36.

SUR LES SURFACES DÉVELOPPABLES DU CINQUIÈME ORDRE.

Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris), tome LIV (1862), pp. 604-608.

1. Les résultats très-importants que M. CHASLES a récemment communiqués à l'Académie, m'ont porté à la recherche des propriétés des surfaces développables du cinquième ordre. J'ai l'honneur d'énoncer ici quelques théorèmes qui ne me semblent pas dépourvus d'intérêt.

En premier lieu, toute surface développable du cinquième ordre est de la quatrième classe et a: 1° une génératrice d'inflexion; 2° une courbe cuspidale du quatrième ordre, ayant un point stationnaire; 3° une courbe double du deuxième ordre.

2. Soit Σ une développable du cinquième ordre; C sa courbe cuspidale; a le point stationnaire de C; b le point où cette courbe gauche est touchée par la génératrice d'inflexion de Σ; c le point où cette génératrice perce le plan osculateur de la courbe C en a; d le point où le plan stationnaire, c'est-à-dire osculateur en b à la même courbe, est rencontré par la génératrice de Σ qui passe par a. On a ainsi un tétraèdre $abcd$, dont les faces acd, bcd et les arêtes ad, bc sont respectivement deux plans tangents et deux génératrices de la développable Σ. Ce tétraèdre a une grande importance dans les recherches relatives à cette développable *).

3. Une génératrice quelconque de Σ rencontre une autre génératrice de la même surface; nous dirons *conjuguées* ces deux génératrices situées dans un même plan. De même on dira *conjugués* les plans qui touchent Σ tout le long de ces génératrices; et *conjugués* les points où ces mêmes droites sont tangentes à la courbe C.

La droite qui joint deux points conjugués de C passe toujours par le point fixe c.

*) M. CAYLEY fait mention de ce tétraèdre dans son Mémoire: *On the developable surfaces, etc.* (Camb. and Dub. Math. Journal, vol. V, p. 52).

Le lieu de cette droite est un cône S du second degré, qui est doublement tangent à la courbe cuspidale C.

Le plan qui contient deux génératrices conjuguées de Σ enveloppe le même cône S.

Deux génératrices conjuguées de Σ se rencontrent toujours sur le plan fixe *abd*. Le lieu du point d'intersection est une conique K, la courbe double de la développable donnée.

La droite intersection de deux plans (tangents à Σ) conjugués est toujours tangente à la même conique K.

Les plans menés par *ad* et, respectivement, par les couples de points conjugués de C forment une involution, dont les plans doubles sont *acd* et *abd*.

La génératrice d'inflexion *bc* est rencontrée par les couples de plans (tangents à Σ) conjugués en des points, qui forment une involution, dont les points doubles sont *b* et *c*.

4. Ces propriétés donnent lieu au système de deux figures homologiques-harmoniques dans l'espace. Un point p, pris arbitrairement dans l'espace, est l'intersection de quatre plan tangents de Σ; les quatre plans conjugués à ceux-ci passent par un même point p'. La droite pp' passe par le sommet c du tétraèdre *abcd* et est divisée harmoniquement par c et par le plan *abd*.

Un plan quelconque P coupe C en quatre points; les quatre points conjugués à ceux-ci sont dans un autre plan P'. La droite PP' est dans le plan fixe *abd*; et l'angle de ces plans P, P' est divisé harmoniquement par le plan *abd* et par le plan mené par c.

Ainsi nous avons deux figures homologiques-harmoniques: c est le centre d'homologie; *abd* est le plan d'homologie. D'ici on conclut, en particulier:

Les points de la courbe C (et de même les plans tangents de Σ) sont conjugués deux à deux harmoniquement par rapport au sommet du cône S et au plan de la conique K.

5. Le plan stationnaire *bcd* coupe la développable Σ suivant une conique K' qui passe par b, d et touche, en ces points, les droites *bc*, *dc*. La conique double K passe par a, b; ses tangentes, en ces points, sont *ad*, *bd*. Donc:

Toute développable du cinquième ordre est l'enveloppe des plans tangents communs à deux coniques K, K' ayant un point commun, pourvu que l'une d'elles K soit tangente, en ce point, à l'intersection des plans des deux courbes.

Le cône S', qui a le sommet au point a et passe par la courbe gauche C, est du second degré. Les plans *acd*, *abc* sont tangents à ce cône le long des arêtes *ad*, *ab*. De même, les plans *bcd*, *acd* sont tangents au cône S le long des droites *bc*, *ac*. D'ici l'on conclut:

La courbe cuspidale d'une développable du cinquième ordre est toujours l'intersection de deux cônes du second degré S, S', ayant un plan tangent commun, pourvu que la génératrice de contact pour l'un des cônes S soit la droite qui joint leurs sommets.

6. Il y a des surfaces de second ordre, en nombre infini, qui sont inscrites dans la développable du cinquième ordre Σ. Toutes ces surfaces sont tangentes à la courbe C en b, et ont entre elles un contact stationnaire en ce point. Chacune de ces surfaces contient deux génératrices conjuguées de Σ (3) et est osculatrice à la courbe gauche C, aux points de contact de ces génératrices.

La courbe C est située sur un nombre infini de surfaces du second ordre qui ont entre elles un contact stationnaire au point a dans le plan acd. Chacune de ces surfaces contient deux génératrices conjuguées de Σ et a un contact de second ordre avec cette développable dans chacun des plans qui lui sont tangents le long de ces génératrices.

Donc, par deux génératrices conjuguées de Σ passent deux surfaces de second ordre, dont l'une est inscrite dans la développable Σ et l'autre passe par la courbe cuspidale C. Nommons *associées* ces deux surfaces de second ordre.

Deux surfaces associées ont en commun, outre les deux génératrices conjuguées de Σ, une conique dont le plan passe par bc. Le lieu de toutes ces coniques est une surface T de troisième ordre et quatrième classe qui passe par la courbe gauche C.

Deux surfaces associées sont inscrites dans un même cône de second degré, dont le sommet est sur ad. Tous ces cônes enveloppent une surface T' de troisième classe et quatrième ordre qui est inscrite dans la développable Σ.

7. Tout plan mené par la droite ad rencontre C en un seul point m, autre que a. De même, d'un point quelconque de bc on peut mener un seul plan tangent à Σ, autre que le plan stationnaire bcd.

On entendra par *rapport anharmonique* de quatre points m_1, m_2, m_3, m_4 de C celui des quatre plans $ad(m_1, m_2, m_3, m_4)$, et par *rapport anharmonique* de quatre plans tangents M_1, M_2, M_3, M_4 de Σ celui des quatre points $bc(M_1, M_2, M_3, M_4)$.

Cela posé, on voit bien ce qu'on doit entendre par *deux séries homographiques de points* sur C, ou par *deux séries homographiques de plans tangents* de Σ.

On donne, sur la courbe gauche C, deux séries homographiques de points; a et b soient les *points doubles*. Le lieu de la droite qui joint deux points correspondants est une surface gauche du cinquième degré, dont la courbe nodale est composée de la courbe gauche C et d'une conique située dans le plan abd et ayant un double contact avec K en a et b.

Soient m un point quelconque de C; m' et m_1 les points qui correspondent à m, suivant que ce point est regardé comme appartenant à la première série ou à la deuxième. Le plan $mm'm_1$ enveloppe une développable du cinquième ordre qui a, avec le tétraèdre $abcd$, la même relation que la développable donnée Σ.

On a des théorèmes analogues en considérant deux séries homographiques de plans tangents de Σ.

Ces propositions générales donnent lieu à un grand nombre de propriétés intéressantes. Par exemple:

Le plan osculateur à la courbe C en m coupe cette courbe en m'. Par m passe un plan qui va à osculer la courbe en un autre point m_1. Le lieu des droites mm', m_1m est une surface gauche du cinquième degré, etc., u. s. L'enveloppe du plan $mm'm_1$ est une développable du cinquième ordre, etc., u. s. Le point d'intersection des plans osculateurs en m, m', m_1 engendre une courbe gauche analogue à C; etc.

8. La conique double K, le cône doublement tangent S et les surfaces T, T', que nous avons rencontrés au n.° 6, admettent une autre définition.

La conique K est l'enveloppe d'un plan qui rencontre la courbe gauche C en quatre points, dont les trois rapports anharmoniques soient égaux.

Le cône S est le lieu d'un point d'où l'on puisse mener à la développable Σ quatre plans tangents, dont les trois rapports anharmoniques soient égaux.

La surface T est le lieu d'un point où se rencontrent quatre plans tangents harmoniques de la développable Σ.

La surface T' est l'enveloppe d'un plan qui coupe la courbe gauche C en quatre points harmoniques.

9. Toute surface P du troisième ordre passant par les six arêtes du tétraèdre *abcd* a un contact du second ordre en a et un contact du quatrième ordre en b avec la courbe C, et coupe cette courbe en quatre autres points. Les plans osculateurs à C, en ces quatre points, passent par un même point p de la surface P. Soit π le plan tangent en p à la surface P. Les plans osculateurs à la courbe C, aux quatre points où celle-ci est coupée par le plan π, sont tangents à une même surface Π de la troisième classe, qui passe par les six arêtes du tétraèdre *abcd*. Cette surface passe aussi par p et est tangente, en ce point, au plan π.

La surface Π, ainsi que toute surface de la troisième classe passant par les six arêtes du tétraèdre *abcd*, a un contact du second ordre dans le plan *bcd* et un contact de quatrième ordre dans le plan *acd* avec la développable donnée Σ.

Le point p et le plan π se correspondent réciproquement entre eux, c'est-à-dire l'un détermine l'autre.

Si l'on donne p, par ce point passent quatre plans osculateurs de C; les quatre points de contact sont situés, avec p, dans une surface P du troisième ordre passant par les six arêtes du tétraèdre. Le plan qui touche P en p est le plan π qui corespond au point p.

Si l'on donne π, les plans qui osculent C, aux quatre points où cette courbe est coupée par le plan donnée, sont tangents, avec ce même plan, à une surface Π de la troisième classe, qui passe par les six arêtes du tétraèdre. Le point p, où cette surface est touchée par π, est celui qui correspond au plan donné.

Nous dirons que p est le *pôle* du plan π; que π est le *plan polaire* du point p; que P est la surface *relative* au point p; et que Π est la surface *relative* au plan π.

On a ainsi une méthode de transformation des figures dans l'espace qu'a une certaine analogie avec celle que M. Chasles a récemment déduite de la théorie des cubiques gauches (*Compte rendu* du 10 août 1857). Les deux méthodes ont cette propriété commune: *un point quelconque est situé dans son plan polaire.*

Je ne m'arrêterai pas à signaler l'usage étendu qu'on peut faire de cette méthode de transformation.