35.

INTORNO ALLA TRASFORMAZIONE GEOMETRICA DI UNA FIGURA PIANA IN UN'ALTRA PUR PIANA, SOTTO LA CONDIZIONE CHE AD UNA RETTA QUALUNQUE DI CIASCUNA DELLE DUE FIGURE CORRISPONDA NELL'ALTRA UNA SOLA RETTA.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Anno accademico 1861-1862, pp. 88-91.

Lo Schiaparelli, giovine e distinto geometra, completando un lavoro che Magnus aveva appena iniziato, ha dimostrato che la trasformazione più generale, in cui ad ogni punto dèlla figura data corrisponda un solo punto nella figura derivata e reciprocamente, può ridursi, mercè alquante deformazioni omografiche attuate sulle due figure, a tre tipi semplicissimi. I quali tipi l'autore denomina *trasformazione iperbolica, trasformazione ciclica* e *trasformazione parabolica,* perchè in essi alle rette di una figura corrispondono rispettivamente iperboli, circonferenze e parabole nella seconda figura. [4]

In questo scritto mi sono proposto d'applicare l'idea feconda dello Schiaparelli ad una trasformazione geometrica affatto diversa da quella ch'egli ha considerata, ma generale quanto essa: vo' dire alla trasformazione di una figura piana in un'altra pur piana, sotto la condizione unica che ad ogni retta della figura data corrisponda una sola retta nella figura derivata e, reciprocamente, ad ogni retta di questa corrisponda una sola retta in quella. Posta quest'unica condizione, ad un punto corrisponderà una conica; cioè quando in una delle due figure una retta gira intorno ad un punto dato, la retta corrispondente nell'altra figura si muove inviluppando una conica. [5] Le coniche di una figura che per tal guisa corrispondono ai punti dell'altra sono tutte inscritte in un triangolo determinato. Ed in generale, ad una curva della classe n data nella prima figura corrisponde nella seconda una curva della classe $2n$, la quale tocca in n punti ciascuna delle rette formanti il triangolo suddetto.

Fo uso delle coordinate tangenziali di Plücker, per istabilire le condizioni della suenunciata trasformazione, nella più completa generalità. Indi, supposto che le due figure siano collocate in uno stesso piano, dimostro che, in seguito ad alcune deformazioni omografiche di esse, la trasformazione più generale può esser ridotta a due tipi principali assai semplici. In ciascuno di questi tipi, la trasformazione è *reciproca* od *involutoria;* vale a dire ad una retta data ad arbitrio nel piano corrisponde una medesima retta, qualunque sia la figura a cui quella prima retta è attribuita.

Due rette corrispondenti sono sempre parallele; sonovi però infinite rette che si trasformano in sè medesime e tutte toccano una stessa conica che ha il centro in un certo punto del piano che, a cagione del suo ufficio, chiamo *centro di trasformazione.* Quella conica è un'iperbole nel primo metodo-tipo, un circolo nel secondo.

Ecco in che consiste la caratteristica differenza fra i due metodi-tipi di cui parlo. Nel primo, i punti si trasformano in parabole tutte tangenti a due rette determinate che s'incrociano nel centro di trasformazione. Nel secondo, ai punti corrispondono parabole, per le quali il suddetto centro è il fuoco comune.

Questi due metodi-tipi hanno tutta la semplicità che mai si possa desiderare, e facilmente si prestano alla trasformazione delle proprietà sì descrittive che metriche. Non dico delle angolari, perchè gli angoli non si alterano punto nel passaggio dall'una all'altra figura, a cagione del parallelismo delle rette corrispondenti. Le proprietà anarmoniche si conservano intatte: giacchè il rapporto anarmonico di quattro rette divergenti da un punto dato è eguale a quello de' quattro punti in cui le rette corrispondenti segano una tangente qualunque della parabola che corrisponde al punto dato. Ed il rapporto anarmonico di quattro punti situati sopra una retta è eguale a quello de' punti in cui la retta omologa è toccata dalle parabole corrispondenti ai quattro punti dati.

È precipuamente notevole la seconda trasformazione, quella in cui le parabole corrispondenti a punti sono confocali, per la semplicità del principio che serve alla trasformazione delle proprietà metriche. Due rette omologhe sono situate dalla stessa banda rispetto al centro di trasformazione e hanno da esso distanze reciproche: la qual cosa costituisce una completa analogia fra questa trasformazione e l'inversione, nella quale i punti omologhi sono in linea retta con un centro fisso e hanno da esso distanze inversamente proporzionali. A quella proprietà si aggiunga che due rette omologhe, oltre all'essere parallele, corrono in verso contrario ed hanno grandezze proporzionali alle rispettive distanze dal centro; purchè si considerino come termini di una retta i punti ove tocca le parabole corrispondenti ai termini dell'altra. Per conseguenza, una figura composta di quante rette si vogliano si trasforma, imaginando che queste rette, rovesciate le rispettive direzioni, si trasportino a distanze da un centro fisso reciprocamente proporzionali a quelle di prima, ed ivi acquistino lunghezze eguali alle primitive, rispettivamente moltiplicate pei quadrati delle nuove distanze dal centro. Queste rette trasformate saranno inoltre connesse con un sistema di parabole confocali corrispondenti ai punti della figura originaria; e per tal modo, tutte le proprietà descrittive e metriche di un complesso di rette e di punti si trasmutano in teoremi relativi ad un sistema di rette e di parabole aventi lo stesso fuoco.