurons à considérer, dans le plan b, deux faisceaux homographiques de droites; le centre du premier est à l'infini sur $o\nu$; le centre du second est o. La droite $o\nu$ est un rayon homologue à lui-meme; donc les deux faisceaux engendreront une droite rs.

*) *Annali di Matematica,* t. II, luglio-agosto 1859.

Si mm' tombe à l'infini, la droite parallèle à $o\nu$ s'éloigne aussi infiniment, et nn' coïncide avec αo; donc le point à l'infini de αo appartient à rs, c'est-à-dire que la droite rs est parallèle à αo. De plus, on voit aisément que, si $o\nu$ coupe l'asymptote $\alpha i'$ en o', et que l'on prenne, sur le prolongement de $o'\alpha$, le point r tel que $r\alpha = \alpha o'$, la droite cherchée passera par r.

La droite rs est parallèle à une asymptote (αo) de l'hyperbole B; ainsi elle rencontre cette courbe en un point *réel* à l'infini; donc rs passe par un autre point réel de la même courbe. Ce qui revient à dire que le plan osculateur $\mu o \nu$ rencontre à l'infini, outre l'asymptote de la cubique gauche en i, une autre tangente de cette courbe. Donc:

Les plans osculateurs de l'hyperbole parabolique gauche coupent la développable osculatrice de cette courbe suivant des coniques qui sont des hyperboles, à l'exception d'une seule qui est une parabole. Les centres des hyperboles sont sur une autre parabole *).

Les deux paraboles sont dans un même plan, ont les diamètres parallèles et sont touchées au même point par le plan osculateur qui contient l'asymptote (à distance finie) de la courbe gauche.

Chacune des hyperboles inscrites a une asymptote parallèle à un plan fixe; c'est le plan osculateur qui contient l'asymptote (de la courbe gauche) située toute entière à l'infini.

17. Si la cubique gauche a un plan osculateur à l'infini (parabole gauche), on voit sans peine que toute conique inscrite dans la développable osculatrice a une tangente à l'infini, et qu'il n'y a plus de plan central. Donc:

Toutes les coniques inscrites dans la développable osculatrice de la parabole gauche sont des paraboles (planes).

18. Je passe à considérer l'ellipse gauche. Cette courbe admet deux plans osculateurs parallèles a, b, qui contiennent deux paraboles A, B, inscrites dans la développable osculatrice (13 et 14). Soient α, β les points de contact de ces plans avec la courbe gauche; $\alpha x, \beta y$ les droites tangentes, en ces points, à la même courbe, et par conséquent aux paraboles A, B respectivement.

Il résulte de la théorie générale que αx est parallèle aux diamètres de B, et que βy est parallèle aux diamètres de A. Deux tangentes parallèles mp, nq (p, q points de contact [10]) de ces paraboles déterminent un plan osculateur, et pq est la droite tangente correspondante de la cubique gauche. Tâchons de découvrir l'espèce de conique inscrite située dans ce plan.

Soient m', m'' deux points de la parabole A, tels que $m'm''$ soit parallèle à mp; nous considérons $m'm''$ comme trace, sur le plan a, d'un plan parallèle au plan (mp, nq): la trace du même plan sur b sera parallèle à nq et coupera le diamètre βx de B en un

*) *Annali di Matematica,* t. II, luglio-agosto 1859.

point ν qu'on construit aisément. Car, si $m'm''$ rencontre αx en μ, il suffira de prendre $n\nu = m\mu$ sur βx *).

Soient n', n'' les points de la parabole B, où elle est touchée par des droites parallèles aux tangentes de A en m', m''. La corde de contact $n'n''$ passera par un point fixe de nq. Pour costruire ce point, je suppose que $m'm''$ aille à l'infini; alors $n'n''$ deviendra tangente à B en β; donc le point cherché i est l'intersection de nq par βy.

Ainsi on obtient, dans le plan b, deux faisceaux homographiques: l'un de droites parallèles à nq, l'autre de droites issues du point i. Ces faisceaux ayant le rayon nq commun, homologue à soi-même, engendrent une droite R, qu'il s'agit de déterminer.

Si le rayon du second faisceau prend la position βy, la droite $m'm''$ (et par conséquent le rayon homologue de l'autre faisceau) s'éloigne à l'infini; donc R est parallèle à βy.

Si $m'm''$ passe par α, la tangente de A en un des points m', m'', devient αx; la tangente de B, parallèle à αx, est à l'infini; donc $n'n''$ devient parallèle à βx. Le rayon correspondant du premier faisceau passera par un point c de βx qu'on détermine en prenant $nc = m\alpha$.

Or les deux faisceaux dont il s'agit marquent sur βx deux divisions homographiques, dont n est un point double, car nq est un rayon commun. De plus, il suit de ce qui précède que c est le point de la première division qui correspond à l'infini de la seconde; de même, β est le point de la seconde division qui correspond à l'infini de la première. Donc le deuxième point double sera o, en supposant $\beta o = nc = m\alpha$.

Ainsi la droite cherchée passe par o et est parallèle à βy.

Il est évident que les tangentes de la cubique gauche parallèles au plan osculateur (mp, nq) passent par les points où R coupe la parabole B. Ces points sont réels si o est sur βx, au dedans de la parabole, imaginaires si o tombe au dehors sur le prolongement de $x\beta$. Le point o est au dedans (au dehors) de la conique B, si m est sur αx (sur αx); donc le points communs aux lignes R, B sont réels ou imaginaires, selon que mp touche la branche $\alpha h'$ ou la branche αh de la parabole A, ou bien encore, selon que nq touche la branche $\beta k'$ ou la branche βk de la parabole B **).

*) Il y a, sur la figure qui accompagne le Mémoire de M. CREMONA, deux lignes cotées xx'. L'une, désignée dans le texte par αx, est tangente à la courbe A; l'autre, désignée par βx, est parallèle à αx et par conséquent est un diamètre de la parabole B. Il y a de même deux droites yy', qu'on ne peut confondre, puisque l'une est désignée par αy, l'autre par βy.

P. [PROUHET].

**) La droite βx est dans l'intérieur de la parabole B. La droite αx est parallèle à βx, comme on l'a déja remarqué, et *de même sens*. Le point α divise la parabole A en deux parties indéfinies que l'auteur appelle *branches;* l'une, αh, est située du même côté que αx, l'autre du même côté que $\alpha x'$. Même explication pour βk et $\beta k'$. P.

Donc chacune des deux paraboles A et B est divisée par le point de la cubique gauche (α ou β) en deux branches; selon qu'un plan osculateur touche l'une ou l'autre branche, la conique inscrite située dans ce plan est une hyperbole ou une ellipse.

19. Soit r le point où la droite $\alpha\beta$, qui est la *focale centrale* (13) de la cubique gauche donnée, rencontre mn et par conséquent le plan osculateur (mp, nq). La droite qui joint r au points s, commun aux droites ip, mq, est évidemment parallèle à mp; or cette même droite rs contient le point t de contact du plan osculateur (mp, nq) avec l'ellipse gauche. En effet, la conique inscrite qui est dans ce plan est déterminée par les tangentes mp, nq, pq, et par les points m, i. Donc, si nous considérons les trois tangentes comme côtés d'un triangle circonscrit (dont un sommet est à l'infini), pour trouver le point t de contact sur pq, il suffit de mener la parallèle à mp par le point commun aux droites mq, ip.

Observons encore que, m et i étant les points de contact de deux tangentes parallèles, le centre g de la conique inscrite sera le point milieu de mi.

Il suit, de ce qui précède, que $r\beta$ exprime la distance (mesurée parallèlement à la focale centrale $\alpha\beta$) du point t au plan b. Et on a

$$r\beta : \alpha\beta = \beta n : (\beta n + m\alpha).$$

Le rapport $\beta n : (\beta n + m\alpha)$ (et par conséquent son égal $r\beta : \alpha\beta$) est positif et plus petit que l'unité, seulement quand o est extérieur à la conique B; si o est un point intérieur, ce rapport est négatif ou plus grand que l'unité. Donc tous le plans osculateurs, dont les points de contact avec la cubique gauche sont compris entre les deux plans osculateurs parallèles, contiennent des ellipses inscrites; les autres plans osculateurs contiennent des hyperboles, c'est-à-dire:

L'ellipse gauche a deux plans osculateurs, parallèles entre eux, qui coupent la développable osculatrice suivant deux paraboles; tous les autres plans osculateurs coupent cette surface suivant des ellipses ou des hyperboles. Les points de la cubique, auxquels correspondent des ellipses, sont situés entre les deux plans osculateurs parallèles; les points auxquels correspondent des hyperboles sont au dehors *).

20. La conique centrale (13), située dans un plan parallèle et équidistant aux plans a, b, est une hyperbole; son centre est γ, point milieu de $\alpha\beta$; ses asymptotes sont parallèles à αx et βy. Donc le plan $m\alpha\beta$ sépare complètement l'une de l'autre les deux branches de l'hyperbole centrale. Or le centre g de la conique inscrite située dans le plan osculateur (mp, nq), c'est-à-dire le point milieu de mi, est, par rapport au plan $m\alpha\beta$, du même côté que i; et d'ailleurs i est au deçà ou au delà de ce plan, selon

*) *Annali di Matematica*, t. II, luglio-agosto 1859.

que o est intérieur ou extérieur à la conique B; donc la conique inscrite est une ellipse ou une hyperbole, selon que son centre tombe dans l'une ou dans l'autre branche de l'hyperbole centrale. Donc:

Les centres de toutes les coniques (ellipses et hyperboles) inscrites dans la développable osculatrice de l'ellipse gauche sont sur une hyperbole, dont le plan est parallèle et équidistant aux deux plans osculateurs parallèles, et les asymptotes sont parallèles aux diamètres des paraboles inscrites situées dans ces derniers plans. Une branche de l'hyperbole centrale contient les centres des ellipses inscrites; l'autre branche contient les centres des hyperboles *).

21. Au moyen du faisceau des plans conjoints parallèles au plan central (faisceau central), les points de la cubique gauche sont conjugués deux à deux en involution (n. 8); les points doubles sont les points α, β de contact des plans osculateurs parallèles. Deux points conjugués sont situés dans deux plans conjoints du faisceau central; la droite qui joint ces points est génératrice de l'hyperboloïde I enveloppé par les cônes conjoints, dont les sommets sont sur la focale centrale. Deux plans osculateurs conjugués passent par deux points conjoints de cette focale; et leur intersection est une génératrice de l'hyperboloïde J, lieu de toutes les coniques conjointes du faisceau central.

On sait qu'une tangente quelconque de la cubique gauche est rencontrée par les plans osculateurs en une série de points projective au système de ces plans; donc les couples des plans osculateurs conjugués, nommés ci-dessus, détermineront sur αx et βy deux involutions. Dans chacune de ces involutions, un point double est à l'infini; l'autre point double est α pour la première involution, β pour la seconde. Donc chacune de ces involutions n'est qu'une simple symétrie; c'est-à-dire, si deux plans osculateurs conjoints rencontrent αx en m, m' et βy en i, i', on aura

$$m\alpha = \alpha m', \quad i\beta = \beta i'.$$

D'ailleurs nous avons vu (n. 19) que les centres g, g' des coniques inscrites, situées dans ces plans osculateurs, sont les milieux des droites $mi, m'i'$. Donc, par une propriété très-connue du quadrilatère gauche, les points g, g' sont en ligne droite avec γ, milieu de $\alpha\beta$ et centre de la conique centrale. Donc:

Deux points de la conique centrale, en ligne droite avec son centre, sont les centres de deux coniques inscrites, situées dans deux plans osculateurs conjugués, qui rencontrent de nouveau la conique centrale en un même point.

22. Si la cubique gauche a une seule asymptote réelle, la conique centrale est une hyperbole dont les branches sont séparées par le plan $m\alpha\beta$. Ce plan divise en deux parties la parabole B, mais il laisse la parabole A toute entière d'un même côté. Or

*) *Annali di Matematica,* t. II, luglio-agosto 1859.

la conique inscrite située dans le plan (mp, nq) est une ellipse ou une hyperbole, selon que i est sur βy ou sur $\beta y'$; de plus, le centre g de cette conique inscrite est le milieu de mi; donc la branche de l'hyperbole centrale qui contient les centres des ellipses inscrites est du même côté que la courbe A par rapport au plan $m\alpha\beta$; l'autre branche est du côté opposé.

Les traces de deux plans osculateurs conjugués sur le plan de la conique B se rencontrent sur $\beta x'$; les traces des mêmes plans sur le plan de la parabole A se rencontrent sur $\alpha y'$. Donc l'intersection des deux plans osculateurs conjugués rencontrera la conique centrale en un point de la branche qui contient les centres des hyperboles inscrites. C'est-à-dire:

Dans l'ellipse gauche, chaque plan osculateur rencontre en deux points l'hyperbole centrale; ces deux points appartiennent à une même branche ou aux deux branches de cette courbe, suivant que la conique inscrite, située dans le plan nommé, est hyperbole ou ellipse.

Par conséquent, *chaque point de la branche qui contient les centres des hyperboles inscrites est l'intersection de trois plans osculateurs réels de la courbe gauche; au contraire, par chaque point de l'autre branche passe un seul plan osculateur réel.*

En outre, si nous considérons l'hyperboloïde J, lieu des coniques conjointes du faisceau central, par chaque point de la branche de l'hyperbole centrale, qui contient les centres des hyperboles inscrites, passe une génératrice qui est l'intersection de deux plans osculateurs (conjugués) réels, dont l'un contient une ellipse inscrite et l'autre une hyperbole. Et par chaque point de la seconde branche passe une génératrice qui est l'intersection idéale de deux plans osculateurs imaginaires.

On voit aisément que dans l'hyperbole gauche tout point de l'ellipse centrale est l'intersection de trois plans osculateurs réels, et dans l'hyperbole parabolique gauche tout point de la parabole centrale est l'intersection de deux plans osculateurs réels, sans compter le plan de cette conique qui est lui-même osculateur à la courbe gauche.

23. Soient maintenant A une ellipse et B une hyperbole inscrites, situées dans les plans osculateurs a, b d'une ellipse gauche. Soient α', β' les points de contact des coniques A, B avec la droite intersection de leurs plans; menons par β' la tangente $\beta'\alpha$ à l'ellipse A, et par α' la tangente $\alpha'\beta$ à l'hyperbole B. Si α, β sont les points de contact, ils sont aussi les points où la cubique gauche est osculée par les plans donnés. Soient α'', β'' les points où la droite (ab) est coupée par la tangente de B parallèle à $\alpha'\beta$, et par la tangente de A parallèle à $\beta'\alpha$.

Je me propose de construire les traces, sur a et b, des plans osculateurs parallèles. Si autour du centre c de l'ellipse A on fait tourner un diamètre, les tangentes à ses extrémités déterminent sur (ab) des couples de points m, m' conjugués en involution. Si on fait tourner une droite aussi autour du centre o de l'hyperbole B, on obtiendra sur (ab) une autre involution.

La première involution n'a pas de points doubles réels; α' est le point central; β', β'' sont deux points conjugués, et par conséquent l'on a

$$\alpha'm \cdot \alpha'm' = \alpha'\beta' \cdot \alpha'\beta''.$$

La deuxième involution a les points doubles réels, déterminés par les asymptotes de B; β' est le point central; α', α'' sont deux points conjugués; et si m, m'' est un couple quelconque de points conjugués, on aura

$$\beta'm \cdot \beta'm'' = \beta'\alpha' \cdot \beta'\alpha''.$$

A chaque point m de (ab) correspond un point m' dans la première involution et un autre point m'' dans la seconde; mais si on choisit m de manière que m'' coïncide avec m', par m, m' passeront deux tangentes parallèles de l'ellipse A et deux tangentes parallèles de l'hyperbole B, ce qui donnera les traces des plans osculateurs parallèles.

Or on sait que deux involutions sur une même droite, dont l'une au moins a les points doubles imaginaires, ont toujours un couple commun de points conjugués réels. En effet, si m'' coincide avec m', les équations ci-dessus donnent, par l'élimination de m',

$$\overline{\alpha'm}^2 - \alpha'm\,(\alpha'\alpha'' + \alpha'\beta'') + \alpha'\beta' \cdot \alpha'\beta'' = 0,$$

équation quadratique dont les racines sont réelles, car le produit $\alpha'\beta' . \alpha'\beta''$ est évidemment négatif. On en conclut encore que le milieu des points cherchés est le milieu i de $\alpha''\beta''$. Il est maintenant bien facile de construire les points inconnus. Par un point g pris arbitrairement $\big($au dehors de $(ab)\big)$ on fera passer une circonférence de cercle qui ait pour corde $\beta'\beta''$; cette circonférence et la droite $g\alpha'$ se couperont en un point h. Par g, h on décrira une circonférence dont le centre soit sur la perpendiculaire élevée de i sur (ab); cette deuxième circonférence marquera sur (ab) les points cherchés.

Indépendamment de ces points, on peut construire les traces du plan central, ce qui donne aussi la *direction* des plans osculateurs parallèles. Le plan central passe évidemment par les centres c, o des coniques données; donc ses traces seront ic, io.

Si une développable de la troisième classe est donnée par deux hyperboles inscrites, la construction indiquée ci-dessus établira si l'arête de rebroussement est une ellipse gauche, ou une hyperbole gauche, ou une hyperbole parabolique gauche. Les points conjugués communs aux deux involutions sont réels dans le premier cas, imaginaires dans le second, réels coïncidents dans le troisième.

24. Enfin je me propose de déterminer l'espèce des coniques perspectives de la cubique gauche sur le plan central. Soit S un cône du second degré perspectif à la courbe gauche, a' son sommet, O' le plan mené par a' parallèlement au plan central

(c'est-à-dire par la *directrice* du plan à l'infini); O le plan conjoint au plan O'. En conservant toutes les autres dénominations des nos 6 et 7, l'intersection du cône S par le plan O est une conique passant par les points β', γ' de la directrice (à l'infini) or ces points β', γ' sont imaginaires ou réels selon que le plan O coupe la courbe gauche en un seul point réel a ou en trois points réels a, b, c; d'ailleurs l'intersection du cône S par le plan O est de la même espèce que l'intersection par le plan central, car ces plans sont parallèles. Donc:

Toutes les coniques perspectives de la cubique gauche sur le plan central sont de la même espèce; c'est-à-dire elles sont des hyperboles, des ellipses, ou des paraboles selon que la cubique est une hyperbole gauche, ou une ellipse gauche, ou une hyperbole parabolique gauche *).

Observons que, pour l'hyperbole parabolique gauche, parmi les cônes perspectifs du second ordre, il y a deux cylindres; l'un d'eux est hyperbolique et correspond au point où la courbe est touchée par le plan à l'infini; l'autre est parabolique et correspond au point où le plan à l'infini est simplement sécant. Le plan central est asymptotique au premier cylindre.

Bologne, le 21 avril 1861.

Additions (27 octobre 1862).

M. de Jonquières, dans une lettre très-obligeante que je viens de recevoir de Vera-Cruz, me fait observer que M. Chasles a prouvé le premier *(Aperçu historique*, p. 834) que deux figures homographiques situées dans un même plan ont trois points doubles, ce qui revient à dire que le lieu du point commun à deux rayons homologues, dans deux faisceaux homographiques de rayons dans l'espace, [7] est une courbe gauche du troisième ordre. J'avais attribué par méprise ce théorème. a M. Seydewitz.

Au n.° 2, e est le point commun aux droites bc, ad, et f est l'intersection de ac, bd.

Aux n.os 7 et 11, chacun des points x, y forme, avec les trois points α, β, γ, un système *equianharmonique* **); donc x, y sont imaginaires (conjugués), si α, β, γ sont tous réels; mais lorsque α seul est réel, et β, γ imaginaires (conjugués), x, y sont réels. De là on conclut immédiatement le théorème du n.° 12, sans avoir recours à la théorie des courbes planes de quatrième ordre et de troisième classe.

*) *Annali di Matematica,* t. II, luglio-agosto 1859.

) Voir mon *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* [Queste Opere, n. **29 (t. 1.°)], n. 26. Bologna, 1862.